JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX
anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Élie MOSAKI

Partitions sans petites parts (II)

Tome 20, n° 2 (2008), p. 431-464.
<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2008__20_2_431_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **20** (2008), 431-464

Partitions sans petites parts (II)

par Élie MOSAKI

Résumé. On désigne par $r(n,m)$ le nombre de partitions de l'entier n en parts supérieures ou égales à m, et $R(n,m) = r(n-m,m)$ le nombre de partitions de n de plus petite part m. Dans un précédent article (voir [9]) un développement asymptotique de $r(n,m)$ est obtenu uniformément pour $1 \leq m = O(\sqrt{n})$; on complète ce développement uniformément pour $1 \leq m = (n \log^{-3} n)$. Afin de prolonger les résultats jusqu'à $m \leq n$, on donne un encadrement de $r(n,m)$ valable pour $n^{2/3} \leq m \leq n$ en utilisant la relation $r(n,m) = \sum_{t=1}^{\lfloor n/m \rfloor} P(n-(m-1)t, t)$ où $P(i,t)$ désigne le nombre de partitions de i en exactement t parts. On donne aussi une preuve combinatoire élémentaire de la décroissance en m, $m \leq n-1$, de $R(n,m)$.

Abstract. Let $r(n,m)$ denote the number of partitions of n into parts, each of which is at least m, and $R(n,m) = r(n-m,m)$ the number of partitions of n with smallest part m. In a precedent paper (see [9]) the asymptotics for $r(n,m)$ is obtained uniformly for $1 \leq m = O(\sqrt{n})$; we complete this asymptotics uniformly for $1 \leq m = (n \log^{-3} n)$. To prolong the results until $m \leq n$, we give an estimate for $r(n,m)$ which holds for $n^{2/3} \leq m \leq n$, by use of the relation $r(n,m) = \sum_{t=1}^{\lfloor n/m \rfloor} P(n-(m-1)t, t)$, $P(i,t)$ denoting the number of partitions of i into exactly t parts. We also give an elementary combinatorial proof for the decrease of $R(n,m)$ in terms of m, $m \leq n-1$.

1. Introduction

On désignera par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Une partition de l'entier naturel n est une suite décroissante finie d'entiers naturels $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s$ de somme n. Les éléments de la suite sont appelés les parts de la partition de n. La fonction $p(n)$ qui désigne le nombre de partitions de l'entier naturel n est étudiée depuis le moyen-âge. Au début du vingtième siècle Hardy et Ramanujan ont donné une formule

Manuscrit reçu le 18 juillet 2005.
Recherche partiellement financée par le CNRS, Institut Camille Jordan, UMR 5208.

asymptotique permettant le calcul exact de $p(n)$ pour les grandes valeurs de n, Rademacher ayant contribué à rendre cette formule plus précise. Il est naturel de se demander ce que devient cette asymptotique si l'on impose une contrainte sur les parts. Szekeres (1953, voir [11] et [12]) a donné le comportement asymptotique pour les partitions de n en parts plus petites que m. Ici on définit $r(n,m)$ le nombre de partitions de l'entier naturel n en parts supérieures ou égales à m, m étant un réel supérieur ou égal à 1, c'est-à-dire,

$$r(n,m) = |\ \{(i_1,\dots,i_s)\in\mathbb{N}^s;\ n=i_1+\dots+i_s, m\le i_1\le\dots\le i_s, s\in\mathbb{N}^*\}\ |\ .$$

On a une expression simple de la série génératrice des $r(n,m)$ pour m fixe sous forme de produit :

$$\sum_{n\ge 0} r(n,m)\,x^n = \prod_{i\ge m}\frac{1}{1-x^i}\ .$$

Il fut obtenu un équivalent de $r(n,m)$ (m peut dépendre de n) dans une fenêtre raffinée au cours des ans, jusqu'à $m=O(\sqrt{n})$. Dans un précédent article (voir [9]), nous avons amélioré les estimations [3] et [4] de $r(n,m)$ en donnant le comportement asymptotique de $r(n,m)$ pour les petites valeurs de m :

Théorème 1.1 (voir [9])**.** *Soit $\Gamma>0$, réel aussi grand que l'on veut. Pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, on a uniformément pour $1\le m\le\Gamma n^{1/2}$, m entier,*

$$(1.1)\quad r(n,m) = \frac{e^{2c\sqrt{n}}}{4\sqrt{3}n}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{m-1}(m-1)!\ \exp\Bigg[\sqrt{n}\tilde{g}(\lambda)+g_0(\lambda)+ \\ +\dots+\frac{1}{n^{\frac{\ell}{2}}}g_\ell(\lambda)+O_\Gamma\left(\frac{1}{n^{\frac{\ell+1}{2}}}\right)\Bigg]$$

où $\lambda=\dfrac{m}{\sqrt{n}}$, $c=\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$, et $\tilde{g},g_0,\dots,g_\ell$ sont analytiques sur $\mathbb{R}^+$, calculables et explicitées à la section 2. $\tilde{g}(\lambda)$ et $g_0(\lambda)$ tendent vers 0 quand λ tend vers 0.

Remarque 1. En utilisant la différence $g(\lambda)-\tilde{g}(\lambda)$ donnée par (2.7), la relation (1.1) s'écrit :

$$(1.2)\quad r(n,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mn}}\ \exp\Bigg\{\sqrt{n}g(\lambda)+\log\left(\frac{m!}{\sqrt{2\pi m}\,\left(\frac{m}{e}\right)^m}\right) \\ +g_0(\lambda)-\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{\sqrt{n}}\,g_1(\lambda)+\dots+\frac{1}{n^{\frac{\ell}{2}}}\,g_\ell(\lambda)+O_\Gamma\left(\frac{1}{n^{\frac{\ell+1}{2}}}\right)\Bigg\}\ .$$

Dans cet article nous obtenons pour les grandes valeurs de m une écriture semblable mais les fonctions g_i se comportent différemment en $+\infty$, et le reste devient différent. Le théorème principal que nous démontrerons est le suivant :

Théorème 1.2. *Soit $\varepsilon(n)$ une suite tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et Γ un réel strictement plus grand que 1. On a uniformément pour m vérifiant $\Gamma n^{1/2} \leq m \leq \dfrac{\varepsilon(n)n}{\log^3(n)}$, et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,*

$$(1.3)\quad r(n,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mn}}\ \exp\Bigg[\sqrt{n}g(\lambda) + \tilde{g}_0(\lambda) + \frac{m}{n}\tilde{g}_1(\lambda) + \cdots + \left(\frac{m}{n}\right)^{\ell}\tilde{g}_\ell(\lambda) + O\left(\left(\frac{m\log^3 n}{n}\right)^{\ell+1}\right)\Bigg]$$

où $\lambda = \dfrac{m}{\sqrt{n}}$, et $g, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_\ell$ sont analytiques, bornées et explicitées dans la section 2. La fonction $\tilde{g}_0$ tend vers 0 en $+\infty$. Dans la formule (1.3) le O dépend de Γ, de $\varepsilon(n)$ et de ℓ.

Nous donnons également une évaluation de $\log r(n,m)$ valable pour $n^{2/3} \leq m \leq n$, qui est moins précise mais qui prolonge les résultats du théorème 1.2 qui ne donnent une estimation de $r(n,m)$ que pour $m \leq \frac{\varepsilon(n)}{\log^3 n}\, n$. Nous prouverons :

Théorème 1.3. *Soit m_0 défini par $1 \leq m_0 \leq n$ et $\log \dfrac{{m_0}^3}{(n-m_0)^2} = \dfrac{n}{m_0} - 1$; lorsque $n \to \infty$, $m_0 \sim \dfrac{n}{\log n}$. Si on note $\lambda = \dfrac{m}{\sqrt{n}}$, on a uniformément pour m vérifiant $n^{2/3} \leq m \leq m_0$*

$$\exp\left(\sqrt{n}g(\lambda) + O\left(\frac{n^2}{m^3}\log^2\lambda\right) - \log n - \frac{m\log^2 n}{2n} + O\left(\frac{m}{n}\ \log n\right)\right) \leq r(n,m) \leq \exp\left(\sqrt{n}g(\lambda) + O\left(\frac{n^2}{m^3}\log^2\lambda\right) + \log(n/m)\right),$$

et pour $m_0 \leq m \leq n$, on a

$$(1.4)\quad n^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-2}e^{-\left(3\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-4\right)\log\frac{n}{m}+\left(\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-1\right)(2+\log\theta)+\log\frac{K}{2}} \leq r(n,m) \leq n^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-1}e^{-\left(3\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-4\right)\log\frac{n}{m}+\left(\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-1\right)(2+\log\theta)+2\theta}.$$

où $\theta = \frac{n}{m} - \lfloor\frac{n}{m}\rfloor + 1 \in [1,2[$ et $K = \frac{e^{-1/6}}{2\pi}$.

Si $m \in]\frac{n}{k+1}, \frac{n}{k}]$, c'est-à-dire $\lfloor\frac{n}{m}\rfloor = k$, la relation (1.4) implique

$$K_{1,k}\, n^{k-2} \leq r(n,m) \leq K_{2,k}\, n^{k-1},$$

où $K_{1,k}$ et $K_{2,k}$ sont des constantes dépendant de k. On peut comparer cette estimation à la valeur exacte de $r(n,m)$ quand $n/3 < m \leq n/2$: $r(n,m)$ se calcule élémentairement puisque toute partition de n en parts supérieures ou égales à m comporte alors au maximum deux parts ; plus précisément on a

$$r(n,m) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - m + 2 \text{ si } n/3 < m \leq n/2\,. \tag{1.5}$$

Ainsi $2 = r(n, \lfloor n/2 \rfloor) \leq r(n,m) \leq r(n, \lfloor n/3 \rfloor + 1) = \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/3 \rfloor + 1$.

La section 2 est consacrée au rappel des notations et principales fonctions ainsi que leurs propriétés utilisées tout au long de l'article.

Dans la section 3 on étudie le caractère unimodal et log-concave de la suite $R(n,m)$.

La section 4 est consacrée à la démonstration du théorème 1.2 dont l'outil principal est la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin et le point de départ le théorème Nicolas-Sárközy (voir [10] et [9]) obtenu à l'aide de la méthode du col.

Dans la section 5 nous démontrons le théorème 1.3.

Enfin la $6^{\text{ème}}$ et dernière section sera l'objet d'une conclusion dans laquelle nous insérons un tableau donnant les équivalents asymptotiques de quelques suites $r(n, m(n))$.

2. Notations et principales fonctions

Dans tout l'article $f_1 \asymp f_2$ signifie ($f_1 = O(f_2)$ et $f_2 = O(f_1)$). $f = O_\Gamma(g)$ signifie que la constante dans le O ne dépend que de Γ. $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. On rencontrera les nombres de Bernoulli B_i dont la série génératrice est

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i \geq 0} \frac{B_i}{i!}\, x^i\,.$$

La constante c désignera toujours le réel $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Enfin $\mathcal{E}_\Gamma$ désigne l'ensemble des fonctions analytiques sur $[\Gamma, +\infty[$ dont toutes les dérivées successives admettent des développements asymptotiques obtenus par dérivation du développement de la fonction initiale, et qui s'écrivent dans l'échelle des fonctions logarithmiques et exponentielles (cf. 4.1).

On se référera à l'article [9] pour les démonstrations des résultats ci-dessous.

Définissons d'abord la fonction H qui est centrale dans les théorèmes 1.1 et 1.2 : c'est la fonction réciproque de la fonction qui à tout x réel associe $x/\sqrt{F(x)}$, où

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{t}{e^t - 1}\, dt\,. \tag{2.1}$$

On peut montrer que H est une bijection strictement croissante et analytique de $]-\sqrt{2}, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, valant 0 en 0, et que H vérifie trivialement l'équation fonctionnelle

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)^2 = F(H(x)). \tag{2.2}$$

Maintenant la fonction g du théorème 1.2 est définie pour $x > 0$, par

$$g(x) = 2\,\frac{H(x)}{x} + x\log\left(1 - e^{-H(x)}\right) \tag{2.3}$$

et vérifie par ailleurs (il suffit d'utiliser (2.2))

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{x}\right) = -2\,\frac{H(x)}{x^3}. \tag{2.4}$$

ainsi que

$$g'(x) = \log\left(1 - e^{-H(x)}\right), \tag{2.5}$$

et

$$g''(x) = \frac{H'(x)e^{-H(x)}}{1 - e^{-H(x)}} = \frac{H'(x)}{e^{H(x)} - 1}\ . \tag{2.6}$$

Ainsi g est convexe et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Enfin, en reprenant (2.3), on voit que $x \mapsto g(x) - x\log x$ est analytique en 0, donc de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Et on a

$$\begin{cases} a_0 = 2c & a_4 = -\dfrac{1}{576}\dfrac{17c^4 + 18c^2 - 3}{c^3} \\[2ex] a_1 = \log c - 1 & a_5 = -\dfrac{1}{14400}(c^4 - 50c^2 - 325) \\[2ex] a_2 = -\dfrac{1}{4}(c + \dfrac{1}{c}) & a_6 = -\dfrac{56c^8 + 7425c^6 + 7875c^4 - 2025c^2 + 405}{1036800c^5} \\[2ex] a_3 = \dfrac{c^2 + 9}{72} & \ldots \end{cases}$$

les a_i étant des fractions rationnelles en $c = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$ $(i \geq 2)$.

Les fonctions $\tilde{g}$ et g_0 du théorème 1.1 sont définies pour tout x positif ou nul par

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= g(x) - (x\log x + 2c + (\log c - 1)x) \\ &= 2\left(\frac{H(x)}{x} - c + \frac{x}{2}\right) + x\log\left(\frac{1 - e^{-H(x)}}{cx}\right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$g_0(x) = \log\left(\frac{H(x)}{cx}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-e^{-H(x)}}{H(x)}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{3}{\pi^2}\int_0^{H(x)} \frac{t^2e^t}{(e^t-1)^2}\,dt\right) = \frac{H(x)}{2} - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{e^{H(x)} - 1 - H(x) + \frac{x^2}{2}}{H(x)}\right). \tag{2.8}$$

Ainsi la fonction $\tilde{g}$ est analytique en 0 et vérifie si x tend vers 0 :

$$\tilde{g}(x) = -\frac{1}{4}(c + \frac{1}{c})\,x^2 + \frac{c^2+9}{72}\,x^3 - \frac{1}{576}\frac{17c^4 + 18c^2 - 3}{c^3}\,x^4 + O(x^5)\,.$$

La seconde égalité de (2.8) s'obtient grâce à une intégration par parties dans la première égalité et l'utilisation de l'équation fonctionnelle (2.2) satisfaite par H. Il s'en suit que la fonction g_0 est analytique sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie si $x \to 0$, par exemple :

$$g_0(x) = \frac{1}{4}\frac{c^2-1}{c}\,x - \frac{1}{48}\frac{c^4+3}{c^2}\,x^2 + \frac{1}{96}\frac{3c^4+1}{c^3}\,x^3 + O(x^4)\,. \tag{2.9}$$

Par ailleurs les fonctions $\tilde{g}_i$ pour $i \geq 0$ du théorème 1.2 sont reliées aux fonctions g_i du théorème 1.1 de la façon suivante :

$$\tilde{g}_0(x) = g_0(x) - \frac{1}{2}\log 2 = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2 + 2(e^{H(x)}-1)}{H(x)e^{H(x)}}\right), \tag{2.10}$$

$$\tilde{g}_i(x) = \frac{g_i(x)}{x^i} + \frac{B_{i+1}}{i(i+1)x^{2i}} \quad \text{pour tout } i \geq 1\,, \tag{2.11}$$

où les B_i sont les nombres de Bernoulli. Ces égalités paraissent naturelles si l'on compare (1.2) et (1.3). Ceci est démontré dans la section 4. La deuxième égalité de (2.10) se déduit de la deuxième égalité de (2.8). On voit alors que la fonction $\tilde{g}_0$ tend vers 0 en $+\infty$ grâce au développement asymptotique de H en $+\infty$ écrit plus loin en (2.12).

Écrivons donc les développements asymptotiques de g et $\tilde{g}_0$ en $+\infty$. Pour les obtenir on peut montrer qu'il suffit d'avoir la partie principale de F en $+\infty$ obtenue à l'aide de son développement suivant les puissances de e^{-x} pour x positif :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2})e^{-nx} = (x+1)e^{-x} + O(xe^{-2x})\,,$$

de calculer le développement asymptotique de $x/\sqrt{F(x)}$ et d'en déduire celui de sa fonction réciproque H lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\text{(2.12)}\quad H(x) = 2\log x - \log\log x - \log 2 + \frac{\log\log x + \log 2 + 1}{2\log x} + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log^2 x}\right) .$$

Ensuite, il suffit de reprendre les définitions (2.3) et (2.10) de g et $\tilde{g}_0$, pour obtenir :

$$\text{(2.13)}\quad g(x) = \frac{2\log x - \log\log x - \log 2 + 1}{x} + \frac{\log\log x + \log 2}{2x\log x} + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{x\log^2 x}\right) ,$$

$$\text{(2.14)}\quad \tilde{g}_0(x) = -\frac{1}{4\log x} - \frac{2\log\log x + 2\log 2 + 1}{16\log^2 x} + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right) .$$

Pour terminer cette section notons deux formules asymptotiques qui nous seront utiles dans les sections 4 et 5 : il résulte de (2.12) que

$$\text{(2.15)}\quad H(x)\, e^{H(x)} = x^2\left(1 + \frac{1}{2\log x} + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log^2 x}\right)\right) \text{ , et}$$

$$\text{(2.16)}\quad e^{-H(x)} = \frac{2\log x}{x^2}\left(1 - \frac{\log\log x + \log 2 + 1}{2\log x} + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log^2 x}\right)\right) .$$

3. Unimodalité et log-concavité partielle de $R(n,m)$

Szekeres a démontré l'unimodalité pour n suffisamment grand, de la fonction $(P(n,m))_m$ où $P(n,m)$ est le nombre de partitions de n dont la plus grande part est égale à m. De façon plus précise il a démontré que :

Théorème 3.1 (voir [12]). *Si n est suffisamment grand, il existe un réel $m_0 = m_0(n)$ tel que $P(n,m) < P(n,m+1)$ si $m < m_0$, et $P(n,m) > P(n,m+1)$ si $m > m_0$. Le réel m_0 vérifie :*

$$m_0 = \frac{\sqrt{n}}{c}\log\frac{\sqrt{n}}{c} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\log\frac{\sqrt{n}}{c} - \frac{1}{4}\log^2\frac{\sqrt{n}}{c}\right) - \frac{1}{2} + O\left(\frac{\log^4 n}{\sqrt{n}}\right) ,$$

où $c = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Il n'existe pas de preuve combinatoire de cette unimodalité. Soit $R(n,m)$ le nombre de partitions de n dont la plus petite part est égale à m. Il est évident que si m vaut n alors $R(n,n)$ vaut 1. Sinon, en écartant la plus petite part m, la somme des parts restantes (il y en a au moins une) vaut $n-m$ et l'on voit que $R(n,m)=r(n-m,m)$. Le comportement de $R(n,m)$ est moins original que celui de $P(n,m)$: il existe une preuve combinatoire facile du fait que pour tout n entier naturel non nul, la suite $(R(n,m))_{1\le m\le n-1}$ soit décroissante. Plus précisément on peut montrer élémentairement le théorème suivant :

Théorème 3.2. *La suite $(R(n,m))_{1\le m\le n}$ est strictement décroissante jusqu'à $\lfloor \frac{n}{3}\rfloor$ puis constante égale à 1 si $\lfloor \frac{n}{3}\rfloor+1\le m\le \lfloor \frac{n}{2}\rfloor$, constante égale à 0 si $\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1\le m<n$, et enfin $R(n,n)=1$.*

Démonstration. Désignons par $\mathcal{R}(n,m)$ l'ensemble des partitions de n en parts supérieures ou égales à m, avec une part égale à m (de telle sorte que $R(n,m)=\mathrm{card}(\mathcal{R}(n,m))$).
$\mathcal{R}(n,n)$ contient une seule partition, n. Pour $\frac{n}{2}<m<n$, $\mathcal{R}(n,m)$ est vide et pour $\frac{n}{3}<m\le\frac{n}{2}$, $\mathcal{R}(n,m)$ contient seulement la partition $m+(n-m)$. Supposons $1\le m\le\frac{n}{3}$. Une partition de $\mathcal{R}(n,m+1)$ possède au moins deux parts (car $m+1\le 1+\frac{n}{3}<n,$ car $n\ge 3$) et s'écrit

$$n=(m+1)+i_2+\cdots+i_k \text{ avec } k\ge 2 \text{ et } m+1\le i_2\le\cdots\le i_k\ .$$

À une telle partition, on associe la partition de $\mathcal{R}(n,m)$:

$$n=m+i_2+\cdots+i_{k-1}+(i_k+1)\ .$$

Cette correspondance est une injection de $\mathcal{R}(n,m+1)$ dans $\mathcal{R}(n,m)$. Ce n'est pas une bijection car la partition $m+m+(n-2m)$ n'a pas d'antécédent. □

À partir des théorèmes 1.1 et 1.2 et de la formule $R(n,m)=r(n-m,m)$ valable dès que $m<n$, on peut obtenir le comportement asymptotique de $R(n,m)$ pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout m vérifiant $1\le m\le n^{1-\varepsilon}$ (cf. [8, Lemme 4.1]). On prouve alors que la suite $R(n,m)$ est strictement décroissante en m, pour n suffisamment grand. De façon plus précise, on a :

Corollaire 3.1. *Pour tout $\varepsilon>0$, on a uniformément pour $1\le m\le n^{1-\varepsilon}$, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\log\frac{R(n,m+1)}{R(n,m)}\sim g'(\lambda)=\log\left(1-e^{-H(\lambda)}\right)\ ,$$

où $\lambda=\frac{m}{\sqrt{n}}$.

On montre aussi que la suite $R(n,m)$ est log-convexe en m pour n suffisamment grand :

Corollaire 3.2. *Pour tout ε strictement positif, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et m satisfaisant $2 \leq m \leq n^{1-\varepsilon}$,*

$$R(n,m)^2 < R(n,m-1)\ R(n,m+1)\ .$$

Plus précisément, uniformément pour $m \leq n^{1-\varepsilon}$, on a quand $n \to +\infty$:

$$\log\left(\frac{R(n,m+1)\ R(n,m-1)}{R(n,m)^2}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\, g''(\lambda)\ .$$

Les démonstrations de ces corollaires sont détaillées dans [8, 2.4]. Elles découlent simplement du fait que la fonction g est strictement décroissante et convexe, et que les fonctions $\tilde{g}_i$ du théorème 1.2 se comportent relativement bien en l'infini. On notera que $R(n,m)$ est unimodale sur tout l'intervalle $1 \leq m \leq n$, et que $R(n,m)$ est de plus bien log-convexe sur l'intervalle $1 \leq m \leq n^{1-\varepsilon}$ (pour n assez grand), mais que cette log-convexité s'arrête asymptotiquement pour $(m < n/6,1)$ comme nous l'avons numériquement vérifié pour $1 \leq n \leq 500$, s'arrête vers $(m = n/7,2)$ pour $600 \leq n \leq 1900$ et vers $(m = n/8,3)$ pour $2000 \leq n \leq 3000$. Expérimentalement on observe ainsi que le seuil de log-convexité ressemble à une fonction affine par morceaux (environ $n/5$, puis $n/6$, $n/7$, $n/8$, ...). Cela confirme expérimentalement qu'une log-convexité sur une fenêtre $O(n)$ est exclue.

4. Démonstration du théorème 1.2

Le point de départ est le théorème Nicolas-Sárközy (voir [10] et [9]) obtenu à l'aide de la méthode du col, et qui s'écrit pour les grandes valeurs de m :

Théorème 4.1. *Il existe une suite de réels $d(x,y)$ (indexée par $(x,y) \in \mathbb{N}^2$) telle que si $L_x = \sum_{i=1}^{x} d(x,i)A(x,i)$ où $A(h,\ell) = \sum_{j=m}^{n} \frac{j^h}{(e^{\sigma j}-1)^\ell}$, alors pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geq 3$, quand $n \to +\infty$, on a*

$$r(n,m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}B} e^{\sigma n} \prod_{j=m}^{n} \frac{1}{1-e^{-\sigma j}} Q \tag{4.1}$$

où σ et B sont donnés par

$$n = A(1,1) = \sum_{j=m}^{n} \frac{j}{e^{\sigma j}-1}\ , \tag{4.2}$$

$$B^2 = L_2 = 2A(2,1) + 2A(2,2) = 2\sum_{j=m}^{n} \frac{j^2 e^{\sigma j}}{(e^{\sigma j}-1)^2} \tag{4.3}$$

et

$$Q = 1 + \sum_{2 \leq i \leq (3\kappa-6)/2} (-1)^i Q_{2i} + E \tag{4.4}$$

avec

$$Q_{2i} = 2^{-i}(2i-1)(2i-3)\cdot\ldots\cdot 1\cdot L_2^{-i} \sum_{\max\{1,\frac{2i-\kappa+2}{2}\}\le t\le\kappa-2} \frac{1}{t!}\cdot \sum_{\substack{h_1+h_2+\ldots+h_t=2i\\ 3\le h_1,\ldots,h_t\le\kappa}} L_{h_1}L_{h_2}\ldots L_{h_t}$$

et pour tout Γ *réel,*

$$E = O_\Gamma\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{(\kappa-1)/2}(\log n)^{3(\kappa-1)/2}\right)$$

ceci uniformément pour m *tel que* $\Gamma\sqrt{n} \le m \le \frac{n}{(\log n)^3}\,\varepsilon(n)$ *, où* ε *désigne n'importe quelle suite tendant vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$*.*

La formule (4.1) du théorème 4.1 donne

$$\log r(n,m) = -\frac{1}{2}\log\pi - \log B + \sigma n + \sum_{j=m}^{n} -\log\left(1-e^{-\sigma j}\right) + \log Q \quad . \tag{4.5}$$

Comme dans [9] l'exercice consiste à utiliser la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin pour estimer de façon précise σ, puis $-\log B$, défini par (4.3), $\sum_{j=m}^{n} -\log\left(1-e^{-\sigma j}\right)$ et $\log Q$, défini par (4.4). Les résultats seront très proches de ceux obtenus dans [9], aussi nous ne détaillerons pas les preuves.

4.1. Dérivation de certains développements asymptotiques.

Toutes les fonctions étudiées dans cet article admettent des développements asymptotiques en l'infini, et les dérivées de ces fonctions également. Précisons tout cela : rappelons que $\mathcal{E}_\Gamma$ désigne l'ensemble des fonctions analytiques sur $[\Gamma,+\infty[$ dont toutes les dérivées successives admettent des développements asymptotiques obtenus par dérivation du développement de la fonction initiale, et qui s'écrivent dans l'échelle des fonctions logarithmiques et exponentielles. Le corps des fonctions de Hardy est inclus dans cet ensemble (voir [1] et [7]). En fait la fonction H, et par suite g, ainsi que toutes les fonctions intervenant dans le théorème 1.2 appartiennent à un corps de Hardy. Mais nous avons simplement besoin que ces fonctions appartiennent à $\mathcal{E}_\Gamma$. Pour H on a déjà obtenu son développement asymptotique écrit en (2.12), et partant de (2.1) et (2.2) on obtient :

$$H'(x) = \frac{2H(x)(e^{H(x)}-1)}{x(x^2+2(e^{H(x)}-1))}\ .$$

Alors H' admet un développement suivant l'échelle logarithmique et exponentielle, ainsi que ses dérivées (par récurrence). On a ainsi pour $x\to+\infty$

$$H'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x\log x} - \frac{\log\log x + \log 2}{2x\log^2 x} + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{x\log^3 x}\right)\ ,\quad \text{et} \tag{4.6}$$

$$(4.7) \qquad H^{(i)}(x) \sim (-1)^{i-1}\,\frac{2(i-1)!}{x^i} \quad \text{pour tout } i \geq 1\ .$$

Par suite en s'appuyant sur les résultats de Hardy (voir [7, III]), H appartient à $\mathcal{E}_\Gamma$. Puisque g est construit à l'aide de H et d'opérations élémentaires incluant les fractions rationnelles, les exponentielles et les logarithmes, g est aussi dans $\mathcal{E}_\Gamma$.

4.2. Première estimation de $\boldsymbol{\sigma}$.

Lemme 4.1. *Pour tout m et n tel que $1 \leq m \leq n$, on définit σ par* (4.2) *et l'on pose $\lambda = \frac{m}{\sqrt{n}}$. On a :*

(i) $\sigma \geq \dfrac{\log \lambda}{m}$ *si* $2m \leq n$

(ii) $\sigma \leq \dfrac{H(\lambda)}{m-1} = O_\Gamma\left(\dfrac{\log\lambda}{m}\right)$, *si $\lambda \geq \Gamma > 1$, où H est définie en* 2.

Démonstration. La preuve utilise la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^{\sigma t}-1}$. On a pour $2m \leq n$,

$$n = \sum_{j=m}^{n} \frac{j}{e^{\sigma j}-1} \geq \int_m^n \frac{t}{e^{\sigma t}-1}\,dt \geq \int_m^{2m} \frac{t}{e^{\sigma t}}\,dt \geq e^{-2m\sigma}\int_m^{2m} dt \geq m^2 e^{-2\sigma m}$$

ce qui implique (i) puisque $\lambda^2 = m^2/n$. Il vient ensuite

$$n = \sum_{j=m}^{n} \frac{j}{e^{\sigma j}-1} \leq \int_{m-1}^{+\infty} \frac{t}{e^{\sigma t}-1}\,dt = \frac{1}{\sigma^2}\,F(\sigma(m-1))$$

par (2.1). Ceci s'écrit :

$$\frac{\sigma(m-1)}{\sqrt{F(\sigma(m-1))}} \leq \frac{m-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{m}{\sqrt{n}} = \lambda\ ,$$

et puisque H la fonction réciproque de $x/\sqrt{F(x)}$ est croissante,

$$\sigma(m-1) \leq H(\lambda)\ .$$

Comme $\lambda \geq \Gamma > 1$, (2.12) entraîne $H(\lambda) = O_\Gamma(\log\lambda)$, ce qui complète la preuve du lemme 4.1.

□

Ce lemme fournit un ordre de grandeur de σ , qui sera amélioré en 4.4.

4.3. La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin pour $\boldsymbol{A(h,\ell)}$.

Rappelons que $A(h,\ell)$, introduit dans le théorème 4.1, est défini pour $(h,\ell) \in \mathbb{N}^2$ par

$$A(h,\ell) = \sum_{j=m}^{n} \frac{j^h}{(e^{\sigma j}-1)^\ell}\ .$$

Lemme 4.2. *Soit* $(h,\ell)\in\mathbb{N}^2$ $,1\le \ell\le h,\ k\ge 1$ *et* Γ *réel,* $\Gamma>1$. *Pour* t *réel, on pose*

$$U(t)=U(h,\ell,t)=\frac{t^h}{(e^t-1)^\ell}\ .$$

On a uniformément pour m *vérifiant* $\Gamma\sqrt{n}\le m\le \dfrac{n}{\log^3 n}$,

$$(4.8)\ A(h,\ell)=\frac{1}{\sigma^{h+1}}\left[\int_{\sigma m}^{+\infty}U+\frac{\sigma}{2}U(\sigma m)-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\sigma^{2j}U^{(2j-1)}(\sigma m)+\tilde{R}\right]$$

avec

$$\tilde{R}=O\left(\sigma^{2k}\int_{\sigma m}^{+\infty}|U^{(2k)}|\right)=O(\sigma^{2k})\ . \tag{4.9}$$

Démonstration. En appliquant la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin à la fonction $t\mapsto U(\sigma t)$ sur l'intervalle $[m,n]$ comme dans [9, (3.2)], on obtient (4.8) avec

$$\tilde{R}=-\int_{\sigma n}^{+\infty}U\ +\frac{\sigma}{2}U(\sigma n)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\sigma^{2j}U^{(2j-1)}(\sigma n)+\sigma R_{m,n}(k)\ . \tag{4.10}$$

Le quatrième terme du membre de droite de (4.10) se majore comme suit (voir la proposition 3.1 de [9]) :

$$\sigma|R_{m,n}(k)|\le\sigma\,\frac{4\sigma^{2k-1}}{(2\pi)^{2k}}\int_{\sigma m}^{\sigma n}|U^{(2k)}|\le\sigma^{2k}\int_{\sigma m}^{+\infty}|U^{(2k)}|\ .$$

En dérivant i fois le développement

$$U(t)=\frac{t^h}{(e^t-1)^\ell}=\sum_{r\ge 0}\binom{r+\ell-1}{\ell-1}t^he^{-(r+\ell)t}\ , \tag{4.11}$$

on obtient l'équivalence (cf. [9, (3.4)])

$$|U^{(i)}(t)|\sim \ell^it^he^{-\ell t}\ ,\ t\to+\infty\ . \tag{4.12}$$

Par le lemme 4.1, on a, car $\Gamma>1$:

$$\sigma n\ge\frac{n}{m}\log\lambda\ge\frac{n}{m}\log\Gamma\ge\log\Gamma.\log^3 n\to+\infty \text{ quand } n\to+\infty. \tag{4.13}$$

De (4.12) et (4.13) on déduit que :

$$\sigma^{i+1}U^{(i)}(\sigma n)\asymp\sigma^{i+1}(\sigma n)^he^{-\ell\sigma n}\ . \tag{4.14}$$

Ensuite, puisque $m \le \dfrac{n}{\log^3 n} \le \dfrac{n}{2}$, et en utilisant (4.12),

$$\text{(4.15)} \qquad \begin{aligned} \int_{\sigma m}^{+\infty} |U^{(2k)}| &\ge \int_{\frac{\sigma n}{2}}^{+\infty} |U^{(2k)}| \\ &\ge \left| \int_{\frac{\sigma n}{2}}^{+\infty} U^{(2k)} \right| = \left| U^{(2k-1)}\left(\frac{\sigma n}{2}\right) \right| \asymp \left(\frac{\sigma n}{2}\right)^h e^{-\ell\sigma n/2} . \end{aligned}$$

Il s'ensuit d'après (4.14) et (4.15) que pour $0 \le i \le 2k-3$ et n tendant vers l'infini, la condition

$$\text{(4.16)} \qquad \sigma^{i+1} U^{(i)}(\sigma n) = O\left(\sigma^{2k} \int_{\sigma m}^{+\infty} |U^{(2k)}|\right)$$

est réalisée si pour tout $j \ge 0$

$$\text{(4.17)} \qquad \sigma^{-j} = O\left(e^{\frac{\sigma n}{2}}\right) \ \left(= O\left(e^{\frac{\ell \sigma n}{2}}\right)\right) ,$$

ce qui est le cas puisque d'après le lemme 4.1 et les conditions $\lambda \ge \Gamma > 1$ et $m \le \dfrac{n}{\log^3 n}$, on a

$$\text{(4.18)} \qquad \sigma^{-j} e^{-\frac{\sigma n}{2}} \le \left(\frac{m}{\log \lambda}\right)^j e^{-\frac{n \log \lambda}{2m}} \le \left(\frac{n}{\log \lambda}\right)^j e^{-\frac{\log^3 n}{2} \log \Gamma} = o(1).$$

La relation (4.16) est encore valide pour $i = -1$ en posant $U^{(-1)}(t) = \int_t^{+\infty} U$, car (4.12) se démontre en intégrant le développement (4.11), et (4.14) et (4.16) suivent. Finalement, $\tilde{R}$ défini par (4.10) satisfait (4.9) en appliquant (4.16) pour $i = -1,\ 0,\ 1,\ 3, \ldots,\ 2k-3$. La deuxième égalité de (4.9) provient de la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |U^{(2k)}|$ qui résulte de (4.12) et du fait que U est analytique en 0.

□

4.4. Estimation précise de $\boldsymbol{\sigma}$.

L'estimation de σ donnée dans le lemme 3.3 de [9] reste valable à condition de modifier le reste car les fonctions analytiques p_i se comportent différemment en $+\infty$. En notant pour $i \ge 2$, $\tilde{p}_i(\lambda) = \lambda^i p_i(\lambda)$, on a :

Lemme 4.3. *Pour tout entier ℓ supérieur ou égal à 1, il existe des fonctions $\tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_\ell$ analytiques sur $\mathbb{R}^+$ et dans $\mathcal{E}_\Gamma$ telles que uniformément pour m vérifiant $\Gamma n^{1/2} \le m \le \dfrac{n}{\log^3 n}$,*

$$\text{(4.19)} \qquad \sigma = \frac{1}{m} H(\lambda) + \frac{1}{m^2} \tilde{p}_2(\lambda) + \cdots + \frac{1}{m^\ell} \tilde{p}_\ell(\lambda) + O\left(\frac{\log^\ell \lambda}{m^{\ell+1}}\right)$$

avec $\lambda = \frac{m}{\sqrt{n}}$ *. En particulier, pour* $\ell = 1$ *on obtient :*

$$\sigma = \frac{1}{m} H(\lambda) + O\left(\frac{\log \lambda}{m^2}\right) . \tag{4.20}$$

Par ailleurs, si x *est réel,*

$$\tilde{p}_2(x) = \frac{x^3}{4} \frac{H'(x)}{e^{H(x)} - 1} = \frac{x^3}{4}\, g''(x) . \tag{4.21}$$

Démonstration. Posons $u(t) = \frac{t}{e^t - 1} = U(1,1,t)$. On applique la formule d'Euler-Maclaurin (4.8) à $n = \sum_{j=m}^{n} \frac{j}{e^{\sigma j} - 1}$ pour obtenir comme dans [9, (3.19)]

$$\sigma = \frac{1}{m} H\left(\frac{m}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1-R}}\right) \tag{4.22}$$

avec grâce à (4.9) R vérifiant pour tout $k \geq 1$

$$R = \frac{1}{2n\sigma}\left[u(\sigma m) - 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \sigma^{2j-1} u^{(2j-1)}(\sigma m) + O\left(\sigma^{2k-1}\right)\right] . \tag{4.23}$$

On obtient alors le théorème par une méthode itérative : le comportement de u et de ses dérivées en l'infini étant connu par (4.12), on obtient de façon successive une première approximation de R, une première approximation de σ, puis une seconde de R et de σ en utilisant la formule de Taylor convenablement. Si l'on commence par exemple l'itération, on obtient en prenant $k = 1$ dans (4.23) et en utilisant le lemme (4.1) qui donne $\sigma m \geq \log \Gamma > 0$:

$$R = \frac{u(\sigma m) + O(\sigma)}{2n\sigma} \leq \frac{\frac{\sigma m}{\Gamma - 1} + O(\sigma)}{2n\sigma} = O\left(\frac{m}{n}\right) = o(1) ; \tag{4.24}$$

puis, à l'aide de (4.22) et de la formule des accroissements finis, il existe $\lambda_1 = \lambda + o(1)$ tel que

$$\begin{aligned} \sigma m - H(\lambda) &= \frac{\lambda}{\lambda_1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}} - 1\right) \lambda_1 H'(\lambda_1) \\ &= O(R\lambda_1 H'(\lambda_1)) = O(R) = o(1) , \end{aligned} \tag{4.25}$$

car $\lambda_1 H'(\lambda_1) = O(1)$ provient de (4.6). D'où, en reprenant (4.24) et en utilisant $e^{-H(\lambda)} \sim \frac{2 \log \lambda}{\lambda^2}$ si $\lambda \to +\infty$ obtenu en (2.16) :

$$R = O\left(\frac{m}{n}\, e^{-\sigma m} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{m}{n}\, e^{-H(\lambda)} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{\log \lambda}{m}\right) ;$$

puis, par (4.25)

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{m} H\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{R}{m}\right)\\ &= \frac{1}{m} H\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{\log\lambda}{m^2}\right)\ .\end{aligned}$$

Maintenant on reprend R : sachant que

$$\sigma m = H(\lambda) + O\left(\frac{\log\lambda}{m}\right)$$

on obtient avec $k = 2$ dans (4.23) l'existence de $d \in (\sigma m, H(\lambda))$, donc vérifiant $d = H(\lambda) + o(1)$, tel que :

$$R = \frac{m}{2n}\left(\frac{u(H(\lambda))}{H(\lambda)} + O\left(\frac{\log\lambda}{m}(u/id)'(d)\right) - \frac{u'(\sigma m)}{6m} + O\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)\right)\ .$$

Or

$$\begin{aligned}\sigma m &\geq \log\Gamma > 0 \text{ par le lemme 4.1 (i) },\\ (u/id)'(t) &= -\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} = O(e^{-t}) \text{ si } t \geq \log\Gamma/2 > 0, \text{ donc}\\ (u/id)'(d) &= O\left(e^{-H(\lambda)}\right) = O(\log\lambda/\lambda^2), \quad \text{et aussi}\\ u'(\sigma m) &= O_\Gamma(\sigma m e^{-\sigma m}) = O\left(H(\lambda)e^{-H(\lambda)}\right) = O(\log^2\lambda/\lambda^2) \text{ par (4.12)},\\ \sigma^2 &= O(\log^2\lambda/m^2) \text{ par le lemme 4.1 (ii) }.\end{aligned}$$

D'où

$$R = \frac{m}{2n}\left(\frac{u(H(\lambda))}{H(\lambda)}\right) + O\left(\frac{\log^2\lambda}{m^2}\right)\ .$$

On obtient au passage, compte-tenu du développement asymptotique (2.16) de e^{-H},

$$R = O_\Gamma\left(\frac{\log\lambda}{m}\right) \text{ si } \lambda \geq \Gamma > 1, \text{ et } R \sim \frac{\log\lambda}{m} \text{ si } \lambda \longrightarrow +\infty. \tag{4.26}$$

Ensuite, en reportant la valeur de R dans (4.22), par le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction H au point λ, on obtient la fonction $\tilde{p}_2$ attendue, ainsi que le bon reste.

Pour obtenir le développement de σ à l'ordre ℓ, il suffit d'écrire le développement de Taylor à l'ordre ℓ de la fonction H au point λ dans la formule

(4.22) : il existe $\lambda_2 = \lambda + o(1)$ tel que

$$\sigma = \frac{1}{m}\Bigg\{H(\lambda) + \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}} - 1\right)H'(\lambda)$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}} - 1\right)^2 H''(\lambda) + \cdots + \frac{\lambda^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}} - 1\right)^{\ell-1} H^{(\ell-1)}(\lambda)$$
$$+ O\left(\lambda^\ell\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}} - 1\right)^\ell H^{(\ell)}(\lambda_2)\right)\Bigg\},$$

et d'utiliser la dernière approximation de R sachant que le reste est de l'ordre en fait, de :

$$\frac{1}{m}{\lambda_2}^\ell H^{(\ell)}(\lambda_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}} - 1\right)^\ell = \frac{1}{m}O(R^\ell) = O\left(\frac{\log^\ell \lambda}{m^{\ell+1}}\right),$$

obtenu grâce au fait ${\lambda_2}^\ell H^{(\ell)}(\lambda_2) = O(1)$ provenant de (4.7), et à l'estimation (4.26) de R.

□

4.5. Estimation précise de $-\log B$.

Pour les grandes valeurs de m le résultat qui suit est très voisin de celui des petites valeurs de m (voir [9, lemme 3.4]), et est une application immédiate du lemme 4.2 :

Lemme 4.4. *On a pour tout $\ell \geq 0$, uniformément pour m vérifiant $\Gamma n^{\frac{1}{2}} \leq m \leq \dfrac{n}{\log^3 n}$,*

$$-\log B = \frac{3}{2}\log\sigma - \frac{1}{2}\log\left(\int_{\sigma m}^{+\infty} \frac{2x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\,dx\right) + \sigma r_1(\sigma m) + \cdots + \sigma^\ell r_\ell(\sigma m) + O\left(\sigma^{\ell+1}\right) \tag{4.27}$$

où $r_1, \cdots, r_\ell$ désignent des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{R}^+$ et dans $\mathcal{E}_{\frac{\log\Gamma}{2}}$. En particulier pour $\ell = 0$, nous avons :

$$-\log B = \frac{3}{2}\log\sigma - \frac{1}{2}\log\left(\int_{\sigma m}^{+\infty} \frac{2x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\,dx\right) + O\left(\frac{\log\lambda}{m}\right). \tag{4.28}$$

Remarque 2. La preuve qui suit nous procure au passage l'équivalent de B ; (4.28) implique quand n tend vers $+\infty$,

$$B^2 \sim \sigma^{-3}\left(\int_{\sigma m}^{+\infty} \frac{2x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\,dx\right);$$

donc pour tout λ fixé, $\lambda \geq \Gamma$, par la formule (4.20) procurant l'équivalent de σ et par le théorème des accroissements finis, on obtient

$$B^2 \sim \left(\frac{H(\lambda)}{m}\right)^{-3} \left(\int_{H(\lambda)}^{+\infty} \frac{2x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\, dx\right) .$$

Ainsi, lorsque $\lambda \to +\infty$, on obtient, puisque $H(\lambda) \sim 2\log\lambda$ et $e^{H(\lambda)} \sim \dfrac{\lambda^2}{2\log\lambda}$,

$$B^2 \sim \left(\frac{H(\lambda)}{m}\right)^{-3} \times 2H^2(\lambda)\exp(-H(\lambda)) \sim \frac{2m^3}{\lambda^2} = 2mn .$$

Démonstration du Lemme 4.4. Partons de la formule (4.3),

$$B^2 = 2\sum_{j=m}^{n} \frac{j^2 e^{\sigma j}}{(e^{\sigma j}-1)^2} = 2A(2,1) + 2A(2,2) .$$

On applique alors le lemme 4.2 pour $A(2,1)$ et $A(2,2)$: pour tout $k \geq 1$,

$$B^2 = \frac{1}{\sigma^3}\left[\int_{\sigma m}^{\infty} U_2 + \frac{\sigma}{2}U_2(\sigma m) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\sigma^{2j} U_2^{(2j-1)}(\sigma m) + O\Big(\sigma^{2k}\Big)\right]$$

où, pour tout t réel,

$$U_2(t) = 2U(2,1,t) + 2U(2,2,t) = \frac{2t^2 e^t}{(e^t-1)^2} . \tag{4.29}$$

Alors

$$-\log B = \frac{3}{2}\log\sigma - \frac{1}{2}\log\left(\int_{\sigma m}^{\infty} U_2\right) - \frac{1}{2}\log\left(1-X\right)$$

où $X = \sigma q_1(\sigma m) + \sigma^2 q_2(\sigma m) + \sigma^4 q_3(\sigma m) + \cdots + \sigma^{2k-2} q_k(\sigma m) + O\left(\sigma^{2k}\right)$ avec, si t est réel,

$$q_1(t) = -\frac{1}{\int_t^{+\infty} U_2} \frac{U_2(t)}{2} ,$$

et si $i \geq 2$,

$$q_i(t) = \frac{1}{\int_t^{+\infty} U_2} \frac{B_{2i-2}}{(2i-2)!} U_2^{(2i-3)}(t) .$$

Toutes les fonctions q_i sont bornées, car toutes les dérivées de U_2 ainsi que sa primitive $\int_t^{+\infty} U_2$ sont équivalentes en $+\infty$, au signe près, à $2t^2 e^{-t}$. Plus précisément, par des calculs élémentaires, on a les développements en série suivants :

$$
\begin{aligned}
& && U_2(t) = \sum_{n\geq 1} 2nt^2 e^{-nt} \\
&(4.30) && \int_t^{+\infty} U_2 = \sum_{n\geq 1} 2n(n^2t^2+2nt+2)e^{-nt} \\
& && U_2^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{n\geq 1} 2n\Big(n^k t^2 - 2kn^{k-1}t + k(k-1)n^{k-2}\Big)e^{-nt} \text{ si } k\geq 0 \\
& && \text{puis} \quad q_1(t) = -\frac{t^2}{2(t^2+2t+2)} + O(e^{-t}) \\
& && q_i(t) = -\frac{B_{2i-2}}{(2i-2)!}\, \frac{t^2-2(2i-3)t+(2i-3)(2i-4)}{t^2+2t+2} + O(e^{-t}) \,.
\end{aligned}
$$

On obtient alors le lemme puisque $-\log(1-X)$ a un développement du même type que celui de X car

$$X = O(\sigma) = O\left(\frac{H(\lambda)}{m}\right) = O\left(\frac{\log\lambda}{m}\right) ,$$

puis

$$-\frac{1}{2}\log(1-X) = \sigma r_1(\sigma m) + \cdots + \sigma^{2k-1} r_{2k-1}(\sigma m) + O(\sigma^{2k})$$

avec $r_1 = \frac{1}{2}q_1$, $r_2 = \frac{1}{4}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2$, $r_3 = \frac{1}{6}q_1^3 + \frac{1}{2}q_1q_2$, etc. On vérifie sans difficulté que les fonctions q_i et r_i, définies de la même façon que dans la preuve du lemme 3.4 de [9], sont bornées et analytiques sur $\mathbb{R}^+$, et appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}_{\frac{\log\Gamma}{2}}$ défini en 4.1. □

4.6. Estimation précise de $\sum_{j=m}^{n} -\log(1-e^{-\sigma j})$.

L'énoncé du lemme qui suit est plus simple que celui pour les petites valeurs de m.

Lemme 4.5. *On a pour tout $\ell \geq 0$, uniformément pour m vérifiant $\Gamma n^{\frac{1}{2}} \leq m \leq \dfrac{n}{\log^3 n}$,*

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{n} -\log\left(1-e^{-\sigma j}\right) = {} & \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma m}^{+\infty} -\log\left(1-e^{-x}\right)dx - \frac{1}{2}\log(1-e^{-\sigma m}) \\
& - \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{\ell}{2}\rfloor+1} \sigma^{2i-1}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\tilde{s}^{(2i-1)}(\sigma m) + O\left(\sigma^{\ell+1}\right) .
\end{aligned}
$$

où $\tilde{s} : x \mapsto -\log\left(1-e^{-x}\right)$ est une fonction analytique sur $\mathbb{R}_*^+$ dont toutes les dérivées sont bornées sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}_*^+$ et sont dans $\mathcal{E}_{\frac{\log\Gamma}{2}}$.

Démonstration. On a, pour x réel positif

$$\tilde{s}(x) = -\log(1-e^{-x}) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n} ,$$

de façon que pour tout $i \geq 0$

$$\tilde{s}^{(i)}(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^i n^{i-1}\, e^{-nx} ,$$

et par suite $\tilde{s}^{(i)}$ est intégrable sur $[\frac{\log\Gamma}{2}, +\infty[$. On applique alors la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin à la fonction $x \mapsto \tilde{s}(\sigma x)$ et de façon similaire à la démonstration du lemme 4.2, pour obtenir le résultat final, il suffit de vérifier que pour tous entiers i et k,

$$\tilde{s}^{(i)}(\sigma n) = O(\sigma^k) , \quad \int_{\sigma n}^{+\infty} \tilde{s} \ = O(\sigma^k) , \text{ et } \int_{\sigma m}^{\sigma n} |\tilde{s}^{(i)}| = O(1) . \tag{4.31}$$

Les équivalents en $+\infty$ des dérivées successives de $\tilde{s}$, ainsi que de sa primitive $\int_x^{+\infty} \tilde{s}$, sont e^{-x} au signe près. Ainsi la troisième équation de (4.31) est vérifiée puisque, par le lemme 4.1, $\sigma m \geq \log\Gamma$, et les deux premières équations le sont à la condition suffisante que pour tout entier $k \geq 0$:

$$\sigma^{-k} = O\left(e^{\sigma n}\right) ,$$

ce qui est le cas grâce à la condition $m \leq \dfrac{n}{\log^3 n}$ (voir (4.18)). □

4.7. Estimation de log Q.

Lemme 4.6. *On a pour tout $\ell \geq 0$, uniformément pour m vérifiant $\Gamma n^{\frac{1}{2}} \leq m \leq \dfrac{n}{\log^3 n}$,*

$$\log Q = \frac{m}{n}\tilde{t}_1(\lambda) + \left(\frac{m}{n}\right)^2 \tilde{t}_2(\lambda) + \cdots + \left(\frac{m}{n}\right)^\ell \tilde{t}_\ell(\lambda) + O\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\ell+1} \log^{3(\ell+1)} \lambda\right) \tag{4.32}$$

où $\tilde{t}_1,\ \tilde{t}_2,\ \ldots,\ \tilde{t}_\ell$ sont des fonctions bornées de $\mathcal{E}_\Gamma$.

Démonstration. Soit $\ell \geq 0$. Reprenons le théorème 4.1 et la formule (4.4) définissant Q. Q est, au reste E près, combinaison linéaire de termes de la forme $L_2^{-i} L_{h_1} L_{h_2} \ldots L_{h_t}$ avec

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_t = 2i \ \text{ et } \ h_j \geq 3 \ \text{ pour tout } j = 1, \ldots, t \tag{4.33}$$

où $L_h = \sum_{i=1}^{h} d(h,i)A(h,i)$ est défini dans le théorème 4.1. Or, par le lemme 4.2, pour tout $k \geq 1$,

$$L_h = \frac{1}{\sigma^{h+1}} \left[\int_{\sigma m}^{+\infty} U_h + \frac{\sigma}{2} U_h(\sigma m) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \sigma^{2j} U_h^{(2j-1)}(\sigma m) + O\left(\sigma^{2k}\right) \right]$$

avec $U_h : t \mapsto \sum_{i=1}^{h} d(h,i)U(h,i,t) = t^h \sum_{i=1}^{h} d(h,i) e^{-it}(1-e^{-t})^{-i}$. Par (4.11) et la formule de Leibniz, on a pour tout $j \geq 0$

$$U_h^{(j)}(t) = \sum_{n \geq 1} p_n^j(t) e^{-nt}$$

avec p_n^j polynôme de degré h. Il en est de même pour $t \mapsto \int_t^{+\infty} U_h$, et les premiers termes de cette série et de celle de U_h sont

$$U_h(t) = d(h,1)t^h e^{-t} + O(t^h e^{-2t}) = \frac{2^h}{h} t^h e^{-t} + O(t^h e^{-2t})$$

$$\int_t^{+\infty} U_h = \frac{2^h}{h}(t^h + ht^{h-1} + \cdots + h!)e^{-t} + O(t^h e^{-2t})$$

où la valeur de $d(h,1) = \frac{2^h}{h}$ provient de [10, (7.29)]. On obtient alors, comme dans la preuve du lemme 4.4, l'existence de $s_1, s_2, \ldots, s_\ell$ analytiques bornées sur $\mathbb{R}^+$, et de la forme $\sum_{n \geq 1} r_n(t)e^{-nt}$ avec r_n fraction rationnelle analytique sur $\mathbb{R}^+$ et dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur, telles que

$$L_h = \frac{\int_{\sigma m}^{+\infty} U_h}{\sigma^{h+1}} \left[1 + \sigma s_1(\sigma m) + \sigma^2 s_2(\sigma m) + \cdots + \sigma^\ell s_\ell(\sigma m) + O(\sigma^{\ell+1})\right] .$$

D'où, à l'aide de (4.33), l'existence de $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_\ell$ analytiques et bornées sur $\mathbb{R}^+$, du même type que les fonctions s_j, telles que,

$$L_2^{-i} L_{h_1} \ldots L_{h_t} = \sigma^{i-t} \frac{\int_{\sigma m}^{+\infty} U_{h_1} \cdots \int_{\sigma m}^{+\infty} U_{h_t}}{\left[\int_{\sigma m}^{+\infty} U_2\right]^i} \times \left[1 + \sigma \tilde{s}_1(\sigma m) + \cdots + \sigma^\ell \tilde{s}_\ell(\sigma m) + O(\sigma^{\ell+1})\right].$$

On en déduit

$$L_2^{-i} L_{h_1} \ldots L_{h_t} = \frac{2^i}{h_1! \ldots h_t!} (\sigma e^{\sigma m})^{i-t} \times \left[\hat{s}_0(\sigma m) + \sigma \hat{s}_1(\sigma m) + \cdots + \sigma^\ell \hat{s}_\ell(\sigma m) + O(\sigma^{\ell+1})\right] ,$$

avec $\hat{s}_0$ bornée sur $\mathbb{R}^+$, analytique sur $\mathbb{R}^+$, équivalente à 1 en l'infini et définie par :

$$\hat{s}_0(x) = \hat{s}_0(i,t,\underline{h};x) = \frac{h_1!\dots h_t!}{2^i}\, e^{x(t-i)}\, \frac{\int_x^{+\infty} U_{h_1} \cdots \int_x^{+\infty} U_{h_t}}{\left[\int_x^{+\infty} U_2\right]^i}\,,$$

et, pour $r \geq 1$, $\hat{s}_k(x) = \hat{s}_k(i,t,\underline{h};x) = \tilde{s}_k(x)/\hat{s}_0(x)$. Or $i-t$ est un entier plus grand que 1 (il suffit de regarder les conditions sur ces deux paramètres, en particulier (4.33)), et par (4.20) et (2.15)

$$\sigma e^{\sigma m} \sim \frac{1}{m}\, H(\lambda)e^{H(\lambda)} \sim \frac{\lambda^2}{m} \sim \frac{m}{n}\,.$$

Alors, en reprenant (4.4), et en choisissant $\kappa = 2\ell+3$ dans le théorème 4.1, on obtient (car la condition $\frac{2i-\kappa+2}{2} \leq t$ entraîne $i-t \leq \ell$) :

$$\text{(4.34)}\quad Q = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} (e^{\sigma m})^j \left[\sigma^j \hat{s}_{j,j}(\sigma m) + \cdots + \sigma^\ell \hat{s}_{\ell,j}(\sigma m) + O(\sigma^{\ell+1})\right] + O\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\ell+1} \log^{3(\ell+1)} \lambda\right)$$

avec, pour $j \leq k \leq \ell$

$$\hat{s}_{k,j} = \sum_{t=1}^{2\ell+1} (-1)^{j+t} \frac{(2t+2j-1)(2t+2j-3)\cdots 1}{t!} \times \sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots+h_t=2(j+t)\\ 3\leq h_1,\dots,\, h_t \leq 2\ell+3}} \frac{\hat{s}_{k-j}(j+t,t,\underline{h};x)}{h_1!\cdots h_t!}\,.$$

On voit donc que $\hat{s}_{k,j}$ est une fonction analytique bornée sur $\mathbb{R}^+$ et de la forme $\sum_{n\geq 1} r_n(t)e^{-nt}$ où r_n est une fraction rationnelle analytique sur $\mathbb{R}^+$ et dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur. Énonçons maintenant un lemme utile :

Lemme 4.7. *Soit $\Gamma > 1$ et $f \in \mathcal{E}_{\log\Gamma/2}$. On suppose que pour tout $j \geq 1$, $f^{(j)} = O_j(f')$. Alors, pour $m \geq \Gamma\sqrt{n}$, on peut écrire*

$$f(\sigma m) = f(H(\lambda)) + \sum_{j=1}^{\ell} f_j(\lambda)\xi^j + O\left(\xi^{\ell+1} \max_{(\sigma m, H(\lambda))} |f'|\right)$$

où $\xi = \dfrac{\log\lambda}{m}$, *et* $f_j \in \mathcal{E}_\Gamma$ *et* $f_j = O\left(\max_{(\sigma m,H(\lambda))} |f'|\right)$.

Démonstration. On utilise la formule (4.19) du lemme 4.3 donnant un développement asymptotique de σ et donc aussi de σm pour obtenir l'existence de $\phi_j \in \mathcal{E}_\Gamma$, bornées, telles que :

$$\sigma m - H(\lambda) = \sum_{j=1}^{\ell} \phi_j(\lambda)\xi^j + O(\xi^{\ell+1}),$$

où $\xi = \log\lambda/m$. On applique alors la formule de Taylor à l'ordre ℓ à la fonction f sur l'intervalle $(\sigma m, H(\lambda))$ qui est inclus dans $[\log\lambda/2, +\infty[$ si $2 \leq m \leq n/2$ (puisque le lemme 4.1 implique que $\sigma m \geq \log\lambda$ et $H(\lambda) \geq \frac{m-1}{m}\log\lambda$). Le lemme en découle en utilisant l'hypothèse $f^{(j)} = O(f')$ pour tout $j \geq 1$.

□

Remarque 3. Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = \sum_{n\geq d} r_n(x)e^{-nx}$, où r_n est une fraction rationnelle analytique sur $\mathbb{R}^+$. Il est facile de voir que $f'(x) = O(f)$ et par récurrence que $f^{(j)}(x) = O_j(f')$ pout tout $j \geq 1$.

Soit la fonction $\varphi : t \mapsto t^k e^{jt}\hat{s}_{k,j}(t)$ avec $\ell \geq k \geq j \geq 1$ et $\hat{s}_{k,j}$ l'une des fonctions (bornées sur $\mathbb{R}^+$) figurant dans (4.34). Par la remarque 3, on peut appliquer à φ le lemme 4.7. Comme, par le lemme 4.1, (2.12) et (2.15) on a

$$\max_{(\sigma m, H(\lambda))} |\varphi'| = O(H^k e^{jH}) = O\left(\log^k\lambda \left(\frac{\lambda^2}{\log\lambda}\right)^j\right) = O\left((\log\lambda)^{k-j}\lambda^{2j}\right),$$

on obtient

$$\varphi(\sigma m) = \sum_{g=0}^{\ell-k} \varphi_g(\lambda)\xi^g + O\left(\xi^{\ell+1-k}(\log\lambda)^{k-j}\lambda^{2j}\right),$$

avec $\varphi_g = O\left((\log\lambda)^{k-j}\lambda^{2j}\right)$ pour tout g. D'où

$$\begin{aligned}
(e^{\sigma m})^j \sigma^k \hat{s}_{k,j}(\sigma m) &= \frac{1}{m^k}\varphi(\sigma m) \\
&= \sum_{g=k}^{\ell} \frac{\xi^g}{(\log\lambda)^k}\varphi_{g-k}(\lambda) + O\left(\xi^{\ell+1}\left(\frac{\log\lambda}{\lambda^2}\right)^{-j}\right) \\
&= \sum_{g=k}^{\ell} \left(\frac{m}{n}\right)^g \left(\frac{\log\lambda}{\lambda^2}\right)^{g-j} b_g(\lambda) \\
&\qquad\qquad + O\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\ell+1}\left(\frac{\log\lambda}{\lambda^2}\right)^{\ell+1-j}\right),
\end{aligned}$$

la dernière égalité utilisant $\xi = \dfrac{\log\lambda}{m} = \dfrac{m}{n}\dfrac{\log\lambda}{\lambda^2}$, et introduisant les fonctions

$$b_g(\lambda) = \frac{\varphi_{g-k}(\lambda)}{(\log\lambda)^{k-j}\lambda^{2j}} = O(1)\,.$$

On reprend alors (4.34), et on applique le résultat ci-dessus à toutes les fonctions $\hat{s}_{k,j}$ pour obtenir

$$Q = 1+\frac{m}{n}\,\hat{q}_1(\lambda)+\left(\frac{m}{n}\right)^2\hat{q}_2(\lambda)+\cdots+\left(\frac{m}{n}\right)^\ell\hat{q}_\ell(\lambda)+O\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\ell+1}\log^{3(\ell+1)}\lambda\right)$$

avec $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots, \hat{q}_\ell$ des fonctions analytiques et bornées sur $[\Gamma, +\infty[$, et dans $\mathcal{E}_\Gamma$. On prend enfin le logarithme et on obtient le lemme.

$\square$

4.8. Démonstration du théorème 1.2.

Soit $\ell \geq 0$. À l'aide des lemmes 4.4, 4.5 appliqués à ce même ℓ, la formule (4.5) devient

$$\begin{aligned}\log r(n,m) = &-\frac{1}{2}\log\pi + \left[\sigma n + \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma m}^{+\infty} -\log(1-e^{-x})dx\right] \\ &+ \left[\frac{3}{2}\log\sigma - \frac{1}{2}\log(1-e^{-\sigma m}) - \frac{1}{2}\log\left(\int_{\sigma m}^{+\infty}\frac{2x^2e^x}{(e^x-1)^2}\,dx\right)\right] \\ &+ \sigma\tilde{z}_1(\sigma m) + \sigma^2\tilde{z}_2(\sigma m) + \cdots + \sigma^\ell\tilde{z}_\ell(\sigma m) + O\left(\sigma^{\ell+1}\right) + \log Q\ ,\end{aligned}$$

où les fonctions $\tilde{z}_i$ sont dans $\mathcal{E}_{\frac{\log\Gamma}{2}}$ et vérifient

$$\tilde{z}_i = r_i - \frac{B_{i+1}}{(i+1)!}\tilde{s}^{(i)} \tag{4.35}$$

si l'on se rappelle que $B_{2i+1} = 0$ si $i \geq 1$. Alors, si l'on pose pour tout réel t

$$v(t) = \frac{t}{\lambda} + \frac{\lambda}{t}\int_t^{+\infty} -\log(1-e^{-x})dx = \frac{t}{\lambda} + \lambda\log(1-e^{-t}) + \frac{\lambda}{t}F(t) \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}(t) = w(t) - \frac{1}{2}\log 2 = -\log\lambda + \frac{3}{2}\log t - \frac{1}{2}\log(1-e^{-t}) \\ - \frac{1}{2}\log\left(\int_t^{+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}\,dx\right),\end{aligned} \tag{4.37}$$

on obtient, après simplification des calculs,

$$\begin{aligned}\log r(n,m) = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi mn}} + \sqrt{n}v(\sigma m) + \tilde{w}(\sigma m) \\ + \sigma\tilde{z}_1(\sigma m) + \sigma^2\tilde{z}_2(\sigma m) + \cdots + \sigma^\ell\tilde{z}_\ell(\sigma m) + O\left(\sigma^{\ell+1}\right) + \log Q\ .\end{aligned} \tag{4.38}$$

On applique ensuite le lemme 4.7 aux fonctions v et $\tilde{w}$, dont on rappelle qu'elles ont été étudiées dans l'article [9], en particulier,

$$\begin{aligned} v(H(\lambda)) &= g(\lambda)\ , \\ v'(H(\lambda)) &= 0\ , \\ \tilde{w}(H(\lambda)) &= \tilde{g}_0(\lambda)\ . \end{aligned}$$

Les fonctions v et $\tilde{w}$ ont des développements en série de la forme $\sum_{n\geq 0} r_n(t)e^{-nt}$ (où r_n est une fraction rationnelle bornée) qui se dérivent termes à termes. Par la remarque 3, on voit ainsi que pour tout $i \geq 1$, $v^{(i)}(t) = O(v'(t))$. Plus précisément, pour tout $t \geq 0$,

$$v'(t) = \frac{1}{\lambda} - \lambda\,\frac{F(t)}{t^2} = \frac{1}{\lambda} - \lambda \sum_{n\geq 1} \frac{nt+1}{n^2t^2}\, e^{-nt}$$

et ainsi $v'(t) = O(1/\lambda - \lambda e^{-t}/t)$, puis par (2.15) et le lemme 4.1,

$$\max_{(\sigma m, H(\lambda))} |v'| = O\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{H(\lambda)e^{H(\lambda)}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ .$$

Ensuite, en utilisant (4.30), on voit que si t tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t) &= \left(-\log\lambda + \frac{t}{2} + \frac{\log t}{2}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right), \\ \tilde{w}'(t) &\sim \frac{1}{2} \ \text{ et} \\ \tilde{w}^{(i)}(t) &\sim \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{2\,t^i}\ \text{si } i \geq 2\ . \end{aligned}$$

On utilise enfin à nouveau le lemme 4.7 pour les fonctions $t \mapsto t^j\tilde{z}_j(t)$. On obtient alors le théorème en reprenant (4.38) et en utilisant le développement asymptotique de $\log Q$ obtenu dans le lemme 4.6.

Justifions pour conclure la relation (2.11) qui donne pour $i \geq 1$ l'expression des $\tilde{g}_i$ en fonction des g_i : fixons $\lambda \geq 2$. On a les développements asymptotiques (1.2) et (1.3) de $r(n,m)$ qui sont valables. On obtient donc, compte-tenu que $\frac{m}{n} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$,

$$\tilde{g}_0(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\lambda\tilde{g}_1(\lambda) + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{\ell}{2}}}\lambda^\ell\tilde{g}_\ell(\lambda) + O\left(\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n}}\right)^{\ell+1}\right) =$$
$$\log\frac{m!}{\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m} + g_0(\lambda) - \frac{\log 2}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\, g_1(\lambda) + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{\ell}{2}}}\, g_\ell(\lambda) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{\ell+1}{2}}}\right).$$

Or (formule de Stirling),

$$\log \frac{m!}{\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{B_{j+1}}{j(j+1)} \frac{1}{m^j} + O(m^{-(\ell+1)})$$
$$= \sum_{j=1}^{\ell} \frac{B_{j+1}}{j(j+1)\lambda^j} \frac{1}{n^{j/2}} + O(n^{-\frac{\ell+1}{2}}).$$

On obtient ainsi

$$\tilde{g}_0(\lambda) - \left(g_0(\lambda) - \frac{\log 2}{2}\right) + \sum_{j=1}^{\ell} \left(\lambda^j \tilde{g}_j(\lambda) - g_j(\lambda) - \frac{B_{j+1}}{j(j+1)\lambda^j}\right) \frac{1}{n^{j/2}}$$
$$= O\left(\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n}}\right)^{\ell+1}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{\ell}{2}+\frac{1}{4}}}\right).$$

Cette égalité implique que chaque coefficient de cette somme en $1/\sqrt{n}$ est nul ; on récupère alors l'égalité (2.11) pour $\lambda \geq 2$. Cette égalité est valable pour $\lambda \geq \Gamma > 1$ par prolongement analytique. Ceci termine la démonstration.

5. Démonstration du théorème 1.3

Pour $m > n/2$, on a $r(n, m) = 1$, et le théorème 1.3 est vérifié. Nous supposerons donc dans cette section que $m \leq n/2$. Rappelons que $P(n, t)$ est le nombre de partitions de n dont la plus grande part est égale à t, ou de façon équivalente, en considérant la partition conjuguée, le nombre de partitions de n en exactement t parts. On a l'encadrement suivant pour $P(n, t)$ (cf. [11] ou [2]) :

$$\text{(5.1)} \quad \frac{(n-t+1)^{t-1}}{t!(t-1)!} \leq \frac{1}{t!}\binom{n-1}{t-1} \leq P(n,t)$$
$$\leq \frac{1}{t!}\binom{n+\frac{t(t-1)}{2}-1}{t-1} \leq \frac{(n+\frac{t(t-1)}{2}-1)^{t-1}}{t!(t-1)!}.$$

On peut en déduire en particulier que

$$\text{(5.2)} \qquad \text{si } t = o(n^{1/3}), \text{ alors } P(n,t) = \frac{n^{t-1}}{t!(t-1)!}\left(1 + O\left(\frac{t^3}{n}\right)\right).$$

On a aussi la formule suivante pour $r(n, m)$:

$$\text{(5.3)} \qquad r(n,m) = \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} P\left(n-(m-1)t, t\right).$$

En effet, une partition de n en exactement t parts supérieures ou égales à m s'écrit

$$\begin{aligned} n &= i_1 + i_2 + \cdots + i_t \\ &= t(m-1) + (i_1 - (m-1)) + (i_2 - (m-1)) + \cdots + (i_t - (m-1)) \ , \end{aligned}$$

$m \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_t$, et le nombre maximum de parts supérieures ou égales à m pour partitioner n est $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$.
Nous allons utiliser (5.1) et (5.3) pour obtenir un encadrement de $r(n,m)$ suffisant pour démontrer le théorème 1.3. Commençons par une majoration de $r(n,m)$. On a, en utilisant (5.1) et (5.3) :

$$r(n,m) \leq \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{\left(n-(m-1)t+\frac{t(t-1)}{2}-1\right)^{t-1}}{t!(t-1)!} \ .$$

Ensuite, pour tout entier t compris entre 1 et $\dfrac{n}{m}$, on a, car $m \geq n^{2/3}$,

$$t + \frac{t(t-1)}{2} - 1 \leq t^2 \leq \frac{n^2}{m^2} \leq m \ ,$$

d'où, par un décalage d'indice :

$$r(n,m) \leq \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{(n-(t-1)m)^{t-1}}{t!(t-1)!} = 1 + \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1} \frac{(n-tm)^t}{(t+1)!t!} \ .$$

Maintenant on utilise la formule de Stirling sous la forme $t! \geq \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t$, pour obtenir pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{1}{(t+1)!\,t!} \leq \left(\frac{1}{t!}\right)^2 \leq \frac{1}{2\pi t}\left(\frac{e}{t}\right)^{2t} \leq \left(\frac{e}{t}\right)^{2t} \ ,$$

et en déduire

$$r(n,m) \leq \ 1 + \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1} \left(\frac{e^2}{t^2}(n-tm)\right)^t \ . \tag{5.4}$$

Nous allons ensuite utiliser le lemme suivant :

Lemme 5.1. *Il existe $t_0, 0 < t_0 < n/m$ tel que la fonction $\varphi : t \longmapsto \left(\frac{e^2}{t^2}(n-tm)\right)^t$ vaut 1 en 0, est croissante sur l'intervalle $[0, t_0]$, puis est décroissante sur l'intervalle $[t_0, \frac{n}{m}[$; et en posant $x = \dfrac{n}{n-t_0 m}$, on a :*

$$t_0 = \frac{n}{m}\left(1 - \frac{1}{x}\right) , x + \log x - 1 + 2\log\left(1-\frac{1}{x}\right) = \log\frac{m^2}{n} = 2\log\lambda. \tag{5.5}$$

De plus

$$t_0 \leq \frac{n}{m} - 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{n}{m} \Leftrightarrow m \leq m_0, \tag{5.6}$$

où m_0 *est défini par* $1 \leq m_0 \leq n$ *et* $\log \frac{{m_0}^3}{(n-m_0)^2} = \frac{n}{m_0} - 1$, *et vérifie* $m_0 = \frac{n}{\log n - 3\log\log n + 1 + o(1)}$. *Enfin*

$$\varphi(\lfloor t_0 \rfloor) \geq \varphi(t_0) \exp\left(-\frac{m \log^2 n}{2n}(1 + O(1/\log n)) \right) .$$

Démonstration. En effet, si $t \in]0, \frac{n}{m}[$, on a en posant $\Phi(t) = \log \varphi(t)$:

$$\Phi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \log \frac{n - mt}{t^2} - \frac{mt}{n - mt} ,$$

$$\Phi''(t) = \frac{\varphi''\varphi - \varphi'^2}{\varphi^2}(t) = \frac{-m^2t^2 + 2nmt - 2n^2}{t(n - tm)^2} = -\frac{1}{t}\left[1 + \left(\frac{n}{n - mt}\right)^2\right] < 0,$$

ainsi $\Phi = \log \varphi$ est concave sur $]0, \frac{n}{m}[$, et par ailleurs t_0 annule la dérivée de φ si et seulement si $\log \frac{n - mt_0}{t_0^2} = \frac{1}{\frac{n}{mt_0} - 1} (= x - 1)$, relation équivalente à (5.5).

On vérifie que x est défini implicitement dans (5.5) comme une fonction croissante de λ, tend vers l'infini avec λ et possède le développement asymptotique suivant si n tend vers $+\infty$:

$$x = \log \lambda^2 - \log(\log \lambda^2) + 1 + o(1) . \tag{5.7}$$

Lorsque $\lambda \to +\infty$, ce développement est obtenu par itération dans $x = 2\log \lambda - \log x + 1 - 2\log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Notons que le développement (5.7) est encore valide quand n tend vers $+\infty$ car les inégalités $n^{2/3} \leq m \leq n$ entraînent que $n^{1/6} \leq \lambda \leq n^{1/2}$ et $\log \lambda \asymp \log n$.

Ensuite, en reprenant (5.5), on a

$$t_0 = \frac{n}{m} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n}{m} \\ x + \log x - 1 + 2\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \log \frac{m^2}{n} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{n}{x} \\ x = \log n - 3\log x + 1 - 2\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

La dernière équivalence procure de façon itérative le développement asymptotique $x = \log n - 3\log\log n + 1 + o(1)$, et démontre (5.6). Pour terminer évaluons $\varphi(\lfloor t_0 \rfloor)$. Puisque $\Phi'(t_0) = 0$, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\Phi(\lfloor t_0 \rfloor) - \Phi(t_0) = \int_{t_0}^{\lfloor t_0 \rfloor} (\lfloor t_0 \rfloor - u)\Phi''(u)du . \tag{5.8}$$

Or le développement (5.7) de x donne pour n assez grand (qu'on peut calculer) :

$$\frac{1}{6}\log n \leq \log\lambda \leq x \leq 2\log\lambda \leq \log n \ . \tag{5.9}$$

D'autre part, un calcul simple montre que la fonction $t \mapsto -\Phi''(t)$ est décroissante pour $\frac{n}{2m} \leq t < \frac{n}{m}$ puisque

$$-\Phi'''(t) = \frac{-2n^3 + 6n^2mt - 3nm^2t^2 + m^3t^3}{t^2(n-tm)^3} \ ,$$

et donc

$$-\Phi'''(\tau\frac{n}{m}) = \frac{m^2}{n^2}\frac{\tau^3 - 3\tau^2 + 6\tau - 2}{\tau^2(1-\tau)^3} < 0 \text{ si } 0,41 < \tau < 1 \ .$$

Or, comme $t_0 \sim \frac{n}{m}$ et $m \leq n/2$, pour n assez grand on a $[\lfloor t_0\rfloor, t_0] \subset [\frac{n}{2m}, \frac{n}{m}]$, et par conséquent, en reprenant (5.8),

$$\begin{aligned}\Phi(\lfloor t_0\rfloor) - \Phi(t_0) \geq \frac{\Phi''(\lfloor t_0\rfloor)}{2} &= -\frac{1}{2\lfloor t_0\rfloor}\left(1 + \frac{n^2}{(n-\lfloor t_0\rfloor m)^2}\right) \\ \geq -\frac{1}{2\lfloor t_0\rfloor}\left(1 + \frac{n^2}{(n-t_0m)^2}\right) &= -\frac{1}{2\lfloor t_0\rfloor}(1+x^2) \\ &\geq -\frac{1}{2(t_0-1)}(1+x^2) = -\frac{m}{2n}\frac{1+x^2}{1-\frac{1}{x}-\frac{m}{n}} \ ,\end{aligned}$$

d'où, grâce à (5.9),

$$\Phi(\lfloor t_0\rfloor) - \Phi(t_0) \geq -\frac{m}{2n}\frac{1+\log^2 n}{1-\frac{6}{\log n}-\frac{m}{n}} \ ,$$

soit, car $\Phi = \log\varphi$, pour $m \leq m_0 \sim \dfrac{n}{\log n}$,

$$\varphi(\lfloor t_0\rfloor) \geq \varphi(t_0)\exp\left(-\frac{m\log^2 n}{2n}(1+O(1/\log n))\right) \ ,$$

ce qui est le résultat escompté. □

Ainsi, en reprenant (5.4),

$$r(n,m) \leq \sum_{t=0}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-1}\varphi(t) \leq \frac{n}{m}\varphi(t_0) \ . \tag{5.10}$$

Or en utilisant les définitions de φ et de t_0 puis (5.5), on a

$$\begin{aligned}(5.11)\quad \varphi(t_0) &= \exp\left(t_0\left(2+\log\frac{n-mt_0}{t_0^2}\right)\right) = \exp\left(t_0\left(2+\frac{mt_0}{n-mt_0}\right)\right)\\ &= \exp(t_0(2+(x-1))) = \exp(t_0(1+x)) = \exp\left(\frac{n}{m}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

D'où, en reprenant (5.10),

$$r(n,m) \le \frac{n}{m}\exp\left(\frac{n}{m}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right). \tag{5.12}$$

Utilisons le lemme suivant qui donne un développement asymptotique de $x - 1/x$:

Lemme 5.2. *Uniformément pour $m \le n$ et $\lambda = m/\sqrt{n}$ tendant vers l'infini, x défini par* (5.5) *vérifie*

$$x = 1 + H(\lambda) + O\left(\frac{\log\lambda}{\lambda^2}\right), \tag{5.13}$$

$$x - \frac{1}{x} = \lambda g(\lambda) + O\left(\frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right). \tag{5.14}$$

Démonstration. Par (5.5), $y = x - 1$ est défini implicitement comme une fonction $y = \hat{H}(\lambda)$ par :

$$y = 2\log\lambda - \log y + \log\left(1+\frac{1}{y}\right). \tag{5.15}$$

$y = \hat{H}(\lambda)$ est aussi défini implicitement par

$$\frac{y^2}{\lambda^2} = \frac{\hat{H}(\lambda)^2}{\lambda^2} = \hat{F}(y) \overset{\text{déf}}{=} \int_y^{+\infty} te^{-t}\,dt = (y+1)e^{-y}, \tag{5.16}$$

équation très voisine de (2.2) et qui montre que $y = \hat{H}(\lambda)$ admet le même développement asymptotique (2.12) que $H(\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$. En posant $z = H(\lambda)$ (on a donc $y - z = o(1)$) on déduit de (2.2) et de (5.16) que

$$0 = \frac{\hat{F}(y)}{y^2} - \frac{F(z)}{z^2} = \left(\frac{\hat{F}(y)}{y^2} - \frac{\hat{F}(z)}{z^2}\right) + \left(\frac{\hat{F}(z)}{z^2} - \frac{F(z)}{z^2}\right).$$

Par application du théorème des accroissements finis, la première parenthèse est équivalente à $\dfrac{z-y}{ze^z}$ tandis que la seconde vaut $-\dfrac{1}{z^2}\displaystyle\int_z^{\infty}\frac{t}{e^t(e^t-1)}\,dt \sim -\dfrac{1}{2ze^{2z}}$, d'où $z - y \sim \dfrac{1}{2}e^{-z} = \dfrac{1}{2}e^{-H(\lambda)} \sim \dfrac{\log\lambda}{\lambda^2}$ par (2.16), ce qui démontre (5.13). Un résultat similaire est démontré dans [8, lemme 7.15].

Pour la preuve de (5.14) reprenons la définition (2.3) de g, et utilisons (2.12), (2.16) et (5.13) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\lambda g(\lambda) &= 2H(\lambda) - \lambda^2 e^{-H(\lambda)} + O\left(\lambda^2 e^{-2H(\lambda)}\right)\\ &= \left(2y + O\left(\frac{\log\lambda}{\lambda^2}\right)\right) - \lambda^2\left(e^{-y} + O\left(\frac{\log^2\lambda}{\lambda^4}\right)\right) \text{ par (2.16) et (5.13)}\\ &= 2y - \frac{y^2}{y+1} + O\left(\frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right) \text{ par (5.15)}\\ &= y + 1 - \frac{1}{y+1} + O\left(\frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right)\\ &= x - \frac{1}{x} + O\left(\frac{\log^2\lambda}{\lambda^2}\right).\end{aligned}$$

□

De (5.12) et (5.14), il découle

$$r(n,m) \le \exp\left(\sqrt{n}g(\lambda) + O\left(\frac{n^2}{m^3}\log^2\lambda\right) + \log(n/m)\right).$$

Cette majoration est valable pour tout m mais on peut l'améliorer si $m \ge m_0$. En effet on a alors, en utilisant le lemme 5.1, $t_0 \ge \frac{n}{m} - 1 \ge \lfloor\frac{n}{m}\rfloor - 1$, et en reprenant (5.10), on obtient :

$$r(n,m) \le \frac{n}{m}\varphi\left(\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor - 1\right). \tag{5.17}$$

De plus, si l'on note $\theta = \frac{n}{m} - \lfloor\frac{n}{m}\rfloor + 1 \in [1,2[$ et $\xi = 1 - \frac{m}{n}\left(\lfloor\frac{n}{m}\rfloor - 1\right) = \theta\frac{m}{n} \in [0,1]$ (car $m \le n/2$), on a

$$\begin{aligned}\varphi\left(\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor - 1\right) &= \left(\left(\frac{e^2(n-mt)}{t^2}\right)^t\right)_{t=\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-1}\\ &= \left(\frac{e^2\theta m}{\left(\frac{n}{m}-\theta\right)^2}\right)^{\lfloor n/m\rfloor-1}\\ &= \left(\frac{e^2\theta m^3}{n^2}\right)^{\lfloor n/m\rfloor-1}\left(1-\theta\frac{m}{n}\right)^{-2\theta\left(\frac{n}{m\theta}-1\right)}\\ &= \left(\frac{e^2\theta m^3}{n^2}\right)^{\lfloor n/m\rfloor-1}\exp\left(2\theta\frac{\xi-1}{\xi}\log(1-\xi)\right),\end{aligned}$$

d'où, puisque la fonction $\xi \mapsto e^{-2\frac{1-\xi}{\xi}\log(1-\xi)}$ est décroissante sur $[0,1]$,

$$\left(\frac{e^2\theta m^3}{n^2}\right)^{\lfloor n/m\rfloor-1} \le \varphi\left(\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor - 1\right) \le e^{2\theta}\left(\frac{e^2\theta m^3}{n^2}\right)^{\lfloor n/m\rfloor-1}. \tag{5.18}$$

Ainsi, en reprenant (5.17), si $m \geq m_0$

$$r(n,m) \leq \frac{n}{m}\, e^{2\theta} \left(\frac{e^2\theta m^3}{n^2}\right)^{\lfloor n/m \rfloor - 1}, \tag{5.19}$$

ce qui donne la majoration dans (1.4).
Regardons maintenant la minoration. On a d'après (5.1) et (5.3) :

$$r(n,m) \geq 1 + \sum_{t=2}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{(n-tm+1)^{t-1}}{t!(t-1)!}\,.$$

Maintenant, on utilise l'inégalité $t! \leq e^{1/12}\sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t$ valable pour $t \geq 1$ pour obtenir pour tout $t \geq 2$

$$\frac{1}{t!(t-1)!} = t\,\left(\frac{1}{t!}\right)^2 \geq \frac{e^{-1/6}}{2\pi}\left(\frac{e}{t}\right)^{2t},$$

et en déduire, avec $K = \frac{e^{-1/6}}{2\pi}$,

$$\begin{aligned} r(n,m) \geq\ & 1 + \sum_{t=2}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{K}{n-tm+1}\left(\frac{e^2}{t^2}(n-tm)\right)^t \\ & \geq\ \frac{K}{n}\sum_{t=2}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}\left(\frac{e^2}{t^2}(n-tm)\right)^t. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Soit $m \leq m_0$, ce qui implique $t_0 \leq \frac{n}{m} - 1 \leq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$; en reprenant la fonction φ, et en utilisant le lemme 5.1 et (5.11), il vient

$$\begin{aligned} r(n,m) \geq\ & \frac{K}{n}\,\varphi(\lfloor t_0 \rfloor) \geq \frac{K}{n}\,\varphi(t_0)\exp\left(-\frac{m\log^2 n}{2n}(1+O(1/\log n))\right) \\ &= \frac{K}{n}\,\exp\left(\frac{n}{m}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)\exp\left(-\frac{m\log^2 n}{2n}(1+O(1/\log n))\right), \end{aligned}$$

qui, par (5.14), donne

$$\begin{aligned} r(n,m) \geq \exp\Bigg(&\sqrt{n}g(\lambda) + O\left(\frac{n^2\log^2\lambda}{m^3}\right) \\ & - \log n - \frac{m\log^2 n}{2n} + O\left(\frac{m}{n}\,\log n\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Pour $m \geq m_0$, en reprenant la première inégalité de (5.20), on a

$$r(n,m) \geq \frac{K}{n - (\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1)m + 1}\,\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1\right) \geq \frac{K}{2m}\,\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1\right),$$

soit, en utilisant la première inégalité de (5.18),

$$r(n,m) \geq \frac{K}{2m}\left(\frac{e^2\theta m^3}{n^2}\right)^{\lfloor n/m\rfloor -1}, \tag{5.22}$$

ce qui démontre la minoration dans (1.4). Ainsi (5.12) et (5.21) démontrent la première partie du théorème, alors que (5.19) et (5.22) valables pour $m \geq m_0$, avec $K = \frac{e^{-1/6}}{2\pi}$ et $\theta = \frac{n}{m} - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1 \in [1,2[$, démontrent la deuxième partie, c'est-à-dire (1.4).

6. Conclusion

Le tableau ci-après donne pour certaines suites $m(n)$ les équivalents de $r(n,m(n))$ et les premiers termes du développement asymptotique de $\log r(n,m(n))$. Détaillons les équivalents de $r(n,m)$ obtenus à l'aide du théorème 1.1 :

$$m(n) \text{ constant } \Rightarrow r(n,m) \sim \frac{e^{2c\sqrt{n}}}{4\sqrt{3}n}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{m-1}(m-1)!\,,$$

$$\left\{\begin{array}{l} m(n) = o(\sqrt{n}) \\ m(n) \to +\infty \end{array}\right. \Rightarrow r(n,m(n)) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi m(n) n}} \exp(\sqrt{n}g(m(n)/\sqrt{n}))\,,$$

$$m(n) \asymp \sqrt{n} \Rightarrow r(n,m(n)) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi m(n) n}} \exp\left(\sqrt{n}g\left(\frac{m(n)}{\sqrt{n}}\right) + g_0\left(\frac{m(n)}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

notant que $g(x) - x\log x$ est analytique en 0 et que l'on connaît ses coefficients de Taylor (voir la section 2) ; les fonctions g et g_0 sont connues et quelques valeurs de ces fonctions sont données dans [9], en particulier $g(1)$, $g_0(1)$, $g(3)$ et $g_0(3)$ qui sont utilisées dans le tableau. Pour les grandes valeurs de m, si $\sqrt{n} = o(m(n))$ et $m(n) = o(\frac{n}{\log^3 n})$, alors en vertu du théorème 1.2 :

$$r(n,m(n)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m(n) n}} \exp\left(\sqrt{n}g\left(\frac{m(n)}{\sqrt{n}}\right)\right)\,; \tag{6.1}$$

Le développement asymptotique de g en l'infini est donné en (2.13) (en particulier $g(x) \sim 2\log x/x$). Cela nous permet d'obtenir les équivalents de $\log r(n,m(n))$ (voir page suivante).

Il est clair que le développement asymptotique obtenu pour $r(n,m)$ n'a pas un reste suffisamment précis au point d'obtenir un calcul exact de $r(n,m)$; ainsi pour $m = 1$ le développement de $r(n,1) = p(n)$ est moins précis que celui de Hardy et Ramanujan ; aussi on peut se demander si une approche à la "Rademacher" est possible pour $r(n,m)$. Cela semble toutefois compliqué car on ne retrouve pas les propriétés de modularité de la série génératrice associée, comme cela peut être le cas pour $p(n)$.

$r(n,m(n))$	équivalents de $r(n,m(n))$	premier(s) terme(s) de $\log r(n,m(n))$
$r(n,1)$	$\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\,\dfrac{e^{2c\sqrt{n}}}{n}$	$2c\sqrt{n}-\log n$ $\simeq 2,565\sqrt{n}-\log n$
$r(n,2)$	$\dfrac{\pi}{12\sqrt{2}}\,\dfrac{e^{2c\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$	$2c\sqrt{n}-\dfrac{3}{2}\log n$
$r(n,3)$	$\dfrac{\pi^2}{12\sqrt{3}}\,\dfrac{e^{2c\sqrt{n}}}{n^2}$	$2c\sqrt{n}-2\log n$
$r(n,n^{1/4})$	$\dfrac{e^{2c\sqrt{n}-\frac{n^{\frac14}}{4}\log n+(\log c-1)n^{\frac14}}}{2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{c+1/c}{4}}\,n^{5/8}}$	$2c\sqrt{n}-\dfrac{1}{4}\,n^{1/4}\log n$
$r(n,3n^{1/4})$	$\dfrac{1}{2\sqrt{3\pi}}\,\dfrac{e^{\sqrt{n}g(3n^{-1/4})}}{n^{5/8}}$	$2c\sqrt{n}-\dfrac{1}{3^{1/4}.4}\,n^{1/4}\log n$
$r(n,\frac{n^{1/2}}{\log n})$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\dfrac{e^{\sqrt{n}g(1/\log n)}}{n^{3/4}(\log n)^{-1/2}}$	$2c\sqrt{n}-\sqrt{n}\,\dfrac{\log(\log n)}{\log n}$
$r(n,n^{1/2})$	$\dfrac{e^{g_0(1)}}{2\sqrt{\pi}}\,\dfrac{e^{\sqrt{n}g(1)}}{n^{3/4}}$	$g(1)\sqrt{n}\simeq 1,405\sqrt{n}$
$r(n,3n^{1/2})$	$\dfrac{e^{g_0(3)}}{2\sqrt{3\pi}}\,\dfrac{e^{\sqrt{n}g(3)}}{n^{3/4}}$	$g(3)\sqrt{n}\simeq 0,877\sqrt{n}$
$r(n,n^{0,6})$	comme en (6.1)	$0,2\ \log n\times n^{0,4}$
$r(n,3n^{0,6})$	comme en (6.1)	$\dfrac{0,2}{3}\ \log n\times n^{0,4}$
$r(n,n^{0,7})$	comme en (6.1)	$0,4\ \log n\times n^{0,3}$
$r(n,3n^{0,7})$	comme en (6.1)	$\dfrac{0,4}{3}\ \log n\times n^{0,3}$
$r(n,n^{0,8})$	comme en (6.1)	$0,6\ \log n\times n^{0,2}$
$r(n,3n^{0,8})$	comme en (6.1)	$0,2\ \log n\times n^{0,2}$
$r(n,n^{0,9})$	comme en (6.1)	$0,8\ \log n\times n^{0,1}$
$r(n,\dfrac{n}{\log^4 n})$	comme en (6.1)	$\log^5 n$
$r(n,\dfrac{n}{\log n})$	voir le théorème 1.3	$\log^2 n$
$r(n,\dfrac{n}{\log^{1/2} n})$	voir le théorème 1.3	$\log^{3/2} n$
$r(n,\dfrac{n}{2}-\log n)$	$\log n$ (voir (1.5))	$\log\log n$

Au sujet de la log-concavité de la suite $R(n,m)$ en m, il serait intéressant de trouver le rang exact m_0 à partir duquel la suite n'est plus log-convexe. Ce rang semble être plus petit que toute fonction linéaire de n comme l'attestent les résultats numériques mentionnés dans la section 3, mais il est plus grand que $n^{1-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon>0$ d'après le corollaire 3.2.

Enfin on peut regarder les partitions de n en parts distinctes plus grandes que m. Les mêmes techniques s'opèrent et on obtient des résultats semblables. Toutefois les fonctions intervenant en lieu et place de g, g_0, H se comportent différemment aux bornes de leur domaine de définition et les détails de calcul sont indispensables. Aussi cela fera l'objet d'un prochain article.

Je remercie Jean-Louis Nicolas, András Sárközy et Bruno Salvy pour leur collaboration qui a été fort précieuse. Je remercie également l'arbitre de l'article pour ses conseils très utiles.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle. (Théorie élémentaire).* Hermann et Cie., Paris, 1951.

[2] L. Comtet, *Analyse combinatoire. Tomes I, II.* Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[3] J. Dixmier, J.L. Nicolas, *Partitions sans petits sommants.* A tribute to Paul Erdős, 121–152. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[4] J. Dixmier, J.L. Nicolas, *Partitions without small parts.* Number theory, Vol. **I** (Budapest, 1987), 9–33, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[5] P. Erdős, J.L. Nicolas, M. Szalay, *Partitions into parts which are unequal and large.* Number theory (Ulm, 1987), Lecture Notes in Math., volume **1380**, 19–30, Springer, New York, 1989.

[6] G. Freiman, J. Pitman, *Partitions into distinct large parts.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **57(3)** (1994), 386–416.

[7] G. H. Hardy, *Orders of infinity. The Infinitärcalcül of Paul du Bois-Reymond.* Hafner Publishing Co., New York, 1971.

[8] É. Mosaki, *Partitions sans petits sommants.* Thèse de l'Université Lyon 1 .

[9] É. Mosaki, J.-L. Nicolas, A. Sárközy, *Partitions sans petites parts.* J. de Théorie des Nombres de Bordeaux **16** (2004), 607–638.

[10] J.-L. Nicolas, A. Sárközy, *On partitions without small parts.* J. de Théorie des Nombres de Bordeaux **12** (2000), 227–254.

[11] G. Szekeres, *An asymptotic formula in the theory of partitions.* Quart. J. Math., Oxford **2** (1951), 85–108.

[12] G. Szekeres, *Some asymptotic formulae in the theory of partitions. II.* Quart. J. Math., Oxford **4** (1953), 96–111.

Élie Mosaki
Université de Lyon ;
Université Lyon 1 ;
INSA de Lyon F-69621 ;
Ecole Centrale de Lyon ;
CNRS, UMR 5208, Institut Camille Jordan,
43 blvd du 11 novembre,
F-69622 Villeurbanne-Cedex, France
E-mail: `mosaki@math.univ-lyon1.fr`