JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

Régis DE LA BRETÈCHE

**Fonctions zêta des hauteurs**

Tome 21, n$^{o}$ 1 (2009), p. 77-95.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2009__21_1_77_0>

*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **21** (2009), 77-95

# Fonctions zêta des hauteurs

par Régis DE LA BRETÈCHE

Résumé. Ce papier présente les récents progrès concernant les fonctions zêta des hauteurs associées à la conjecture de Manin. En particulier, des exemples où on peut prouver un prolongement méromorphe de ces fonctions sont détaillés.

Abstract. The paper surveys recent progress towards the Height zeta functions related to the Manin's conjecture. In particular, it details some cases where one can prove meromorphic continuation of these functions.

## 1. Introduction

Le but de cette présentation est d'exposer les récents progrès concernant les propriétés analytiques de certaines séries de Dirichlet apparaissant dans des problèmes de comptages de points rationnels sur des variétés algébriques.

Au début des années 90 ([30], [2], [39]), Manin et certains de ses collaborateurs ont lancé un programme en vue de comprendre le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur certaines classes de variétés algébriques. Lorsque $V$ est une variété algébrique projective sur $k$ un corps de nombres et que les points $k$-rationnels sont denses dans $V$ pour la topologie de Zariski, alors il est naturel de munir $V$ d'une hauteur $H : V(k) \to \mathbb{R}_{>0}$ et d'étudier le comportement asymptotique de

$$N_{U,H}(B) := \mathrm{card}\{P \in U(k) : \quad H(P) \leqslant B\},$$

lorsque $U$ est un ouvert de $V$.

Prenons un exemple si $k = \mathbb{Q}$, la hauteur classique $H_N : \mathbb{P}^N(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}_{>0}$ est définie par $H_N(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ où $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{N+1}$ non nul tel que pgcd $x_i = 1$ et $\|\,.\,\|$ est une norme de $\mathbb{R}^{N+1}$. Souvent, la norme choisie est la norme infinie $\|\,.\,\|_\infty := \max\{|x_i|\}$, mais il peut être intéressant voire utile de considérer d'autres normes de $\mathbb{R}^{N+1}$. Lorsque $V$ est une variété sur $\mathbb{Q}$ et $\Phi$ est un plongement de $V$ dans $\mathbb{P}^N$, on définit une hauteur $H$ à partir de $H_N$ et de $\Phi$ par $H = H_N \circ \Phi$.

*Mots clefs.* Height zeta function, Manin's Conjecture, Cubic surfaces, Natural Boundary.

Dans tous les cas connus par l'auteur, si $U(k)$ n'est pas vide, le comportement asymptotique de ce cardinal est donné, lorsque $B$ tend vers $+\infty$, par

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a(\log B)^{b-1}, \tag{1.1}$$

où $C \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ et $b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $b \geqslant 1$.

Le choix de $U$ est important : en effet, si on considère une surface cubique qui contient des droites, ces droites vont contenir beaucoup de points rationnels et il apparaît que ce sont les points rationnels à l'extérieur de ces droites qui cachent des phénomènes beaucoup plus subtils. L'intérêt de ce problème est que pourvu que $U$ soit choisi de manière pertinente, le terme principal attendu fait apparaître des invariants et des propriétés géométriques de $V$.

Peyre [40], [41], Batyrev & Tschinkel [6] et Salberger [45] ont précisé et étendu les conjectures de Manin pour énoncer une conjecture générale concernant les valeurs de $a$, $b$ et $C$ concernant une large classe de variétés $V$. Nous ne donnons pas plus de détails concernant les variétés pour lesquelles il est pertinent de faire cette conjecture mais notons qu'il faut que $V(k)$ soit dense dans $V$. Nous renvoyons le lecteur aux nombreux articles de présentation concernant la conjecture de Manin ([42], [43], [44], [18], [55], [26]). Un des aspects les plus excitants de cette théorie est de montrer la conjecture de Manin sur des exemples ou classes d'exemples pour étayer ces conjectures notamment celles qui concernent la valeur de $C$. Un autre aspect qui ne sera pas développé ici est d'étendre ces conjectures à d'autres classes de variétés. Nous nous concentrons sur un troisième aspect qui concerne l'existence de formules plus précises qu'un équivalent. Avec une bonne normalisation de la hauteur et pour une large classe de variétés, on s'attend à une formule plus précise de la forme

$$N_{U,H}(B) = BP(\log B) + O(B^\delta), \tag{1.2}$$

avec $\delta < 1$ et $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

En théorie analytique des nombres, un des outils fondamentaux pour estimer asymptotiquement une fonction de comptage est la série de Dirichlet associée définie ici par

$$Z_{U,H}(s) := \sum_{P \in U(k)} \frac{1}{H(P)^s},$$

lorsque $s$ est de partie réelle suffisamment grande. Dans la littérature, cette fonction est appelée fonction zêta des hauteurs. La ressemblance apparente avec la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\Re e\, s > 1)$$

est claire : il reste à voir si cette appelation est justifiée. Historiquement, à notre connaissance, c'est Arakelov [1] qui le premier a introduit cet objet (voir aussi [30]). Comme l'a souligné du Sautoy [46], on attendrait d'une fonction zêta qu'elle ait le plus de propriétés en commun avec la fonction zêta de Riemann dont on peut faire la liste :

(i) $\zeta$ s'écrit comme une série de Dirichlet ;
(ii) $\zeta$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ ;
(iii) $\zeta$ admet un unique pôle en $s = 1$ ;
(iv) $\zeta$ satisfait une équation fonctionnelle ;
(v) $\zeta$ s'écrit sous forme de produit eulérien lorsque $\Re e\, s > 1$.

En fait, en général, elle ne vérifie aucune de ces propriétés exceptées la première. Cependant, c'est un outil très utile et sans aucun doute incontournable. Alors que la conjecture de Manin a fait l'objet de nombreux survols de qualité, la littérature concernant des présentations synthétiques de ces fonctions est moins complète compte-tenu des progrès spectaculaires récemment obtenus.

Nous nous restreignons au cas $k = \mathbb{Q}$ et nous présentons plus particulièrement les résultats contenus dans [16], [12], [13] et [14].

C'est un plaisir de remercier Tim Browning pour la relecture attentive de ce manuscrit.

## 2. Liens entre le comportement asymptotique de $N_{U,H}(B)$ et les propriétés analytiques de $Z_{U,H}(s)$

Nous commençons par faire une présentation comparative des propriétés de $N$ et de $Z$. Nous n'indiquons plus la dépendance en l'ouvert $U$ et la hauteur $H$.

Lorsque la partie réelle de $s$ est suffisamment grande, nous avons la formule

$$Z(s) = s\int_1^{+\infty} t^{-s-1} N(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Lorsque $N$ vérifie une estimation du type (1.2) avec un polynôme $P$ de degré $r$ et de coefficient dominant $C > 0$, alors $Z$ admet un prolongement méromorphe à gauche de $s = 1$ dans le demi-plan $\Re e\, s > \delta$ avec un seul pôle en $s = 1$ d'ordre $r + 1$. On a de plus au voisinage de 1 l'équivalent

$$Z(s) \sim C\frac{r!}{(s-1)^{r+1}}.$$

Réciproquement si $Z$ admet un prolongement méromorphe à gauche de $s = 1$ dans le demi-plan $\Re e\, s > \theta$ avec un seul pôle en $s = 1$ d'ordre $r+1$, une formule asymptotique de la forme (1.2) est vraie avec un exposant $\delta = \delta(\theta)$ qui dépend de la taille des majorations de $Z$ sur les droites verticales. Ainsi, on peut prétendre que les propriétés de $Z$ sont plus intrinsèques que celle de $N$. Pour expliquer notre propos, prenons un exemple. Dans le problème dit des diviseurs, le meilleur exposant connu dans la formule

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=x(\log x+2\gamma-1)+O(x^\delta),$$

où $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs de $n$ et $\gamma$ est la constante d'Euler, est dû à Huxley [35] qui montre cette formule pour tout $\delta>\frac{64}{205}$ (amélioration notamment du fameux $\frac{7}{22}$ de Iwaniec et Mozzochi [37]). Il est conjecturé que $\frac{64}{205}$ peut être remplacé par $\frac{1}{4}$ et il est possible de montrer que cette formule est fausse pour $\delta<\frac{1}{4}$. En revanche, les propriétés analytiques de $\zeta(s)^2$, la série de Dirichlet associée à ce problème, sont bien connues. Sur cet exemple, on constate qu'il est plus facile d'obtenir des résultats définitifs sur $Z$ que sur $N$. Cependant, cela peut être considéré comme un avis personnel de l'auteur puisque très peu de résultat du type (1.2) ont été pour l'instant démontrés et qu'il est déjà très difficile d'établir un équivalent dans la conjecture de Manin même pour des variétés algébriques dont les propriétés géométriques sont bien connues.

## 3. Présentation des résultats connus concernant $Z$

**3.1. Résultats généraux.** Des techniques d'analyse harmonique sur des espaces adéliques ont permis de montrer le prolongement méromorphe de $Z$ à gauche de la droite verticale d'abcisse un dans une classe de variétés $V$ sur lesquelles agissent des groupes algébriques avec une orbite ouverte : les variétés drapeaux généralisées [30], les variétés toriques projectives et lisses ([3], [4], [5]) et certaines de leur généralisation [49], [50], les compactifications équivariantes lisses d'espaces affines [19], [20], [22] et certaines de leurs généralisations [47], [48], [31].

Sur de rares exemples géométriquement très simples, il existe des résultats beaucoup plus forts. Dans [27], Essouabri a montré récemment que les fonctions zêtas des hauteurs pouvaient être prolongées méromorphiquement sur $\mathbb{C}$ tout entier lorsque $V$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ ou le plan projectif éclaté en un point. Ce résultat est valable pour une large classe de hauteurs qui englobe celle décrite dans l'introduction. Il est probable qu'il n'y ait que très peu de tels cas pour lesquels un tel prolongement soit possible.

Des méthodes de théorie analytique des nombres permettent de démontrer la conjecture de Manin sans pouvoir établir des estimations aussi précises que (1.2). C'est le cas par exemple du plan projectif éclaté en quatre points rationnels en position générale [11] (voir aussi [15]).

Récemment [51], Swinnerton-Dyer a initié un programme en conjecturant des résultats pour les surfaces cubiques non-singulières. Lorsque $V$ est surface cubique non-singulière sur $\mathbb{Q}$ et $U$ l'ouvert de $V$ complémentaire des droites de $V$, il conjecture qu'il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que la formule (1.2) soit valable pour tout $\delta > \frac{1}{2}$. Cela implique comme nous l'avons vu au paragraphe précédent que la fonction zêta des hauteurs est prolongeable de manière méromorphe dans le demi plan $\Re e\, s > \frac{1}{2}$ avec un seul pôle en $s = 1$. Cependant, il y a aucune chance qu'on puisse établir ou infirmer dans un futur proche une telle conjecture puisqu'on ne connait pas d'équivalent de la forme (1.1) dans la conjecture de Manin pour une seule surface cubique non-singulière. Le meilleur résultat général est la majoration de Heath-Brown en $O(B^{4/3+\epsilon})$. Swinnerton-Dyer a fait des tests numériques sur des surfaces diagonales d'équation

$$a_0X_0^3 + a_1X_1^3 = a_2X_2^3 + a_3X_3^3$$

où $a_0a_1/a_2a_3, a_0a_2/a_1a_3, a_0a_3/a_1a_2$ ne sont pas des cubes dans $\mathbb{Q}$. Cette dernière restriction permet de pronostiquer que le polynôme attendu est de degré 0. Le fait d'avoir que des termes diagonaux permet de n'avoir que $O(B)$ opérations de multiplications les autres n'étant que des additions et des soustractions.

**3.2. Un exemple de surface cubique singulière.** Pour obtenir des asymptotiques, il faut s'affranchir de la condition non-singulière. Dans [9], l'auteur a étudié la surface cubique d'équation $X_1X_2X_3 = X_0^3$ en montrant lorsque $H$ est associée à la norme infinie et $U$ est l'ouvert de $V$ défini par $X_0 \neq 0$. Est établie l'estimation

$$N(B) = BP(\log B) + O\big(B^{7/8}\exp\{-c(\log B)^{3/5}(\log\log B)^{-1/5}\}\big), \tag{3.1}$$

avec $c$ une constante strictement positive. Cette surface a été étudiée par de nombreux auteurs [28], [34] et une estimation moins précise découle des résultats généraux de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques ou sur ceux de Salberger [45].

La formule (3.1) est la plus précise que nous puissions espérer inconditionnellement. En effet, la forme du terme d'erreur est semblable au meilleur terme d'erreur connu dans le Théorème des nombres premiers. Ainsi, la preuve de (3.1) fait intervenir la plus grande région sans zéro connue de $\zeta$. Sous l'hypothèse de Riemann, Swinnerton-Dyer et l'auteur [16] ont récemment montré l'estimation valable pour tout $\epsilon > 0$

$$N(B) = BP(\log B) + \gamma B^{9/11} + O\big(B^{13/16+\varepsilon}\big),$$

où $\gamma$ est une constante positive. De plus, sous des hypothèses raisonnables sur les zéros de zêta, il est possible de montrer une formule avec un terme d'erreur de la forme $O(B^{4/5+\varepsilon})$ et un terme secondaire qui est une somme portant sur les zéros de $\zeta$.

Ce résultat suscite de nombreuses questions :

— L'exposant $\frac{9}{11}$ dépend-il du choix de la norme ou uniquement de la géométrie de la variété ?

— Peut-on montrer une formule de ce type pour d'autres variétés toriques, pour d'autres surfaces cubiques singulières ?

— Ce résultat conforte-t-il la conjecture de Swinnerton-Dyer ?

Le résultat principal de [16] concerne la fonction zêta des hauteurs associée.

**Théorème 3.1** ([16]). *La fonction $Z(s)$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \Re e\, s > \frac{3}{4}\}$ et sa frontière naturelle d'analycité est la droite $\{s \in \mathbb{C} : \Re e\, s = \frac{3}{4}\}$.*

C'est le premier résultat négatif en ce sens connu et les pôles de $Z$ s'expriment en fonction de ceux de $\zeta$. Nous indiquerons à la section 4 les étapes de la démonstration. Là encore, nous aimerions connaître qu'elle est le sens de la valeur $\frac{3}{4}$ ? Dépend-elle du choix de la norme ? De l'avis de l'auteur, la réponse est non, mais le résultat n'est connu que pour la norme infinie. Dans ce cas-là, existe-t-il un moyen de prévoir cette valeur à partir de la géométrie de la variété ?

**3.3. Utilisation de la notion de torseur universel.** Tous les cas résolus de la conjecture de Manin ne relevant pas de résultats d'analyse harmonique passent à notre connaissance par l'utilisation de la notion de torseur universel. Cette notion a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc [23], [24] pour l'étude du principe de Hasse et de l'approximation faible. Non seulement, elle est utile pour montrer que $V$ possède des points rationnels, mais aussi, particulièrement performante pour des problèmes de comptage. Le premier à l'avoir explicitement utilisée est Salberger [45]. Cela lui a permis de retrouver le résultat de Batyrev et Tschinkel concernant les variétés toriques lorsqu'elles sont déployées sur $\mathbb{Q}$. L'auteur a montré ensuite que cela permettait aussi d'établir un prolongement méromorphe de la fonction zêta des hauteurs dans ce cas [10].

Une discussion générale sur les torseurs universels nous emmènerait trop loin de notre propos. Nous renvoyons au survol de Peyre [44] ou à la construction de Hassett et Tschinkel [32]. Retenons simplement que l'intérêt d'un torseur universel au-dessus de $V$ est qu'il est en général plus simple arithmétiquement que la variété elle-même. Il permet de paramétrer les points rationnels de $V$ par des points à coordonnées entières d'ouvert d'espace affine.

Dans une série de deux articles [12], [13], Browning et l'auteur étudient les surfaces de del Pezzo de degré 4 singulières autrement dit l'intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$ définie par $Q_1(\mathbf{x}) = Q_2(\mathbf{x}) = 0$.

Le premier cas $V_1$ étudié dans [12] est le cas d'une surface déployée sur $\mathbb{Q}$. Il correspond au choix

$$Q_{1,1}(\mathbf{x}) = x_0x_1 - x_2^2, \qquad Q_{2,1}(\mathbf{x}) = x_0x_4 - x_1x_2 + x_3^2.$$

Son unique singularité est $[0,0,0,0,1]$. De plus, $V_1$ contient précisément une droite d'équation $x_0 = x_2 = x_3 = 0$. En fait, $V_1$ est une compactification équivariante de $\mathbb{G}_a^2$, de sorte que le théorème de Chambert-Loir et Tschinkel [22] fournit donc déjà un résultat du type (1.2). Cependant, nos calculs sont explicites et permettent de décrire les pôles de la fonction zêta des hauteurs notée $Z_1(s)$. La hauteur choisie est celle associée à la norme infinie et l'ouvert $U_1$ de $V_1$ sur lequel on compte est la variété $V_1$ privée de l'unique droite qu'elle contient d'équation $x_0 = x_2 = x_3 = 0$.

Pour énoncer les résultats, nous introduisons

$$E_1(s+1) = \zeta(6s+1)\zeta(5s+1)\zeta(4s+1)^2\zeta(3s+1)\zeta(2s+1),$$
$$F_1(s+1) = \frac{\zeta(14s+3)\zeta(13s+3)^3}{\zeta(10s+2)\zeta(9s+2)\zeta(8s+2)^3\zeta(7s+2)^3\zeta(19s+4)}.$$

La fonction $E_1(s)$ admet un prolongement méromorphe sur tout le plan $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en $s = 1$. De même, $F_1(s)$ est holomorphe et bornée dans tous les demi-plans de la forme $\Re e(s) \geqslant 9/10 + \epsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

**Théorème 3.2** ([12]). *Il existe une constante $\beta_1 \in \mathbb{R}$, et des fonctions $G_1(s), H_1(s)$ holomorphes dans le demi-plan $\Re e(s) > \frac{5}{6}$, telle que lorsque $\Re e(s) > 1$ nous ayons*

$$Z_1(s) = E_1(s)F_1(s)G_1(s) + \frac{12/\pi^2 + \beta_1}{s-1} + H_1(s).$$

Ici, il serait intéressant de trouver une interprétation géométrique de $\beta_1$ et d'obtenir un résultat de la force du théorème 3.1.

Nous obtenons grâce au théorème une formule asymptotique (1.2) valable ici pour tout $\delta > \frac{11}{12}$. La perte d'information provient de la taille des fonctions $E_1$ et $F_1$ sur les droites verticales. À la section 5, nous décrirons une méthode pour montrer que, même sous l'hypothèse de Riemann, une formule de la forme (1.2) avec $\delta < \frac{33}{38}$ est fausse. Ainsi puisque $\frac{5}{6} < \frac{33}{38}$ une formule du type (1.2) ne peut pas impliquer un résultat de la force du théorème 3.2. Enfin sous l'hypothèse de Riemann on peut améliorer légèrement l'exposant $\frac{11}{12}$ en $\frac{10}{11}$. Ce développement que nous avons regroupé dans la dernière section constitue la seule partie originale par rapport à la littérature de cet article.

Un torseur universel au dessus de la désingularisation minimale de $V_1$ est un ouvert de l'espace affine donné par

$$\tau_2\xi_0^2\xi_4 - \tau_0\xi_1^3\xi_2^2 + \tau_3\xi_3^2 = 0. \tag{3.2}$$

La formule de l'énoncé peut surprendre mais elle résulte du fait qu'une première étape consiste à approcher $N(B)$ par un terme faisant intervenir un nouvelle somme de nature arithmétique. On montre ainsi qu'il existe deux fonctions $N_0$ et $N_1$ telle que

$$N(B) = N_0(B) + N_1(B)$$

avec

$$N_0(B) = 2B^{5/6} \sum_{n \leqslant B} \Delta(n) g\Big(\Big(\frac{n}{B}\Big)^{1/6}\Big),$$

et pour tout $\epsilon > 0$

$$N_1(B) = (12/\pi^2 + 2\beta_1)B + O_\epsilon(B^{5/6+\epsilon}).$$

Ici, $\Delta$ est la fonction arithmétique dont la série de Dirichlet associée est $E_1(s+\frac{5}{6})F_1(s+\frac{5}{6})$ et $g$ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La formule (2.1) permet de conclure avec une définition convenable de $G_1(s)$ (cf. (5.7)).

Le deuxième cas $V_2$ étudié dans [13] est le cas d'une surface non-déployée sur $\mathbb{Q}$. Il correspond au choix

$$Q_{1,2}(\mathbf{x}) = x_0x_1 - x_2^2, \qquad Q_{2,2}(\mathbf{x}) = x_0^2 - x_1x_4 + x_3^2.$$

Son unique singularité est $[0,0,0,0,1]$. De plus, $V_2$ contient précisément deux droites d'équations $x_1 = x_2 = x_0 \pm ix_3 = 0$. Ici, $V_2$ n'est plus une compactification équivariante de $\mathbb{G}_a^2$, si bien que les résultats de Chambert-Loir et Tschinkel [22] ne sont pas applicables. Dans [13], la hauteur est associée à la norme infinie et $U_2$ l'ouvert de $V_2$ est $V_2$ privé de $[0,0,0,0,1]$ l'unique point singulier.

Soit $\chi$ le caractère non principal modulo 4 et $L(s,\chi)$ la série de Dirichlet associée. Pour énoncer les résultats, nous introduisons

$$E_2(s+1) = \zeta(2s+1)^2\zeta(3s+1)\zeta(4s+1)L(2s+1,\chi)L(3s+1,\chi),$$

$$F_2(s+1) = \frac{\zeta(9s+3)L(9s+3,\chi)}{\zeta(5s+2)^2\zeta(6s+2)^2L(5s+2,\chi)L(6s+2,\chi)^2}$$

La fonction $E_2(s)$ admet un prolongement méromorphe sur tout le plan $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en $s = 1$. De même, $F_2(s)$ est holomorphe et bornée dans tous les demi-plans de la forme $\Re e(s) \geqslant 9/10 + \epsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Nous notons $Z_2(s)$ la fonction zêta des hauteurs associées à $V_2$.

**Théorème 3.3** ([13]). *Il existe une constante $\beta_2 \in \mathbb{R}$, et des fonctions $G_2(s), H_2(s)$ holomorphes dans le demi-plan $\Re e(s) > \frac{17}{20}$, telle que lorsque $\Re e(s) > 1$ nous ayons*

$$Z_2(s) = E_2(s)F_2(s)G_2(s) + \frac{12/\pi^2 + \beta_2}{s-1} + H_2(s).$$

Ici, il serait là encore intéressant de trouver une interprétation géométrique de $\beta_2$ et d'obtenir un résultat de la force du théorème 3.1.

Nous obtenons alors une formule asymptotique (1.2) valable ici pour tout $\delta > \frac{29}{32}$. La perte d'information provient de la taille des fonctions $E_2$

et $F_2$ sur les droites verticales. Le comptage se fait sur un torseur au dessus d'une désingularisation minimale de $V_2$ : c'est un ouvert d'un espace affine donné par les points $(\tau_1, \tau_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{Z}^7$ satisfaisant

$$\xi_0^4\xi_2^2 - \tau_2\xi_1^2\xi_4 + \xi_3^2 = 0. \tag{3.3}$$

La variable $\tau_1$ n'intervient pas dans cette équation.

Le troisième exemple étudié avec ce type de méthode [14] concerne une surface cubique singulière $V_3$, qui cette fois n'est pas torique, définie par l'équation

$$x_1x_2^2 + x_2x_0^2 + x_3^3 = 0.$$

Autrement dit $V_3$ est une surface de del Pezzo singulière de degré 3. Derenthal a établi dans [25] la conjecture de Manin concernant cette surface. Dans un travail en collaboration avec Browning et Derenthal, nous reprenons les méthodes initiées en [12] et [13] pour obtenir un prolongement méromorphe de la fonction zêta des hauteurs. La hauteur choisie est celle associée à la norme infinie et l'ouvert $U_3$ sur lequel on compte est la variété $V_3$ privée de l'unique droite quelle contient d'équation $x_2 = x_3 = 0$.

Pour énoncer les résultats obtenus, nous introduisons

$$E_3(s+1) = \zeta(2s+1)\zeta(3s+1)^2\zeta(4s+1)^2\zeta(5s+1)\zeta(6s+1),$$
$$F_3(s+1) = \frac{\zeta(13s+3)^5\zeta(14s+3)^2}{\zeta(7s+2)^4\zeta(8s+2)^4\zeta(9s+2)^2\zeta(10s+2)\zeta(19s+4)^2}.$$

La fonction $E_3(s)$ admet un prolongement méromorphe sur tout le plan $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en $s = 1$. De même, $F_3(s)$ est holomorphe et bornée dans tous les demi-plans de la forme $\Re e(s) \geqslant 9/10 + \epsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Nous notons $Z_3(s)$ la fonction zêta des hauteurs associées à $V_3$.

**Théorème 3.4** ([14])**.** *Il existe une constante $\beta_3 \in \mathbb{R}$, et des fonctions $G_3(s), H_3(s)$ holomorphes dans le demi-plan $\Re e(s) > \frac{43}{48}$, telle que lorsque $\Re e(s) > 1$ nous ayons*

$$Z_3(s) = E_3(s)F_3(s)G_3(s) + \frac{12/\pi^2 + \beta_3}{s-1} + H_3(s).$$

Nous obtenons alors une formule asymptotique (1.2) valable ici pour tout $\delta > \frac{10}{11}$. Ici, on compte sur un torseur universel au dessus de la désingularisation minimale de $V_3$ donné par

$$\tau_\ell\xi_\ell^3\xi_4^2\xi_5 + \tau_2^2\xi_2 + \tau_1^3\xi_1^2\xi_3 = 0. \tag{3.4}$$

Il serait naïf de penser que les méthodes sont faciles et semblables dans les trois cas. Nous détaillons les étapes de la démonstration concernant $V_3$. Après un passage à un comptage sur un torseur universel, l'idée est de voir (3.4) comme une congruence de la forme

$$\tau_2^2\xi_2 \equiv -\tau_1^3\xi_1^2\xi_3 (\mod \xi_\ell^3\xi_4^2\xi_5).$$

On observe que les équations (3.2) et (3.3) peuvent aussi être facilement transformées en congruences. C'est sans aucune doute une des raisons du succès de la méthode. On a donc à compter le nombre de solutions entières d'une congruence dans un certain domaine. Cela donne un terme principal dont la contribution est relativement facile à estimer et un terme d'erreur qui est beaucoup plus difficile à estimer. Pour cela nous utilisons d'une part des résultats d'équirépartition de $ax^3+bx^2$ modulo $q$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et d'autre part des majorations de sommes d'exponentielles à la van der Corput. Ces dernières peuvent être vues comme des analogues de celles que l'on rencontre pour montrer des majorations de $\zeta$ sur les droites verticales (cf. chap. I.6 de [52]).

## 4. Prolongement méromorphe de produit eulérien et domaine d'analycité

Comme nous pouvons le constater à la lecture de cette présentation, l'étude des propriétés analytiques des fonctions zêta des hauteurs fait intervenir un grand nombre de techniques et de domaines des mathématiques. Pour décrire la démonstration du théorème 3.1, nous voudrions présenter certaines méthodes concernant le prolongement méromorphe de série de Dirichlet s'écrivant sous forme de produit eulérien. Quoiqu'encore peu utilisé, nous sommes convaincu que leur développement de sujet permettrait de nouveaux résultats semblables au théorème 3.1.

Pour cela, nous commençons par rappeler un résultat classique d'Estermann [29] qui a été complété par Kurokawa [38].

**Proposition 4.1** ([29]). *Soit $f(X) = 1 + a_1X + \ldots + a_dX^d = \prod_{j=1}^d (1 - \alpha_jX) \in \mathbb{Z}[X]$ et $F(s)$ défini lorsque $\Re e\, s > 1$ par $F(s) = \prod_p f(p^{-s})$. Alors*

*(a) $F(s)$ est prolongeable méromorphiquement sur le demi plan $\Re e\, s > 0$ ;*

*(b) De plus, si $|\alpha_j| = 1$ pour tout $j$, alors $F(s)$ est prolongeable méromorphiquement sur le plan $\mathbb{C}$ tout entier. Sinon, sa frontière naturelle d'analycité est la droite $\{s \in \mathbb{C} : \Re e\, s = 0\}$.*

Ce cas-là est donc entièrement compris mais malheureusement ce n'est pas celui-là que l'on rencontre dans l'étude des fonctions zêta des hauteurs.

Pour démontrer le théorème 3.1, nous commençons par calculer

$$Z(s_1, s_2, s_3) = \sum_{\substack{(x_0,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{N}^3 \\ \text{pgcd }(x_1,x_2,x_3)=1 \\ x_1x_2x_3=x_0^3}} \frac{1}{x_1^{s_1}x_2^{s_2}x_3^{s_3}}.$$

L'avantage de cette série de Dirichlet en plusieurs variables est qu'elle peut s'écrire sous forme de produit eulérien. D'après [9], nous avons

$$Z(s_1, s_2, s_3) = \prod_p \Big( \frac{1 + \sum (1 - p^{-3s_i}) p^{-2s_j - s_k} - p^{-(3s_1 + 3s_2 + 3s_3)}}{(1 - p^{-3s_1})(1 - p^{-3s_2})(1 - p^{-3s_3})} \Big)$$

où la somme est prise sur les six permutations $i, j, k$ de $1, 2, 3$. Par des méthodes d'analyse complexe classiques mais délicates à mettre en œuvre, nous montrons dans [16] qu'il existe $G(s)$ une fraction rationnelle en $s$ et $H(s)$ une fonction méromorphe dans un demi-plan de la forme $\Re e\, s > \frac{3}{4} - \epsilon$ telles que

$$Z(s) = G(s) E(s) F(s) + H(s)$$

avec

$$E(s+1) = \zeta(1-3s)\zeta(1-2s)\zeta(1-s)\zeta(1+2s)\zeta(1+3s)\zeta(1+4s)\zeta(1+6s)$$

et

$$\begin{aligned} F(s) &= \prod_p \prod_{j \in J} (1 - p^{-1-j(s-1)}) \Big( 1 + (1 - p^{-s}) \sum_{j \in J} p^{-1-j(s-1)} - p^{-3s} \Big) \\ &= \prod_p \Big( W(p^{-1/4}, p^{3/4-s}) \prod_{j \in J} (1 - p^{-1-j(s-1)}) \Big) \end{aligned}$$

avec $J = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4\}$ et

$$\begin{aligned} W(X,Y) = 1 + (1 - X^3 Y)&(X^6 Y^{-2} + X^5 Y^{-1} + X^4 + X^2 Y^2 + X Y^3 + Y^4) \\ &- X^9 Y^3. \end{aligned}$$

Nous avons donc besoin de résultats concernant des séries de Dirichlet de la forme

$$F(s) = \prod_p f(1/p, 1/p^s) \tag{4.1}$$

où $f(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ et $f(0,0) = 1$. Malheureusement les connaissances dans ce cas sont très incomplètes. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article passionnant de du Sautoy [46].

La seule démarche envisageable dans ce type de problème est de montrer qu'il existe une sous-suite de zéros ou de pôles de la fonction qui converge vers chacun des points de la frontière du domaine d'analycité. La méthode utilisée dans [16] pour étudier le cas de $F$ repose sur le fait que $W(p^{-1/4}, p^{3/4-s})$ pour $p$ fixé admet un grand nombre de zéros $s$ de partie réelle $> \frac{3}{4}$ égale à

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2} p^{1/4} \log p} + O\Big( \frac{1}{p^{3/4} \log p} \Big).$$

Maintenant lorsque $\Re e\, s > \frac{3}{4} + \frac{1}{N}$, il existe des entiers $b(k,k') \in \mathbb{Z}$ tels que

$$F(s) = \prod_{\substack{k,k' \\ k-k'/4+k'/N>1}} \zeta(k+k'(s-1))^{b(k,k')} \prod_p W_N(p^{-1/4}, p^{3/4-s})$$

où le nombre de $b(k,k') \neq 0$ intervenant dans le produit est fini et

$$W_N(p^{-1/4}, p^{3/4-s}) = W(p^{-1/4}, p^{3/4-s}) \prod_{\substack{k,k' \\ k-k'/4+k'/N>1}} (1-p^{-(k+k'(s-1))})^{b(k,k')}.$$

Les $b(k,k')$ sont choisis pour que le produit $\prod_p W_N(p^{-1/4}, p^{3/4-s})$ soit convergent dans le demi-plan $\Re e\, s > \frac{3}{4} + \frac{1}{N}$.

Les zéros de $W(p^{-1/4}, p^{3/4-s})$ sont encore des zéros de $W_N(p^{-1/4}, p^{3/4-s})$. Il reste à montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on peut construite une sous-suite de ces zéros qui converge vers $\frac{3}{4} + i\tau$ et qui ne soit pas un pôle de

$$\prod_{\substack{k,k' \\ k-k'/4+k'/N>1}} \zeta(k+k'(s-1))^{b(k,k')}.$$

Ces zéros sont encore des zéros de $F(s)$ ce qui interdit de pouvoir prolonger méromorphiquement $F(s)$ au voisinage de $\frac{3}{4} + i\tau$.

Très récemment dans [8], Bhowmik et Schlage-Puchta ont montré que la série de Dirichlet associée au polynôme $f(X,Y) = 1 + Y + Y^2X$ grâce à la formule (4.1) est prolongeable méromorphiquement jusqu'à $\Re e\, s > \frac{1}{2}$. De plus, si $\zeta(s)$ a une infinité de zéros en dehors de la droite critique, alors la droite $\Re e\, s = \frac{1}{2}$ est sa frontière naturelle d'analycité. Pour illustrer la difficulté de ce problème d'énoncé très simple, nous observons que les zéros des facteurs eulériens $1 + p^{-s} + p^{1-2s}$ sont de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$. Il est donc impossible de construire une suite de zéros de $F(s)$ comme nous l'avons fait précédemment.

Il reste donc beaucoup de choses à comprendre concernant ces produits eulériens.

## 5. Sur la valeur de l'exposant $\delta$ dans la formule (1.2)

**5.1. Énoncé.** Dans cette section, nous montrons que, sous l'hypothèse de Riemann, il n'existe pas de formule de la forme (1.2) concernant $V_1$ avec $\delta < \frac{33}{38}$. Ce résultat est sans doute vrai inconditionnellement mais l'hypothèse de Riemann simplifie les preuves.

Nous étudions $R(B)$ le terme d'erreur dans la formule (1.2) lorsque $V = V_1$ la variété étudiée au théorème 3.2. On a ainsi

$$R(B) = N(B) - BP(\log B).$$

Nous notons $F(B) = \Omega(B^\beta)$ lorsqu'il existe une suite tendant vers $+\infty$ de $B$ et une constante $C > 0$ telle que $|F(B)| \geqslant CB^\beta$. Notre résultat est le suivant.

**Théorème 5.1.** *Pour tout $\delta < \frac{33}{38}$, sous l'hypothèse de Riemann, on a*

$$R(B) = \Omega(B^\delta).$$

Notons qu'il est facile de constater que, sous l'hypothèse de Riemann, on a $R(B) = O(B^\delta)$ pour tout $\delta > \frac{10}{11}$.

**5.2. Démonstration du théorème 5.1.** Nous commençons par utiliser ce qui a été fait en [12]. Il existe des fonctions $N_0(B)$ et $N_1(B)$ dont les valeurs aux entiers ont été normalisées par la relation

$$N_j(B) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{\substack{x\to B\\ x<B}} N_j(x) + \lim_{\substack{x\to B\\ x>B}} N_j(x)\Big)$$

telles que

$$E_1(s)F_1(s)G_1(s) = s\int_1^\infty t^{-s-1}N_0(t)\mathrm{d}t, \qquad H_1(s) = s\int_1^\infty t^{-s-1}N_1(t)\mathrm{d}t.$$

On a $N(B) = N_0(B) + N_1(B) + O\big(\lim_{\substack{x\to B\\ x>B}} N(x) - \lim_{\substack{x\to B\\ x<B}} N(x)\big)$ et d'après le lemme 10 de [12]

$$N_1(B) = (12/\pi^2 + 2\beta_1)B + O(B^{5/6+\epsilon}).$$

De plus, les sauts satisfont

$$\lim_{\substack{x\to B\\ x>B}} N(x) - \lim_{\substack{x\to B\\ x<B}} N(x) = O(B^{5/6+\epsilon}).$$

Posant $P_0(X) = P(X) - (12/\pi^2 + 2\beta_1)$, nous avons donc à étudier la taille de $R_0(B)$ défini par

$$R_0(B) = N_0(B) - BP_0(\log B),$$

puisque

$$R_0(B) = R(B) + O(B^{5/6+\epsilon}).$$

Afin de faciliter la rédaction, nous posons $H_0(s) = E_1(s)F_1(s)G_1(s)$.

Le premier résultat intermédiaire nouveau par rapport à [12] résulte d'une application de l'identité de Parseval.

**Lemme 5.2.** *Soit $\sigma \in ]\frac{17}{20}, 1[$. Sous l'hypothèse de Riemann, on a*

$$\int_0^{+\infty} R_0(x)^2 x^{-1-2\sigma}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\frac{H_0(\sigma+i\tau)}{\sigma+i\tau}\Big|^2\mathrm{d}\tau. \tag{5.1}$$

*Cette formule est à interpréter dans le sens où si l'une des intégrales est convergente alors l'autre l'est aussi et elles sont égales.*

Ce résultat est classique (voir lemma 13.1 de [36] dans le cas du problème des diviseurs). Si l'intégrale du membre de gauche ne converge pas, nous avons alors $R_0(x) = \Omega(x^{\sigma-\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$.

*Démonstration.* Soit $\mu_F(\sigma)$ l'ordre d'une fonction $F$ holomorphe sur un ouvert contenant la droite verticale d'abscisse $\sigma$ défini comme le plus petit exposant $m$ tel que

$$F(\sigma + i\tau) \ll_\sigma |\tau|^m \qquad (\forall |\tau| \geqslant 1).$$

L'hypothèse de Riemann permet d'affirmer

$$\mu_\zeta(\sigma) = \max(\frac{1}{2} - \sigma, 0). \tag{5.2}$$

Une formule de Perron permet d'affirmer pour tout $\sigma > 1$, nous avons

$$N_0(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H_0(s)\frac{B^s}{s}\mathrm{d}s. \tag{5.3}$$

Cette intégrale converge en valeur principale lorsque $B \in \mathbb{N}$.

Or, d'après (5.2), nous avons

$$\mu_{H_0}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \geqslant \frac{11}{12}, \\ 6(1-\sigma) - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{9}{10} \leqslant \sigma \leqslant \frac{11}{12}, \\ 11(1-\sigma) - 1 & \text{si } \frac{7}{8} \leqslant \sigma \leqslant \frac{9}{10}, \\ 19(1-\sigma) - 2 & \text{si } \frac{17}{20} \leqslant \sigma \leqslant \frac{7}{8}, \end{cases}$$

et ainsi $\mu_{H_0}(\sigma) < 1$ lorsque $\sigma > \frac{17}{20}$.

En décalant la droite d'intégration dans (5.3) à gauche jusqu'à $\Re e\, s = \sigma$, nous obtenons donc lorsque $\sigma < 1$ suffisamment proche de 1 la formule

$$R_0(B) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to+\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} H_0(s)\frac{B^s}{s}\mathrm{d}s. \tag{5.4}$$

On étend cette formule à tout $\sigma \in ]\frac{17}{20}, 1[$ puisqu'alors $H_0(\sigma+it)/(\sigma+it)$ tend uniformément vers 0 lorsque $t$ tend vers l'infini. On écrit $R_0(x)$ comme une transformée de Mellin-Fourier

$$R_0(x)x^{-\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\sigma+i\tau)\frac{x^{i\tau}}{\sigma+i\tau}\mathrm{d}\tau.$$

L'identité de Parseval fournit alors

$$\int_0^\infty R_0^2(x)x^{-2\sigma-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\frac{H_0(\sigma+i\tau)}{\sigma+i\tau}\Big|^2\mathrm{d}\tau.$$

□

Ce lemme fournit une méthode pour démontrer le théorème. Il suffit de montrer que pour tout $\sigma < \frac{33}{38}$ suffisamment proche de $\frac{33}{38}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\int_T^{2T} |H_0(\sigma + i\tau)|^2 \mathrm{d}\tau \gg T^{2+\epsilon}. \tag{5.5}$$

Ainsi (5.1) permet de montrer le résultat recherché.

Soit

$$E_4(s,\sigma) = \zeta(3s-2)\zeta(2s-1)\zeta(6-12\sigma+6s)\zeta(5-10\sigma+5s)\zeta(4-8\sigma+4s)^2 F_1(s).$$

Notre deuxième étape de la démonstration du théorème 5.1 est résumé dans le lemme suivant.

**Lemme 5.3.** *Pour tout* $\frac{17}{20} < \sigma < \frac{33}{38}$*, il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*

$$\int_T^{2T} |H_0(\sigma + i\tau)|^2 \mathrm{d}\tau \gg_\sigma T^\epsilon I^2$$

*avec*

$$I = \int_T^{2T} |E_4(\sigma + i\tau, \sigma) G_1(\sigma + i\tau)| \mathrm{d}\tau. \tag{5.6}$$

L'avantage de $E_4$ par rapport à $E_1$ est que c'est un produit de valeurs de la fonction $\zeta$ dont l'argument est toujours de partie réelle $\geqslant \frac{1}{2}$.

*Démonstration.* Pour démontrer ce résultat, nous nous appuyons sur une conséquence de l'équation fonctionnelle de $\zeta$. Prenant

$$\xi(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin(\frac{1}{2}\pi s),$$

l'équation fonctionnelle de $\zeta$ s'écrit

$$\zeta(s) = \xi(s)\zeta(1-s).$$

De plus, pour $s = \sigma + i\tau$ de partie réelle fixée

$$|\xi(s)| \sim \Big(\frac{|\tau|}{2\pi}\Big)^{1/2-\sigma} \qquad (|\tau| \to +\infty).$$

Nous avons lorsque $s = \sigma + i\tau$

$$\begin{aligned} E_1(s) = {} & \zeta(3s-2)\zeta(2s-1)\zeta(6-6s)\zeta(5-5s)\zeta(4-4s)^2 \\ & \times \xi(6s-5)\xi(5s-4)\xi(4s-3)^2. \end{aligned}$$

Lorsque $\frac{17}{20} \leqslant \sigma \leqslant \frac{7}{8}$ est fixé, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_1(s)F_1(s)| &= |E_4(s,\sigma)\xi(6s-5)\xi(5s-4)\xi(4s-3)^2| \\ &\sim C_\sigma |\tau|^{17-19\sigma} |E_4(s,\sigma)| \end{aligned}$$

où $C_\sigma > 0$ dépend uniquement de $\sigma$. En reportant cette estimation dans l'intégrale, nous en déduisons la minoration

$$\int_T^{2T} |H_0(\sigma+i\tau)|^2 \mathrm{d}\tau \gg_\sigma T^{1+\epsilon} \int_T^{2T} |E_4(\sigma+i\tau,\sigma)G_1(\sigma+i\tau)|^2 \mathrm{d}\tau.$$

L'intégrale intervenant dans l'écriture de ce minorant est d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz minorée par $I^2/T$. □

La dernière étape consiste à montrer que l'intégrande de $I$ est en moyenne plus grande qu'une constante strictement positive. Pour cela, nous nous inspirons de la démonstration du theorem 9.6 du livre d'Ivić [36]. Certaines précautions sont nécessaires à cause du facteur $G_1$ qui n'est pas une série de Dirichlet.

La série $E_4(s,\sigma)$ est absolument convergente pour $\Re e\, s > 2\sigma + \frac{5}{4}$ et par conséquent nous avons lorsque $\sigma_1 > 2\sigma + \frac{5}{4}$

$$|E_4(\sigma_1+i\tau,\sigma)| \gg 1.$$

D'après [12] (formule (6.1) et suivante), il existe une fonction continue bornée positive telle que $g(1) > 0$ et

$$G_1(s) = \frac{12s}{6s-5}\Big(g(1) - \int_0^1 v^{6s-5} g(v)\mathrm{d}v\Big). \tag{5.7}$$

Il existe donc un $\beta$ suffisamment grand tel que pour tout $\sigma_1 \geqslant \beta > 2\sigma + \frac{5}{4}$ on ait pour tout $\tau \in \mathbb{R}$

$$|G_1(\sigma_1+i\tau)| \gg 1.$$

Nous obtenons donc pour $\sigma_1 \geqslant \beta$ la minoration

$$|E_4(\sigma_1+i\tau,\sigma)G_1(\sigma_1+i\tau)| \gg 1. \tag{5.8}$$

Posons $s_1 = \sigma_1 + i\tau$ avec $\sigma_1 \geqslant \beta$ et $X$ un paramètre satisfaisant $T^{-a} \leqslant X \leqslant T^a$ avec $a$ une constante positive. En appliquant le théorème des résidus au contour $C$ joignant $\sigma + 2iT$, $\sigma + iT$, $1 + \sigma_1 + iT$ et $1 + \sigma_1 + 2iT$, nous obtenons

$$E_4(s_1,\sigma)G_1(s_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{E_4(w,\sigma)G_1(w)}{w-s_1} \exp((w-s_1)^2) X^{s_1-w} \mathrm{d}w$$

Sur les contours horizontaux, on a $\Im m(w-s_1) \geqslant T/4$ de sorte que

$$\exp((w-s_1)^2) \ll \exp\big\{-(\log T)^{1+\varepsilon}\big\}.$$

Comme $G_1$ est bornée sur $\Re e\, s \geqslant \frac{17}{20}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|E_4(\sigma_1+i\tau,\sigma)G_1(\sigma_1+i\tau)| \\
&\ll X^2\int_T^{2T} |E_4(\sigma+it,\sigma)G_1(\sigma+it)\exp\{(-2+i(t-\tau))^2\}|\mathrm{d}t \\
&\qquad + X^{-1}\int_T^{2T} |\exp\{(1+i(t-\tau))^2\}|\mathrm{d}t + o(1)
\end{aligned}$$

On intégre entre $5T/4$ et $7T/4$. Grâce à (5.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
T &\ll X^2\int_T^{2T} |E_4(\sigma+it,\sigma)G_1(\sigma+it)|\int_{5T/4}^{7T/4}\exp\{-(t-\tau)^2\}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\
&\quad + X^{-1}\int_T^{2T}\int_{5T/4}^{7T/4}\exp\{-(t-\tau)^2\}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t + o(1) \\
&\ll X^2\int_T^{2T} |E_4(\sigma+it,\sigma)G_1(\sigma+it)|\mathrm{d}t + X^{-1}T + o(1).
\end{aligned}$$

En choisissant $X = T^{\varepsilon}$, nous obtenons $I \gg T^{1-\varepsilon}$ où $I$ a été introduit en (5.6). Le choix $X = T^{1/3}I^{-1/3}$ fournit alors

$$I = \int_T^{2T} |E_4(\sigma+iv,\sigma)G_1(\sigma+it|\mathrm{d}v \gg T.$$

Cette minoration fournit (5.5) via le lemme 5.3 et donc le résultat recherché.

## Bibliographie


[1] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974), Vol. **1**, 405–408. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.

[2] V.V. Batyrev, Y.I. Manin, *Sur les points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*. Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[3] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic toric*. Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[4] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Height Zeta functions of Toric Varieties*, Algebraic geometry 5, Manin's Festschrift. J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[5] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Manin's Conjecture for Toric Varieties*. J. of Algebraic Geometry **7** (1998), 15–53.

[6] V.V. Batyrev, Y. Tschinkel, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*. Astérisque **251** (1998), 299–340.

[7] G. Bhowmik, D. Essouabri, B. Lichtin, *Meromorphic Continuation of Multivariable Euler Products and Applications*. ArXiv math.NT/0502508, à paraître à Forum Math.

[8] G. Bhowmik, J.-C. Schlage-Puchta, *Natural boundaries of Dirichlet series*. Functiones et Approximatio **37** (2007), 17–29.

[9] R. de la Bretèche, *Sur le nombre de points de hauteur bornée d'une certaine surface cubique singulière*. Astérisque **251** (1998), 51–77.

[10] R. de la Bretèche, *Compter des points sur des variétés toriques*. Journal of Number Theory **87** (2001), n° 2, 315–331.

[11] R. de la Bretèche, *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de del Pezzo de degré 5*. Duke Math. J. **113** (2002), n° 3, 421–464.

[12] R. DE LA BRETÈCHE, T.D. BROWNING, *On Manin's conjecture for singular del Pezzo surfaces of degree four, I.* Michigan Mathematical Journal **55** (2007), 51–80.

[13] R. DE LA BRETÈCHE, T.D. BROWNING, *On Manin's conjecture for singular del Pezzo surfaces of degree four, II.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., à paraître.

[14] R. DE LA BRETÈCHE, T.D. BROWNING, U. DERENTHAL, *On Manin's conjecture for a certain singular cubic surface.* Annales scientifiques de l'ENS, 4-ème série, **40** (2007), 1–50.

[15] R. DE LA BRETÈCHE, É. FOUVRY, *L'éclaté du plan projectif en quatre points dont deux conjugués.* J. reine angew. Math. **576** (2004), 63–122.

[16] R. DE LA BRETÈCHE, SIR P. SWINNERTON-DYER, *Fonction zêta des hauteurs associée à une certaine surface cubique.* Bulletin de la SMF **135** (2007), 65–92.

[17] T.D. BROWNING, *The density of rational points on a certain singular cubic surface.* J. Number Theory **119** (2006), 242–283.

[18] T.D. BROWNING, *An overview of Manin's conjecture for del Pezzo surfaces.* Analytic number theory - A tribute to Gauss and Dirichlet (Goettingen, 20th June - 24th June, 2005), Clay Mathematics Proceedings **7** (2007), 39–56.

[19] A. CHAMBERT-LOIR, Y. TSCHINKEL, *Yuri Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I* Compositio Math. **124** (2000), no. 1, 65–93.

[20] A. CHAMBERT-LOIR, Y. TSCHINKEL, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II.* J. Number Theory **85** (2000), no. 2, 172–188.

[21] A. CHAMBERT-LOIR, Y. TSCHINKEL, *Fonctions zêta des hauteurs des espaces fibrés.* Rational points on algebraic varieties, 71–115, Progr. Math. **199**, Birkhäuser, Basel, 2001.

[22] A. CHAMBERT-LOIR, Y. TSCHINKEL, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups.* Invent. Math. **148** (2002), 421–452.

[23] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, *La descente sur les variétés rationnelles.* Journée de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.) Sijthoff, Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, 223–237.

[24] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, *La descente sur les variétés rationnelles, II.* Duke Math. J. **54** (1987), no 2, 375–492.

[25] U. DERENTHAL, *Manin's conjecture for a cubic surface.* ArXiv :math.NT/0504016, (2005).

[26] U. DERENTHAL, Y. TSCHINKEL, *Universal torsors over Del Pezzo surfaces and rational points.* "Equidistribution in Number theory, An Introduction", (A. Granville, Z. Rudnick eds.), 169–196, NATO Science Series II **237**, Springer, (2007).

[27] D. ESSOUABRI, *Prolongements analytiques d'une classe de fonction zêta des hauteurs et applications.* Bull. Soc. Math. France **133** (2) (2005), 297–329.

[28] E. FOUVRY, *Sur la hauteur des points d'une certaine surface cubique singulière.* Astérisque **251** (1998), 31–49.

[29] T. ESTERMANN, *On certain functions represented by Dirichlet series.* Proc. London Math. Soc. **27** (1928), 433–448.

[30] J. FRANKE, Y.I. MANIN, Y. TSCHINKEL, *Rational points of bounded height on Fano varieties.* Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[31] A. GORODNIK, F. MAUCOURANT, H. OH, *Manin's conjecture on rational points of bounded height and adelic mixing.* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 4, **41**, fascicule 3 (2008), 385–437.

[32] B. HASSETT, Y. TSCHINKEL, *Universal torsors and Cox rings.* Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), 149–173, Progr. Math. **226**, Birkhäuser, 2004.

[33] R. HEATH-BROWN, *The density of rational points on cubic surfaces.* Acta Arith. **19** (1997), 17–30.

[34] R. HEATH-BROWN, B.Z. MOROZ, *The density of Rational Points on the cubic surface $X_0^3 = X_1X_2X_3$.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **125** (1999), n° 3, 385–395.

[35] M. N. HUXLEY, *Exponential sums and the Riemann zeta function, V.* Proc. London Math. Soc. (3) **90** (2005), no. 1, 1–41.

[36] A. Ivić, *The Riemann zeta-function.* John Wiley, Sons Inc., New York, (1985).

[37] H. Iwaniec, C.J. Mozzochi, *On the divisor and circle problems*, J. Number Theory **29** (1988), no. 1, 60–93.

[38] N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products, I and II.* Proc. London Math. Soc. (3) **53** (1986), no. 1, 1–47 and 209–236.

[39] Y. Manin, Y. Tschinkel, *Points of bounded height on del Pezzo surfaces.* Compositio Math. **85** (1993), n° 3, 315–332.

[40] E. Peyre, *Hauteurs et nombres de Tamagawa sur les variétés de Fano.* Duke Math. J. **79** (1995), 101–218.

[41] E. Peyre, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels.* Astérisque **251** (1998), 259–298.

[42] E. Peyre, *Points de hauteur bornée et géométrie des variétés (d'après Y. Manin et al.).* Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. Astérisque **282** (2002), Exp. n° 891, ix, 323–344.

[43] E. Peyre, *Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa.* Les XXIIèmes Journées Arithmetiques (Lille, 2001), J. Théor. Nombres Bordeaux 15 (2003), n° 1, 319–349.

[44] E. Peyre, *Counting points on varieties using universal torsors.* Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), 61–81, Progr. Math. **226**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[45] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties.* Astérisque **251** (1998), 91–258.

[46] M. du Sautoy, *Zeta Functions of Groups and Natural Boundaries.* Preprint 2000, 79 pages.

[47] J.A. Shalika, Y. Tschinkel, *Height zeta functions of equivariant compactifications of the Heisenberg group.* Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 743–771, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

[48] J.A. Shalika, R. Takloo-Bighash, Y. Tschinkel, *Rational points on compactifications of semi-simple groups of rank 1.* Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), 205–233, Progr. Math. **226**, Birkhüser Boston, Boston, MA, 2004.

[49] M. Strauch, Y. Tschinkel, *Height zeta functions of twisted products.* Math. Res. Lett. **4** (1997), n° 2-3, 273–282.

[50] M. Strauch, Y. Tschinkel, *Height zeta functions of toric bundles over flag varieties.* Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 3, 325–396.

[51] Sir P. Swinnerton-Dyer, *Counting points on cubic surfaces II.* Geometric methods in algebra and number theory, (Eds. F. Bogomolov and Y. Tschinkel), Progress in Mathematics **235**, Birkhäuser, 2004.

[52] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Cours spécialisés, n° 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.

[53] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd ed., revised by D.R. Heath-Brown. Oxford University Press, 1986.

[54] Y. Tschinkel, *Lectures on height zeta functions of toric varieties.* Geometry of toric varieties, 227–247, Sémin. Congr. **6**, Soc. Math. France, Paris, 2002.

[55] Y. Tschinkel, *Fujita's program and rational points.* "Higher Dimensional Varieties and Rational Points", (K. J. Böröczky, J. Kollár, T. Szamuely eds.), Bolyai Society Mathematical Studies **12**, Springer Verl., 2003, 283–310.

Régis de la Bretèche
Institut de Mathématiques de Jussieu
UMR 7586, Case 7012
Université Paris 7 – Denis Diderot
2, place Jussieu
F-75251 Paris cedex 05
*E-mail*: `breteche@math.jussieu.fr`