JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Gaël RÉMOND

Autour de la conjecture de Zilber-Pink

Tome 21, n° 2 (2009), p. 405-414.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2009__21_2_405_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **21** (2009), 405-414

Autour de la conjecture de Zilber-Pink

par Gaël RÉMOND

Résumé. Nous dressons un rapide panorama de résultats allant dans le sens de la conjecture suivante : l'intersection d'une sous-variété X d'une variété semi-abélienne A et de l'union de tous les sous-groupes algébriques de A de codimension au moins $\dim X + 1$ n'est pas Zariski-dense dans X dès que X n'est pas contenue dans un sous-groupe algébrique strict de A.

Abstract. We describe some results toward the following conjecture: if X is an irreducible subvariety of a semi-abelian variety A, its intersection with the union of all algebraic subgroups A of codimension greater than the dimension of X is not Zariski-dense in X, unless X is contained in a proper algebraic subgroup of A.

1. Le problème

Nous nous proposons ici de décrire quelques résultats en direction de la conjecture suivante.

Conjecture 1.1. *Soient A une variété semi-abélienne sur un corps K de caractéristique zéro et X un sous-schéma fermé intègre de A qui n'est contenu dans aucun sous-schéma en groupes de A différent de A. Alors l'ensemble*

$$X(K) \cap \bigcup_{\dim X + \dim G < \dim A} G(K)$$

n'est pas dense dans X (l'union porte sur les sous-schémas en groupes G de A vérifiant la condition de dimension).

Rappelons qu'une variété semi-abélienne est une extension d'une variété abélienne par un tore. Si nous supposons K algébriquement clos (ce qui n'est pas une restriction dans la conjecture), nous pouvons écrire une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m},K}^n \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

où A_0 est une variété abélienne sur K. Dans la suite, nous nous intéresserons surtout aux deux cas extrêmes $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m},K}^n$ ou $A = A_0$ (cas torique et abélien).

Dans le cas torique, les sous-schémas en groupes de $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m},K}^n$ correspondent précisément aux lieux des zéros de systèmes d'équations de la forme

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = 1$$

où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. De plus la dimension d'un tel sous-schéma en groupes G s'obtient comme $n - \mathrm{rg}\Lambda$ si Λ désigne le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les différents $(a_1, \ldots, a_n)$ apparaissant dans un système d'équations de G. De cette façon, la conjecture s'intéresse aux points de X vérifiant au moins $\dim X + 1$ relations de dépendance multiplicative comme ci-dessus indépendantes entre elles.

Une description analogue existe dans le cas abélien mais la formulation se complique un peu. Alors que dans le cas torique nous n'avons qu'une seule brique élémentaire $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, qu'elle est de dimension 1 et que ses seuls endomorphismes sont triviaux ($\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = \mathbb{Z}$), les variétés abéliennes simples existent en nombre infini, en toute dimension et avec des anneaux d'endomorphismes très variés. De plus une variété abélienne ne s'écrit pas en général comme produit de variétés abéliennes simples. Pour la conjecture on se ramène toutefois à ce cas-là (par isogénies) et si $A = \prod_i A_i^{n_i}$ où les A_i sont simples et deux à deux non isogènes on peut se contenter de considérer les sous-schémas en groupes $G = \prod_i G_i$ où $G_i \subset A_i^{n_i}$ est donné par des relations à coefficients dans $\mathrm{End}(A_i)$. La différence majeure avec le cas torique réside dans le fait qu'une telle relation fait maintenant chuter la dimension de G_i non pas de 1 mais de $\dim A_i$. La dimension de G prend donc la forme $\sum_i (\dim A_i)(n_i - \mathrm{rg}\Lambda_i)$. En particulier, il n'existe pas en général de sous-schémas en groupes de toutes dimensions dans A et ceci est source de difficultés (notamment si l'on cherche une condition optimale dans la conjecture).

Signalons ici que la conjecture 1.1 se trouve sous différentes formes dans la littérature. Elle apparaît telle quelle dans l'article de R. Pink ([P, 5.1]) qui la voit comme cas particulier d'une formulation plus générale sur les variétés de Shimura mixtes qui contient également la conjecture d'André-Oort. Antérieurement, B. Zilber avait le premier conjecturé un énoncé impliquant le nôtre (voir [Z, conjecture 2]). Ensuite, plusieurs variantes sont envisagées dans [BMZ4] par E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier qui sont à l'origine des premiers résultats démontrés sur ce problème (voir [BMZ1]). Enfin S. Zhang (non publié) a aussi considéré ces questions : un cas particulier de sa conjecture est cité dans [BMZ3].

2. Une stratégie

Pour faciliter l'exposition, nous écrirons désormais

$$A^{[r]} = \bigcup_{\mathrm{codim} G \geq r} G(K)$$

où r est un entier avec $0 \leq r \leq \dim A$ et où G parcourt tous les sous-schémas en groupes de A de codimension au moins r. De cette façon, la conjecture 1.1 concerne l'intersection $X(K) \cap A^{[\dim X+1]}$. En l'affaiblissant, elle stipule aussi la non-densité de $X(K) \cap A^{[\dim A]} = X(K) \cap A(K)_{\mathrm{tors}}$ (un point est de torsion si et seulement s'il est contenu dans un sous-schéma en groupes fini). On reconnaît le problème de Manin-Mumford qui a été résolu pour les variétés abéliennes par M. Raynaud [Ray], pour les tores par M. Laurent [La] et pour les variétés semi-abéliennes par M. Hindry [Hi]. On notera que l'on peut alors dans ce cas affaiblir aussi l'hypothèse : il suffit que X ne soit pas composante d'un sous-schéma en groupes de A pour que $X(K) \cap A(K)_{\mathrm{tors}}$ ne soit pas dense dans X.

Si nous voyons donc la conjecture 1.1 comme une extension de la question de Manin-Mumford, il devient naturel de nous demander comment elle se combine avec d'autres extensions de cette question. En particulier, le problème de Mordell-Lang consiste à généraliser l'intersection $X(K) \cap A(K)_{\mathrm{tors}}$ en $X(K) \cap \Gamma$ où Γ est n'importe quel sous-groupe de rang fini de $A(K)$ (le rang est la dimension de $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$ et $A(K)_{\mathrm{tors}}$ est bien un exemple de sous-groupe de rang fini car $A(K)_{\mathrm{tors}} \otimes \mathbb{Q} = 0$). Si l'on cherche à inclure une généralisation de ce type dans la conjecture 1.1, on se rend compte qu'elle la contient déjà ! En effet, par un phénomène un peu surprenant à première vue, elle est équivalente à la formulation suivante.

Conjecture 2.1. *Soient A une variété semi-abélienne sur un corps K de caractéristique zéro, X un sous-schéma fermé intègre de A qui n'est contenu dans aucun translaté d'un sous-schéma en groupes de A différent de A et Γ un sous-groupe de rang fini de $A(K)$. Alors l'ensemble $X(K) \cap (\Gamma + A^{[\dim X+1]})$ n'est pas dense dans X.*

L'équivalence des deux énoncés se démontre sans trop de difficultés (voir [P] pour le cas semi-abélien général, les cas abélien et torique sont encore plus simples).

Comme celui de Manin-Mumford, le problème de Mordell-Lang est un théorème d'après M. Laurent [La] pour les tores, G. Faltings [F1, F2] et M. Hindry [Hi] pour les variétés abéliennes et P. Vojta [V2] et M. McQuillan [McQ] en général. Dans la suite, nous souhaitons montrer comment l'on peut s'inspirer des méthodes employées dans ce cadre pour attaquer la conjecture 2.1. Parce que la notion de hauteur est un outil crucial, nous supposerons désormais que $K = \overline{\mathbb{Q}}$. Au moins dans le cas torique, E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier ont montré que ceci n'est pas une restriction : si la conjecture 1.1 est vraie pour $K = \overline{\mathbb{Q}}$, elle est vraie en général (voir [BMZ6] ; un cas particulier se trouve dans [BMZ2]).

Nous supposons donc qu'une hauteur $h\colon A(K) \to \mathbb{R}_+$ est fixée (associée à un faisceau inversible ample sur une compactification de A). Tant dans la conjecture 2.1 que dans le problème de Mordell-Lang, il s'agit de montrer la non-densité d'un ensemble de la forme $X(K) \cap S$. L'examen du second cas suggère de subdiviser le travail comme suit.

(1) Identifier un ensemble exceptionnel $Z \subset X$.
(2) Montrer que Z est fermé.
(3) Montrer que $(X \setminus Z)(K) \cap S$ est de hauteur borné.
(4) En déduire que $(X \setminus Z)(K) \cap S$ est fini.
(5) Traiter le cas dégénéré où $Z = X$.

Avant de décrire l'application de cette stratégie à la conjecture qui nous intéresse, nous l'illustrons brièvement dans un cas plus simple, celui de [F2] : A est une variété abélienne et $S = \Gamma$ est un sous-groupe de type fini donc défini sur un corps de nombres.

(1) L'ensemble Z est l'union des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles inclus dans X.
(2) On note que pour une sous-variété abélienne non nulle B de A l'ensemble

$$Z_B = \{x \mid x + B \subset X\} = \bigcap_{b \in B} X - b$$

est un fermé de degré borné indépendamment de B donc il en va de même de

$$B_1 = \mathrm{Stab}(Z_B) = \bigcap_{z \in Z_B} Z_B - z.$$

En outre si B_1^0 est la composante neutre de B_1 il vient $Z_B \subset Z_{B_1^0}$. Par suite l'ensemble Z défini en (1) comme l'union des Z_B devient l'union finie des $Z_{B_1^0}$ donc est fermé.
(3) C'est la partie difficile : elle s'articule autour d'une inégalité de hauteurs obtenue par approximation diophantienne que j'appelle inégalité de Vojta en référence à [V1] qui a introduit sur les courbes (cadre de la conjecture de Mordell dont il donne une nouvelle preuve) la méthode que [F1] généralise. On y revient plus bas.
(4) Étant défini sur un corps de nombres, l'ensemble $(X \setminus Z)(K) \cap \Gamma$ est fini si et seulement s'il est de hauteur bornée (théorème de Northcott).
(5) Si $Z = X$ alors $Z_B = X$ pour une certaine sous-variété abélienne B non nulle comme ci-dessus et l'on peut remplacer $X \subset A$ par $X/B \subset A/B$ (car $B \subset \mathrm{Stab}(X)$) puis raisonner par récurrence sur la dimension.

3. Des résultats

Nous présentons maintenant les faits connus sur notre problème en les inscrivant dans le cadre ci-dessus (sans respecter l'ordre chronologique). Disons en bref que les étapes (1) et (2) sont résolues tandis que (3) est démontrée en général dans le cas abélien et seulement dans des cas particuliers pour les tores ; pour (4) c'est exactement le contraire et (5) est ouvert sauf si $\dim X = 1$. Voyons le détail.

(1) L'ensemble Z adapté au problème se décrit comme la partie de X formée des points x pour lesquels il existe une sous-variété semi-abélienne B de A telle que

$$\dim_x X \cap (x + B) > \max(0, \dim X + \dim B - \dim A).$$

Il s'agit du lieu des intersections de dimension anormalement élevée avec des translatés. Un ensemble de ce type apparaît dans [R2] pour les variétés abéliennes (bien que des variantes plus fines existent, voir [R4]). Pour les tores, il est noté $X \setminus X^{oa}$ dans [BMZ4].

(2) La fermeture de Z est établie dans [BMZ4] pour les tores et dans [R4] pour les variétés abéliennes en suivant la même méthode (un critère différentiel de dimension des fibres). Le cas général semi-abélien se déduit d'un théorème de Kirby [K] qui travaille dans le langage de la théorie des modèles.

(3) (ab) Pour les variétés abéliennes, nous montrons dans [R3] que l'intersection $(X \setminus Z)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (\Gamma + A^{[\dim X+1]})$ est de hauteur bornée au moyen d'une inégalité de Vojta uniforme (pour le fait que l'ensemble exceptionnel de [R3] peut être remplacé par le présent Z, plus gros, voir [R4]).

(t) Pour les tores, E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier montrent le résultat avec $\Gamma = 0$ dans les cas suivants : $\dim X = 1$ [BMZ1], $\mathrm{codim} X \leq 2$ [BMZ4], X est un plan [BMZ5]. En outre, G. Maurin a adapté la méthode basée sur une inégalité de Vojta uniforme pour traiter le cas des courbes ($\dim X = 1$) mais sans restriction sur Γ (voir [Mau]).

(4) (t) Pour les tores, l'approche initiale de [BMZ1] s'appuie sur des estimations en direction du problème de Lehmer. Grâce aux résultats de F. Amoroso et S. David [AD], elle permet de résoudre cette étape complètement pour les tores (voir [BMZ5]).

(ab) Pour les variétés abéliennes, la même méthode pourrait s'appliquer mais les faits connus sur le problème de Lehmer abélien sont moins satisfaisants. Dans [R2] nous montrons comment une conjecture de Sinnou David permettrait de démontrer l'étape (4) en général. Le travail récent de María Carrizosa [C] sur cette conjecture fournit une solution pour cette étape lorsque A est à multiplications complexes.

(5) Si X est une courbe, on a ou bien $Z = \emptyset$ ou bien $Z = X$ (ici la fermeture (2) est évidente) et ce dernier cas n'arrive que lorsque $X \subset x + B$ avec $B \neq A$ dans les notations de (1). Ainsi sous l'hypothèse de la conjecture 2.1 nous avons $Z = \emptyset$ et la preuve est terminée (modulo (3) ou (4)). En revanche, lorsque $\dim X \geq 2$, on constate facilement

qu'il existe des cas où l'hypothèse de la conjecture 2.1 est vérifiée alors que $Z = X$. Aucun résultat n'existe à ma connaissance pour combler cette lacune.

Si l'on combine les résultats dans les cas les plus favorables, nous pouvons donner les énoncés suivants.

Théorème 3.1. *La conjecture 2.1 est vraie lorsque* $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ *et* $\dim X = 1$.

C'est le résultat de [Mau] conjugué avec le principe de spécialisation de [BMZ6].

Théorème 3.2. *La conjecture 2.1 est vraie lorsque sont vérifiées les trois conditions*

- $K = \overline{\mathbb{Q}}$,
- A *est à multiplications complexes et*
- $\dim(X + B) = \min(\dim X + \dim B, \dim A)$ *pour toute sous-variété abélienne* B *de* A.

On réunit [R3, R4] avec [C]. La dernière condition assure $Z \neq X$.

4. Inégalité de Vojta

Pour terminer nous revenons sur l'étape (3) dans le cas abélien pour indiquer les principales idées entrant en jeu. D'une certaine façon, il s'agit d'appliquer la méthode de Vojta-Faltings à l'image de X dans chacun des quotients A/B où B est une sous-variété abélienne de A avec $\dim X + \dim B < \dim A$. Techniquement, nous préférons faire intervenir des endomorphismes de A, ce qui est possible car A/B est isogène à une sous-variété abélienne de A, et donc de parler de l'image de X par tous les endomorphismes $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ avec $\mathrm{rg}\varphi > \dim X$.

Maintenant, vu ce que nous cherchons à démontrer, nous supposons bien évidemment $Z \neq X$ (où Z est l'ensemble défini à l'étape (1)). On vérifie alors sans difficultés que cette condition entraîne à la fois $\dim \varphi(X) = \dim X$ et $\dim \mathrm{Stab}(\varphi(X)) = 0$ pour tout φ comme ci-dessus : nous retrouvons bien les hypothèses nécessaires pour appliquer la méthode de Vojta-Faltings à $\varphi(X)$. Dans celle-ci on considère un morphisme

$$\begin{array}{rccc} \alpha_a\colon & \varphi(X)^m & \longrightarrow & A^{m-1} \\ & (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & (a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1})_{1 \le i \le m-1} \end{array}$$

associé à $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ où $m = \dim \varphi(X) + 1$ et la condition sur le stabilisateur implique que α_a est génériquement fini (voir [F2]). Comme nous souhaitons faire varier φ nous introduisons plutôt

$$\begin{array}{rccc} \beta_{a,\varphi}\colon & X^m & \longrightarrow & A^{m-1} \\ & (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & (\varphi(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}))_{1 \le i \le m-1} \end{array}$$

où a est comme ci-dessus avec $m = \dim X + 1$. L'égalité $\dim \varphi(X) = \dim X$ montre que $\beta_{a,\varphi}$ est encore génériquement fini. Tout le travail consiste à convertir cette information géométrique en une inégalité de hauteurs. Une version faible s'obtient facilement : il existe un ouvert non vide U de X^m tel que la hauteur de $x \in U$ est contrôlée par celle de $\beta_{a,\varphi}(x)$ (on utilise que x est isolé dans la fibre $\beta_{a,\varphi}^{-1}(\beta_{a,\varphi}(x))$). Cependant ceci ne nous dit rien sur la façon dont a et φ apparaissent dans la comparaison. Pour avoir une inégalité exploitable, nous avons besoin d'une dépendance optimale en a, comme dans le cas classique, ainsi qu'en φ, ce qui est l'uniformité annoncée.

Fixons un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur A^{m-1}. Dire que $\beta_{a,\varphi}$ est génériquement fini équivaut en termes de nombre d'intersection à

$$D_{a,\varphi} = (\beta_{a,\varphi}^* \mathcal{L})^{\cdot m \dim X} \cdot X^m > 0.$$

Pour quantifier cette information, nous étudions $D_{a,\varphi}$ comme une fonction de a et φ. Pour a, nous disposons du théorème d'homogénéité de Faltings [F1]

$$D_{a,\varphi} = (a_1 \cdots a_m)^{2 \dim X} D_{(1,\ldots,1),\varphi}$$

et un argument plus direct montre que pour $N \in \mathbb{Z}$

$$D_{a,N\varphi} = N^{2m \dim X} D_{a,\varphi}.$$

En fait, d'après le théorème du cube, $D_{a,\varphi}$ est une fonction polynomiale en φ homogène de degré $2m \dim X$ et, en particulier, nous pouvons l'étendre par continuité à $\varphi \in \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$. Si nous introduisons de plus une norme sur cet espace vectoriel réel de dimension finie, nous avons alors

$$D_{a,\varphi} = \|\varphi\|^{2m \dim X} D_{a,\varphi/\|\varphi\|}.$$

La partie la plus difficile de la preuve consiste à établir

$$D_{(1,\ldots,1),\varphi/\|\varphi\|} \geq c > 0$$

pour un réel c indépendant de φ. Ici une restriction sur φ est indispensable : nous imposons que $\varphi/\|\varphi\|$ appartienne à un certain compact C choisi de sorte que si $\Phi = \{\varphi \in \mathrm{End}(A) \setminus \{0\} \mid \varphi/\|\varphi\| \in C\}$ alors

(a) pour tout $\varphi \in C$ on a $\mathrm{rg}\varphi > \dim X$ et

(b) si B est une sous-variété abélienne de A avec $\dim X + \dim B < \dim A$ alors il existe $\varphi \in \Phi$ tel que B est la composante neutre de $\mathrm{Ker}\varphi$.

Le point (b) dit que C est assez gros pour que nous n'ayons pas perdu d'information tandis que (a) dit qu'il n'est pas trop gros pour que $D_{a,\varphi}$ ne s'y annule pas.

Une fois que l'on a vérifié que C peut être choisi ainsi, l'existence de c résulte de la compacité pourvu que l'on sache montrer

$$\varphi \in K \Longrightarrow D_{a,\varphi} > 0.$$

Il s'agit ainsi d'étendre le fait que $\beta_{a,\varphi}$ est génériquement fini au cas où φ est à coefficients réels. Ceci n'a pas de sens littéral mais peut s'interpréter en termes analytiques. Le cœur de [R3, R4] traite de cela ; on utilise en particulier un théorème d'Ax [Ax] pour montrer que la condition $Z \neq X$ suffit à assurer cette non-annulation plus forte.

En résumé, nous avons pour $\varphi \in \Phi$

$$D_{a,\varphi} \geq c(a_1 \cdots a_m)^{2 \dim X} \|\varphi\|^{2m \dim X}.$$

Cette minoration précise permet d'enclencher la méthode de Vojta telle qu'elle est décrite de manière générale dans [R1] et nous obtenons l'inégalité suivante (voir [R3, proposition 5.1]).

Théorème 4.1. *Il existe des constantes réelles $c_1, c_2, c_3 > 0$ telles que si $x = (x_1, \ldots, x_m) \in (X \setminus Z)(\overline{\mathbb{Q}})^m$, $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ et $\varphi \in \Phi$ on a*

$$h(\beta_{a,\varphi}(x)) = \sum_{i=1}^{m-1} h(\varphi(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1})) \geq \frac{\|\varphi\|^2}{c_1} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h(x_i)$$

pourvu que $a_i \geq c_2 a_{i+1}$ et $h(x_i) \geq c_3$ pour tout i.

Pour être exact, l'estimation de $D_{a,\varphi}$ ne suffit pas vraiment à avoir ceci : il faut aussi connaître des minorations analogues pour $(\beta_{a,\varphi}^* \mathcal{L})^{\cdot d} \cdot Y_1 \times \cdots \times Y_m$ où $Y_i \subset X$, $Y_i \not\subset Z$ (en particulier pour assurer que l'ouvert U évoqué plus haut est bien $(X \setminus Z)^m$).

Voyons maintenant comment l'inégalité ci-dessus débouche sur le résultat attendu à savoir que $(X \setminus Z)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (\Gamma + A^{[\dim X + 1]})$ est de hauteur bornée. Si x appartient à cet ensemble il s'écrit $x = \gamma + P$ où $\gamma \in \Gamma$ et $\varphi(P) = 0$ pour un certain $\varphi \in \Phi$.

Le cas où $\Gamma = 0$ se traite facilement : si $\varphi(x_0) = 0$ l'on choisit $x_1 = \cdots = x_m = x_0$ dans le théorème et l'on trouve $h(\beta_{a,\varphi}(x)) = (m-1)h(0) \geq c_1^{-1} h(x_0)$ (pour un choix quelconque de a satisfaisant $a_i \geq c_2 a_{i+1}$) donc $h(x_0)$ est bornée. Notons ici que pour $\Gamma = 0$ on s'attend en fait au résultat plus fort que $(X \setminus Z)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A^{[\dim X]}$ est de hauteur bornée (voir la conjecture correspondante dans [BMZ4]) et ceci est démontré indépendamment par P. Habegger (voir [Ha]) par une méthode qui présente certains points communs avec ce qui précède (en particulier l'application du théorème d'Ax).

Dans le cas général ($\Gamma \neq 0$) nous supposons avoir une suite $x_i = \gamma_i + P_i \in X \setminus Z$ avec $\gamma_i \in \Gamma$ et $\varphi_i(P_i) = 0$ pour $\varphi_i \in \Phi$ de sorte que $h(x_i)$ tende vers l'infini. Nous faisons plusieurs réductions :

– si la suite des γ_i est de hauteur bornée alors on montre que $h(x_i)$ est aussi bornée en raisonnant sensiblement comme dans le cas $\Gamma = 0$,
– en modifiant les choix de γ_i et P_i à somme fixée on peut supposer $h(\gamma_i) + h(P_i) \leq c h(x_i)$,
– par extraction on suppose $h(\gamma_i / h(\gamma_i)^{1/2} - \gamma_j / h(\gamma_j)^{1/2}) \leq \varepsilon$ (possible dans $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ de dimension finie avec la hauteur de Néron-Tate) et
– par une seconde extraction on suppose que $\|\varphi_i / \|\varphi_i\| - \varphi_j / \|\varphi_j\|\| \leq \varepsilon$ (possible dans $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ de dimension finie).

Alors (en omettant quelques constantes secondaires)

$$\begin{aligned}
h(\beta_{a,\varphi_1}(x)) &= \sum_{i=1}^{m-1} h(\varphi_1(a_i x_i - a_{i+1}x_{i+1})) \\
&\le \sum_{i=1}^{m-1} h(\varphi_1(a_i\gamma_i - a_{i+1}\gamma_{i+1})) + \sum_{i=1}^{m-1} h(\varphi_1(a_i P_i - a_{i+1}P_{i+1})) \\
&\le \|\varphi_1\|^2 \sum_{i=1}^{m-1} h(a_i\gamma_i - a_{i+1}\gamma_{i+1}) \\
&\qquad + \|\varphi_1\|^2 \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h((\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} - \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|})(P_i)) \\
&\le \varepsilon\|\varphi_1\|^2 (\sum_{i=1}^{m} h(a_i\gamma_i) + \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h(P_i)) \\
&\le c\varepsilon\|\varphi_1\|^2 \sum_{i=1}^{m} a_i^2 h(x_i)
\end{aligned}$$

en choisissant les a_i de sorte que $a_i\gamma_i$ et $a_{i+1}\gamma_{i+1}$ aient sensiblement même hauteur. On peut alors clairement choisir ε pour que ceci contredise le théorème ci-dessus (voir [R3] pour un calcul plus détaillé).

Bibliographie

[AD] F. Amoroso et S. David, *Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série V **3** (2004) 325–348.

[Ax] J. Ax, *Some topics in differential algebraic geometry. I. Analytic subgroups of algebraic groups*. Amer. J. Math. **94** (1972) 1195–1204.

[BMZ1] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier, *Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups*. Internat. Math. Res. Notices **20** (1999) 1119–1140.

[BMZ2] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier, *Finiteness results for multiplicatively dependent points on complex curves*. Michigan Math. J. **51** (2003) 451–466.

[BMZ3] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier, *Intersecting curves and algebraic subgroups : conjectures and more results*. Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006) 2247–2257.

[BMZ4] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier, *Anomalous subvarieties — structure theorems and applications*. Internat. Math. Res. Notices **19** (2007) 1–33.

[BMZ5] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier, *Intersecting a plane with algebraic subgroups of multiplicative groups*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série V **7** (2008) 51–80.

[BMZ6] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier, *On unlikely intersections of complex varieties with tori*. Acta Arith. **133** (2008), 309–323.

[C] M. Carrizosa, *Problème de Lehmer et variétés abéliennes CM*. C. R. Acad. Sci. **346** (2008) 1219–1224.

[F1] G. Faltings, *Diophantine approximation on abelian varieties*. Ann. of Math. **133** (1991) 549–576.

[F2] G. Faltings, *The general case of S. Lang's conjecture*. Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991). Perspect. Math. **15**. Academic Press. San Diego. (1994) 175–182.

[Ha] P. Habegger, *Intersecting subvarieties of abelian varieties with algebraic subgroups of complementary dimension*. Invent. math. **176** (2009), 405–447.

[Hi] M. Hindry, *Autour d'une conjecture de Serge Lang*. Invent. math. **94** (1988) 575–603.

[K] J. Kirby, *The theory of exponential differential equations*. thèse. Oxford. (2006).

[La] M. Laurent, *Équations diophantiennes exponentielles*. Invent. math. **78** (1984) 299–327.

[McQ] M. McQuillan, *Division points on semi-abelian varieties*. Invent. math. **120** (1995) 143–159.

[Mau] G. Maurin, *Courbes algébriques et équations multiplicatives*. Math. Ann. **341** (2008) 789–824.

[P] R. Pink, *A Common Generalization of the Conjectures of André-Oort, Manin-Mumford, and Mordell-Lang*. prépublication (2005).

[Ray] M. Raynaud, *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion*. Arithmetic and geometry, Vol. I. Progr. Math. **35**. Birkhäuser. Boston. (1983) 327–352.

[R1] G. Rémond, *Inégalité de Vojta généralisée*. Bull. Soc. Math. France **133** (2005) 459–495.

[R2] G. Rémond, *Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I*. Math. Ann. **333** (2005) 525–548.

[R3] G. Rémond, *Intersection de sous-groupes et de sous-variétés II*. J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007) 317–348.

[R4] G. Rémond, *Intersection de sous-groupes et de sous-variétés III*. Comm. Math. Helv. à paraître. 21 pages.

[V1] P. Vojta, *Siegel's theorem in the compact case*. Ann. of Math. **133** (1991) 509–548.

[V2] P. Vojta, *Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I*. Invent. math. **126** (1996) 133–181.

[Z] B. Zilber, *Exponential sums equations and the Schanuel conjecture*. J. London Math. Soc. (2) **65** (2002) 27–44.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France
E-mail: `Gael.Remond@ujf-grenoble.fr`