JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX
anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Toufik ZAIMI

Commentaires sur quelques résultats sur les nombres de Pisot

Tome 22, n° 2 (2010), p. 513-524.
<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2010__22_2_513_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **22** (2010), 513-524

Commentaires sur quelques résultats sur les nombres de Pisot

par Toufik ZAIMI

Résumé. Soit θ un nombre réel, avec $\theta > 1$, et soit $A_{[\theta]}$ l'ensemble des nombres $P(\theta)$ pour P décrivant les polynômes à coefficients dans $\{0, 1, ..., [\theta]\}$. En utilisant des résultats d'Yves Meyer sur les ensembles harmonieux, on montre que θ est un nombre de Pisot si et seulement si l'ensemble $A_{[\theta]} \cup (-A_{[\theta]})$ est un ensemble de Meyer, et on déduit quelques résultats déjà prouvés par Y. Bugeaud ou P. Erdös et V. Komornik, sur le spectre des nombres de Pisot. Les mêmes outils permettent aussi de montrer que pour $\varepsilon \in]0, 1]$, les ε-nombres de Pisot appartenant à un corps de nombres algébriques réel K, et de degré égal à celui de K, forment un ensemble de Meyer.

Abstract. *Comments on some results about Pisot numbers.*

Using some results of Yves Meyer on harmonious sets, we prove that a real number $\theta > 1$ is a Pisot number if and only if $A_{[\theta]} \cup (-A_{[\theta]})$, where $A_{[\theta]}$ is the set of polynomials with coefficients in $\{0, 1, ..., [\theta]\}$ evaluated at θ, is a Meyer set. This allows us to deduce certain related results of Y. Bugeaud or P. Erdös and V. Komornik. By the same tools we also show that for $\varepsilon \in]0, 1]$, the set of ε-Pisot numbers which are contained in a real algebraic number field K and have the same degree as K, is a Meyer set.

1. Introduction

Yves Meyer a introduit, en 1969, à propos de l'étude de quelques sujets d'analyse harmonique, la notion d'ensemble harmonieux dans un groupe abélien localement compact (a. l. c.) [6]. Une classe importante des ensembles harmonieux est celle des ensembles de Meyer, également appelés quasicrystaux [7], et qui contient à son tour la famille distinguée des modèles. Ces ensembles sont des objects mathématiques remarquables dans l'étude de quelques structures non-périodiques, et ont des applications en physique (cf. [5] et [7]). On va montrer, dans ces pages, qu'il est possible de retrouver des résultats sur les nombres de Pisot, déjà prouvés par Y. Bugeaud [1] ou P. Erdös et V. Komornik [3] ou A. H. Fan et J. Schmeling [4], à l'aide de résultas d'Y. Meyer [6] et de J. Lagarias [5], sur les

Manuscrit reçu le 4 mars 2009, révisé le 31 décembre 2009.

ensembles de Meyer. Comme à l'accoutumée on désigne par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ le corps des nombres réels et l'anneau des entiers rationnels (ou bien des entiers) respectivement. Dans ce qui suit, le degré et les conjugués d'un nombre algébrique sont considérés sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. De même le degré, le discriminant et une base d'un corps de nombres algébriques sont également considérés sur $\mathbb{Q}$. On désigne par θ et m, respectivement un nombre réel supérieur à 1, et un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs. Rappelons enfin que le réel θ appartient à l'ensemble des nombres de Pisot, usuellement noté S, s'il est un entier algébrique, et si ses conjugués, autres que lui-même, sont de module inférieur à 1.

Dans les trois paragraphes qui suivent on rappelle des résultats connus sur les modèles dans un groupe a. l. c., sur les ensembles de Meyer dans $\mathbb{R}^m$, et enfin sur les ensembles harmonieux réels. On retrouve ainsi dans le quatrième paragraphe le théorème principal de [4]. On montre également dans le dernier paragraphe que le réel θ est un nombre de Pisot si et seulement si l'ensemble $A_{[\theta]}(\theta) \cup (-A_{[\theta]}(\theta))$, où

$$A_m = A_m(\theta) := \{a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_0 \mid \ n \in \mathbb{N},\ a_k \in \{0, 1, ..., m\}\}$$

et la notation $[\ ]$ désigne la fonction partie entière ($[\theta]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à θ), est un ensemble de Meyer. On déduit de cette dernière équivalence, un théorème montré dans [1], puis dans [3], et qui dit : Pour que θ appartienne à S il faut et il suffit que pour chaque m, la quantité

$$l_m(\theta) = \inf B_m(\theta) \cap]0, \infty[,$$

où

$$B_m = B_m(\theta) := A_m(\theta) - A_m(\theta),$$

soit non nulle. En outre, on obtient l'inégalité

$$m(\theta) := \min_{l_m(\theta)=0} m \leq 3[\theta],$$

pour $\theta \notin S$. Cette dernière majoration du nombre $m(\theta)$ coïncide avec une majoration analogue obtenue dans [3], lorsque $\theta \in]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2[$. Rappelons enfin que l'étude des ensembles $A_m(\theta)$ a débuté dans [2], et que nous ne savons pas si l'égalité $m(\theta) = [\theta]$ est vraie pour tout $\theta \notin S$ (voir [8]).

2. Modèles

Rappelons qu'une partie D d'un groupe a. l. c. G, est dite relativement dense s'il existe un compact K de G telle que $G = D+K$. On dit aussi que la partie D est unifomément discrète s'il existe un voisinage U de 0 dans G tel que $(D-D) \cap U = \{0\}$. Il est clair qu'un sous groupe de G est uniformément discret si et seulement si il est discret. Dans le cas où la topologie de G peut être définie par une distance d invariante par translation pour laquelle la boule formée des points $x \in G$ tels que $d(x, 0) \leq R$ est compacte, pour tout nombre réel $R > 0$ (c'est le cas où $G = \mathbb{R}^m$), dire que D est relativement dense (respectivement uniformément discrète) revient à dire qu'il existe un nombre réel $R > 0$ tel que pour tout $x \in G$ il existe $y \in D$ satisfaisant l'inégalité $d(x, y) \leq R$ (respectivement tel que tout couple (x, y) d'éléments distincts de D satisfait $d(x, y) \geq R$).

Y. Meyer définit un modèle de la façon suivante [6] :

Définition 2.1 *Soit G un groupe a. l. c., et soit D un sous-groupe discret et relativement dense de $G \times \mathbb{R}^{m-1}$ (on convient que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$). On désigne par p_1 et p_2 les projections de $G \times \mathbb{R}^{m-1}$ sur G et $\mathbb{R}^{m-1}$ respectivement. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $D \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) = \{(0, 0)\}$.

(ii) $p_2(D)$ *est dense dans* $\mathbb{R}^{m-1}$.

Soit Ω un ouvert non vide et borné de $\mathbb{R}^{m-1}$. Le modèle Λ défini par ces données est le sous-ensemble de G, image par p_1 de l'ensemble des éléments $d \in D$ tels que $p_2(d) \in \Omega$.

Autrement dit, Λ est l'ensemble $p_1(p_2^{-1}(\Omega))$. La condition (i) peut se traduire par le fait que la restriction de p_1 à D est injective (voir [7]). Dans le cas où $G = \mathbb{R}^n$ et $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble D ci-dessus est un réseau total de $\mathbb{R}^{n+m-1}$, i. e., un sous groupe de $\mathbb{R}^{n+m-1}$ engendré par $n + m - 1$ vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, et donc D est isomorphe et homéomorphe au sous groupe $\mathbb{Z}^{n+m-1}$ de $\mathbb{R}^{n+m-1}$.

On peut construire des modèles réels, i.e., pour $G = \mathbb{R}$ (on dira aussi modèles de $\mathbb{R}$), de la façon suivante (cf. [6]) :

Lemme 2.2 ([6]) *Soient $l_1, ..., l_m$, des formes linéaires sur $\mathbb{R}^m$. Supposons les conditions suivantes satisfaites :*

(i) *les applications $l_1, ..., l_m$, sont linéairement indépendantes,*

(ii) *les coefficients de la forme linéaire l_1 sont linéairement indépendants sur l'anneau $\mathbb{Z}$,*

(iii) *dans l'espace vectoriel réel engendré par les applications $l_2, ..., l_m$, il n'y a pas de forme linéaire non nulle à coefficients entiers.*

Soit Ω un ouvert non vide et borné de $\mathbb{R}^{m-1}$. Alors, l'ensemble des nombres réels $l_1(p)$, pour $p \in \mathbb{Z}^m$ tel que $(l_2(p), ..., l_m(p)) \in \Omega$, est un modèle de $\mathbb{R}$.

En effet, la condition (i) assure que l'endomorphisme λ de $\mathbb{R}^m$ $x \longmapsto \lambda(x) := (l_1(x), ..., l_m(x))$, est un automorphisme continu. Puisque $\mathbb{Z}^m$ est discret et relativement dense dans $\mathbb{R}^m$, il en est de même de

$$D := \lambda(\mathbb{Z}^m).$$

Si $p \in \mathbb{Z}^m$ et satisfait $l_1(p) = 0$, alors $p = 0$, car d'après la condition (ii) les coefficients de l_1 sont indépendants sur $\mathbb{Z}$. Cela assure que si l'on identifie $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$, la restriction de la projection $p_1 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ à D, est injective. Pour montrer que l'ensemble

$$E := p_2(D) = \{(l_2(p), ..., l_m(p)) \mid p \in \mathbb{Z}^m\}$$

est dense dans $\mathbb{R}^{m-1}$, on considére son orthogonal $E^\perp$ dans la dualité de Pontryagin $(x, y) \mapsto e^{2i\pi(x_2y_2+\cdots+x_my_m)}$, où $x = (x_2, ..., x_m)$ et $y = (y_2, ..., y_m)$, entre $\mathbb{R}^{m-1}$ et lui-même. Alors, $E^\perp$ est l'ensemble des $y = (y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{m-1}$ tels que l'on ait

$$y_2l_2(p) + \cdots + y_ml_m(p) \in \mathbb{Z}$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}^m$. La forme linéaire sur $\mathbb{R}^m$, $y_2l_2 + \cdots + y_ml_m$, doit donc être à valeurs entières sur $\mathbb{Z}^m$, i. e., être à coefficients entiers, ce qui, d'après la condition (iii) n'est possible que si y_2, ..., y_m, sont tous nuls. Donc

$$E^\perp = \{0\},$$

et par suite E est dense dans $\mathbb{R}^{m-1}$. Ainsi la condition (ii) de la définition 2.1 est vraie, et $\Lambda = p_1(D \cap p_2^{-1}(\Omega))$ est un modèle de $\mathbb{R}$.

Par exemple, $\mathbb{Z}$ est un modèle réel. En effet, il suffit de prendre, dans l'exemple ci-dessus, $m = 1$, l_1 l'identité de $\mathbb{R}$, et $\Omega = \{0\}$; le groupe D ci-dessus est égal à $\mathbb{Z}$, et $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Pour déterminer des modèles de $\mathbb{R}$, on peut aussi considérer des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, et on se ramene au cas réel de la façon suivante :

Lemme 2.3 *Soient $L_1, ..., L_m$, des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{C}$. Supposons les conditions suivantes satisfaites :*

(i) *Les applications $L_1, ..., L_m$, sont linéairement indépendantes* sur $\mathbb{C}$.

(ii) *La forme linéaire L_1 satisfait $L_1(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}$, et ses coefficients sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.*

(iii) *Dans l'espace vectoriel complexe engendré par les $L_2, ..., L_m$, il n'existe pas de forme linéaire non nulle à coefficients entiers.*

(iv) *L'ensemble $\{L_1, ..., L_m\}$ est stable par conjugaison complexe.*

Supposons L_k réelle pour $k \in \{1, ..., r\}$, et $\overline{L_k} = L_{k+(m-r)/2}$ si $r + 1 \leq k \leq (m+r)/2$. Soit W un ouvert non vide et borné de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^{(m-r)/2}$ (on convient que $\mathbb{R}^0 \times \mathbb{C}^{(m-1)/2} = \mathbb{C}^{(m-1)/2}$ et $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{C}^0 = \mathbb{R}^{m-1}$). Alors, l'ensemble des nombres réels $L_1(p)$, pour $p \in \mathbb{Z}^m$ tel que $(L_2(p), ..., L_{(m+r)/2}(p)) \in W$, est un modèle réel.

En raison de la condition (iv), l'entier $m - r$ est pair, ce qui justifie l'indexation des L_k. Le lemme découle alors du précédent, appliqué aux formes linéaires réelles $(l_k)_{k\in\{1,...,m\}}$ sur $\mathbb{R}^m$ ainsi définies :

$$l_k := L_k$$

pour $k \in \{1, ..., r\}$, puis, si $r+1 \leq k \leq (m+r)/2$ et $x \in \mathbb{R}^m$, alors

$$l_k(x) := \frac{L_k(x) + L_{k+(m-r)/2}(x)}{2} = \mathrm{Re}(L_k(x))$$

et

$$l_{k+(m-r)/2}(x) := \frac{L_k(x) - L_{k+(m-r)/2}(x)}{2i} = \mathrm{Im}(L_k(x)).$$

L'ouvert Ω de $\mathbb{R}^{m-1}$ est formé de l'image réciproque de W par la bijection bicontinue de $\mathbb{R}^{m-1}$ dans $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^{(m-r)/2}$ faisant correspondre au point $(z_2, ..., z_m)$ le point $(Z_2, ..., Z_{(m+r)/2})$ défini par :

$$Z_k = z_k$$

si $2 \leq k \leq r$, et

$$Z_k = z_k + iz_{k+(m-r)/2}$$

lorsque $r+1 \leq k \leq (m+r)/2$.

Corollaire 2.4 ([6]) *Soit K un corps de nombres algébriques réel, de degré m, et soient $\sigma_1, ..., \sigma_m$, les différent plongements de K dans $\mathbb{C}$, où σ_1 est l'identité sur K. On peut supposer σ_k réel pour $k \in \{1, ..., r\}$, et $\overline{\sigma_k} = \sigma_{k+s}$, où $s := (m-r)/2$, si $r+1 \leq k \leq r+s$.*

Soient $\varepsilon_2, ..., \varepsilon_{r+s}$, des nombres réels positifs. L'ensemble $\Lambda_{(\varepsilon_2, ..., \varepsilon_{r+s})}$ formé par les entiers algébriques $\alpha \in K$ tels que $0 < |\sigma_j(\alpha)| < \varepsilon_j$ pour $j \in \{2, ..., r+s\}$, est un modèle de $\mathbb{R}$.

En effet, soit $\mathbb{Z}_K$ l'anneau des entiers de K, et soit $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$ une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_K$. On considère les applications linéaires $L_1, ..., L_m$, de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$L_k(x_1, ..., x_m) = x_1\sigma_k(\omega_1) + \cdots + x_m\sigma_k(\omega_m).$$

Ces applications sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ puisque le déterminant $\det_{1\leq k,j\leq m} \sigma_k(\omega_j)$ est non nul (rappelons que le discriminant du corps K est le carré du nombre $\det_{1\leq k,j\leq m} \sigma_k(\omega_j)$). L'application L_1 est réelle, car $K \subset \mathbb{R}$, et ses coefficients sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, puisque les $\omega_1, ..., \omega_m$, forment une base de $\mathbb{Z}_K$ sur $\mathbb{Z}$. Il est clair que la condition (iv) du Lemme 2.3 est satisfaite, puisque si $k \in \{r+1, ..., r+s\}$, alors $\overline{L_k} = L_{k+s}$. Pour vérifier la condition (iii), soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{C}$, telle que

$$L(x) = \lambda_1 L_1(x) + \cdots + \lambda_m L_m(x) = u_1x_1 + \cdots + u_mx_m$$

pour $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, où $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$, et $(u_1, ..., u_m) \in \mathbb{Z}^m$. En affectant à x les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}$, de la dernière relation on obtient l'égalité matricielle

$$u = A\lambda,$$

où

$$u := \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_m \end{bmatrix}, \lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_m \end{bmatrix} \text{ et } A := [\sigma_k(\omega_j)] = \begin{bmatrix} \sigma_1(\omega_1) & ... & \sigma_m(\omega_1) \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ \sigma_1(\omega_m) & ... & \sigma_m(\omega_m) \end{bmatrix}.$$

Comme $\det A = \det_{1\leq k,j\leq m} \sigma_k(\omega_j)$, la matrice A est inversible. Soit $\{\omega'_1, ..., \omega'_m\}$ la base de K duale de la base $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$, c'est-à-dire la base de K qui vérifie les égalités suivantes :

$$Tr_{K/\mathbb{Q}}(\omega_k\omega'_j) = \sum_{l=1}^{m} \sigma_l(\omega_k\omega'_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \ \ et \ (j,k) \in \{1, ..., m\}^2 \\ \\ 0 & \text{si } j \neq k \ \ et \ (j,k) \in \{1, ..., m\}^2. \end{cases}$$

Alors la matrice

$$B := [\sigma_j(\omega'_k)] = \begin{bmatrix} \sigma_1(\omega'_1) & ... & \sigma_1(\omega'_m) \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ \sigma_m(\omega'_1) & ... & \sigma_m(\omega'_m) \end{bmatrix}$$

est l'inverse de A, et l'on a

$$\lambda = Bu.$$

Ainsi on a pour chaque $j \in \{1, ..., m\}$,

$$\lambda_j = \sigma_j(\omega'_1)u_1 + \cdots + \sigma_j(\omega'_m)u_m.$$

Comme les u_k sont des rationnels, on a $\lambda_1 \in K$, et $\lambda_j = \sigma_j(\omega'_1u_1 + \cdots + \omega'_mu_m) = \sigma_j(\lambda_1)$; si de plus $\lambda_1 = 0$, alors $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., m\}$, et donc $L = 0$. On peut ainsi appliquer le lemme 2.3, avec $W = \{(z_2, ..., z_{r+s}) \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \mid |z_j| < \varepsilon_j, \forall\ j \in \{2, ..., r+s\}\}$.

Dans la suite, pour $\varepsilon \in]0,1]$, nous noterons Λ_ε l'ensemble $\Lambda_{(\varepsilon_2,...,\varepsilon_{r+s})}$, avec

$$\varepsilon = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_{r+s},$$

et alors $\alpha \in \Lambda_\varepsilon$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ et $0 < |\sigma_j(\alpha)| < \varepsilon$ pour tout $j \in \{2, ..., m\}$, puisque lorsque $j \in \{r+s+1, ..., m\}$, on a

$$\sigma_j(\alpha) = \overline{\sigma_{j-s}(\alpha)}$$

et donc

$$|\sigma_j(\alpha)| = |\sigma_{j-s}(\alpha)|.$$

3. Ensembles de Meyer

Dans [5], J. Lagarias a montré la propriété qui suit.

Théorème 3.1 ([5]) *Soit Λ une partie relativement dense de $\mathbb{R}^m$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'ensemble Λ est uniformément discret, et il existe un ensemble fini F tel que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$.*

(ii) *L'ensemble $\Lambda - \Lambda := \{x - y \mid (x, y) \in \Lambda \times \Lambda\}$ est uniformément discret.*

Nous adopterons la condition (ii) de ce théorème comme définition des ensembles de Meyer :

Définition 3.2 *Une partie Λ de $\mathbb{R}^m$ est dite ensemble de Meyer si elle est relativement dense et si $\Lambda - \Lambda$ est uniformément discret.*

Il est bien évident qu'un ensemble de Meyer Λ est a fortiori uniformément discret, et que $\Lambda - \Lambda$ est relativement dense. D'autres caractérisations des ensembles de Meyer peuvent être trouvées dans [7].

4. Ensembles harmonieux réels

Soit π l'homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour $\zeta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on pose

$$\|\zeta\| = \min\{\ |x| \ \mid \ x \in \mathbb{R},\ \pi(x) = \zeta\}.$$

Définition 4.1 *Soit Λ une partie de $\mathbb{R}$, et soit $Gr(\Lambda)$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par Λ. On dit que Λ est harmonieuse si pour tout homomorphisme χ de $Gr(\Lambda)$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|\chi(\lambda) - \pi(t\lambda)\| < \varepsilon,$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un groupe abélien divisible, tout homomorphisme d'un sous-groupe d'un groupe abélien quelconque H vers $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ peut être prolongé en un homomorphisme de H dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et par suite, une partie Λ de $\mathbb{R}$ est harmonieuse si et seulement si, pour tout homomorphisme χ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|\chi(\lambda) - \pi(t\lambda)\| < \varepsilon$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Cela rend évident le fait que si Λ est harmonieuse, il en est ainsi de $-\Lambda$ et de $\Lambda \pm \Lambda$.

Notons aussi que toute partie d'un ensemble harmonieux est harmonieuse. Y. Meyer établit dans [6] que :

Proposition 4.2 ([6]) *Toute partie harmonieuse de $\mathbb{R}$ est uniformément discrète.*

Il en résulte que toute partie harmonieuse relativement dense Λ de $\mathbb{R}$ est un ensemble de Meyer, car $\Lambda - \Lambda$ étant alors harmonieuse, est aussi uniformément discrète. Réciproquement, de [6] et [5] (cf. aussi [7]) on obtient :

Théorème 4.3 *Une partie de $\mathbb{R}$ est un ensemble de Meyer si et seulement si elle est relativement dense, et harmonieuse.*

Y. Meyer [6] établit aussi que :

Théorème 4.4 ([6]) *Tout modèle de $\mathbb{R}$ est un ensemble harmonieux et relativement dense.*

Corollaire 4.5 *Un modèle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de Meyer.*

Soit maintenant K un corps de nombres algébriques réel. Pour $\varepsilon \in]0,1]$, on désigne par S_ε l'ensemble des nombres de Pisot α appartenant à K, de même degré que K, et tels que tous les conjugués de α, autres que lui-même, soient de module inférieur à ε. On peut alors retrouver un résultat de [4] :

Théorème 4.6 ([4]) *L'ensemble $S_\varepsilon \cup (-S_\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.*

On propose ici la démonstration suivante : on va prouver que l'ensemble $S_\varepsilon \cup (-S_\varepsilon)$ coïncide avec le modèle Λ_ε défini ci-dessus, lorsque le degré m du corps K, satisfait l'inégalité $m \geq 2$. Le résultat est trivial pour $m = 1$, car on a $S_\varepsilon = \mathbb{N} \cap [2, \infty[$. Supposons donc $m \geq 2$. L'inclusion $\pm S_\varepsilon \subset \Lambda_\varepsilon$ est évidente. Réciproquement, si $\alpha \in \Lambda_\varepsilon$, alors α un entier algébrique de K, et sa norme

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) := \prod_{j=1}^{m} \sigma_j(\alpha)$$

pour l'extention $K/\mathbb{Q}$, est un entier non nul. L'inégalité $\left| N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \right| \geq 1$, donne immédiatement

$$|\alpha| \geq \prod_{j=2}^{m} \left| \frac{1}{\sigma_j(\alpha)} \right| > \frac{1}{\varepsilon^{m-1}},$$

et donc

$$|\alpha| > 1.$$

Ainsi $\sigma_j(\alpha) \neq \alpha$ pour chaque $j \in \{2, ..., m\}$, et α est de degré exactement m, d'où $\alpha \in \pm S_\varepsilon$.

Rapellons enfin un résultat d'Y. Meyer [6] sur le spectre des nombres de Pisot :

Théorème 4.7 ([6]) *L'ensemble $A_1(\theta)$ est harmonieux si et seulement si θ est un nombre de Pisot.*

Il en résulte que, lorsque $\theta \in S$, les ensemble $A_m(\theta)$ et $B_m(\theta)$ sont harmonieux pour tout m, puisque $B_m(\theta) = A_m(\theta) - A_m(\theta)$ et $A_m(\theta)$ est la somme de m termes de la forme $A_1(\theta)$, i. e., $A_m(\theta) = A_1(\theta) + \cdots + A_1(\theta)$.

5. Une application

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat qui suit.

Théorème 5.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'ensemble $B_m(\theta)$ est uniformément discret pour tout m.*

(ii) *L'ensemble $B_m(\theta)$ est un ensemble de Meyer pour tout $m \geq [\theta]$.*

(iii) *L'ensemble $A_{[\theta]}(\theta) \cup (-A_{[\theta]}(\theta))$ est un ensemble de Meyer.*

(iv) *Le nombre θ appartient à l'ensemble S.*

La preuve de ce théorème est une conséquence immédiate des remarques précédentes, et du lemme suivant :

Lemme 5.2 *Pour tout nombre réel $\theta > 1$, l'ensemble $A_{[\theta]}(\theta) \cup (-A_{[\theta]}(\theta))$ est relativement dense.*

C'est une conséquence de [3], que l'on peut démontrer rapidement en établissant que pour tout nombre réel $x \geq 0$, il existe $t \in A_{[\theta]}$ tel que

$$t \leq x < t + 1.$$

Ceci est trivial si $x \in [0, \theta[$, car il suffit de prendre $t = [x]$. Par récurrence, supposons le résultat prouvé pour $x \in [\theta^{n-1}, \theta^n[$, avec $n \in \mathbb{N}$, et soit maintenant $x \in [\theta^n, \theta^{n+1}[$. Comme $x/\theta \in [\theta^{n-1}, \theta^n[$, il existe $t_{n-1} \in A_{[\theta]}$ tel que

$$t_{n-1} \leq \frac{x}{\theta} < t_{n-1} + 1,$$

et donc

$$0 \leq x - \theta t_{n-1} < \theta.$$

Comme

$$[x - \theta t_{n-1}] \leq x - \theta t_{n-1} < [x - \theta t_{n-1}] + 1,$$

on a

$$t_n \leq x < t_n + 1,$$

où $t_n := \theta t_{n-1} + [x - \theta t_{n-1}] \in A_{[\theta]}$, puisque pour tout $\alpha \in A_{[\theta]}$, et pour tout entier $a \in [0, \theta[$, le nombre $\theta\alpha + a$ appartient à $A_{[\theta]}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 5.1. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, résulte immédiatement du lemme 5.2, qui montre que pour tout $m \geq [\theta]$, l'ensemble B_m, contenant $A_{[\theta]} \cup (-A_{[\theta]})$ est relativement dense. Comme

$B_m - B_m = B_{2m}$, si B_{2m} est uniformément discret, alors B_m est un ensemble de Meyer.

La relation $(ii) \Rightarrow (iii)$, provient du fait que l'ensemble $C := A_{[\theta]} \cup (-A_{[\theta]})$ est relativement dense, et contenu dans $B_{[\theta]}$. Si ce dernier est un ensemble de Meyer, $C - C$, étant contenu dans $B_{[\theta]} - B_{[\theta]}$, est uniformément discret.

L'implication $(iii) \Rightarrow (vi)$, est une conséquence du fait que tout sous-ensemble d'un ensemble harmonieux étant harmonieux, il résulte du théorème 4.3 que toute partie d'un ensemble de Meyer est harmonieuse. La condition (iii) implique donc A_1 est harmonieux, et par suite (d'après le théorème 4.7) le nombre θ appartient à l'ensemble S.

Enfin, la relation $(iv) \Rightarrow (i)$, provient du fait que si θ est un nombre de Pisot, alors l'ensemble B_m est harmonieux, et donc (d'après la proposition 4.2) l'ensemble B_m est uniformément discret.

De l'égalité $B_m(\theta) - B_m(\theta) = B_{2m}(\theta)$ on a

$$l_{2m}(\theta) = \inf\{|x-y| \ \mid (x,y) \in B_m(\theta) \times B_m(\theta),\ x \neq y\},$$

et $B_m(\theta)$ est uniformément discret si et seulement si $l_{2m}(\theta) > 0$. On retrouve ainsi en corollaire du théorème 5.1, un résultat déjà prouvé dans [1] et puis dans [3] :

Corollaire 5.3 *Pour que θ soit un nombre de Pisot, il faut et il suffit que $l_m(\theta) > 0$ pour tout m.*

Cette dernière condition est en effet équivalente à $l_{2m}(\theta) > 0$ pour tout m, car la fonction $m \mapsto l_m(\theta)$ est décroissante. On applique alors la condition (i) du théorème 5.1.

Le corollaire 5.3 peut d'ailleurs être précisé :

Corollaire 5.4 *Si $l_{3[\theta]}(\theta) > 0$, alors $\theta \in S$.*

Nous allons en fait démontrer un résultat légèrement plus précis :

Corollaire 5.5 *Si $l_{2[\theta]}(\theta) > 0$, et si*

$$\inf\{|x-y| \mid (x,y) \in A_{3[\theta]}(\theta) \times A_{[\theta]}(\theta), x \neq y\} > 0,$$

alors θ est un nombre de Pisot.

En effet en utilisant la condition (iii) du théorème 5.1, comme $A_{[\theta]} \cup (-A_{[\theta]})$ est relativement dense, il suffit pour que θ soit un nombre de Pisot, que l'ensemble $D := A_{[\theta]} \cup (-A_{[\theta]}) - A_{[\theta]} \cup (-A_{[\theta]})$ soit uniformément discret. Or

$$D = B_{[\theta]} \cup A_{2[\theta]} \cup (-A_{2[\theta]}),$$

et

$$D - D = B_{2[\theta]} \cup (A_{3[\theta]} - A_{[\theta]}) \cup (A_{[\theta]} - A_{3[\theta]}) \cup A_{4[\theta]} \cup (-A_{4[\theta]}).$$

Dire que D est uniformément discret revient à dire que

$$\inf(D - D)\cap]0, \infty[> 0,$$

ou bien

$$\inf(B_{2[\theta]} \cup (\pm(A_{3[\theta]} - A_{[\theta]})))\cap]0, \infty[> 0,$$

car $\inf(A_{4[\theta]} \setminus \{0\}) = 1$. Par conséquent l'ensemble D est uniformément discret si et seulement si

$$l_{2[\theta]}(\theta) > 0$$

et

$$\inf(\pm(A_{3[\theta]} - A_{[\theta]}))\cap]0, \infty[> 0.$$

Le corollaire 5.5 en résulte, et a fortiori, le corollaire 5.4, puisque

$$B_{2[\theta]} \cup (\pm(A_{3[\theta]} - A_{[\theta]})) \subset B_{3[\theta]}.$$

Notons enfin que le corollaire 5.4 dit que si θ n'est pas un nombre de Pisot, alors $l_{3[\theta]}(\theta) = 0$, et dans ce cas la quantité

$$m(\theta) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid l_m(\theta) = 0\},$$

est bien définie, et satisfait l'inégalité

$$m(\theta) \leq 3[\theta].$$

Il est aussi important de signaler que la majoration

$$m(\theta) \leq [\theta - \frac{1}{\theta}]' + [\theta - 1]',$$

où la notation $[x]'$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x, obtenue dans [3], est meilleure que celle du corollaire 5.4. Toutefois les deux dernières inégalités sont identiques lorsque $\theta \in]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2[$. On ne sait pas si le résultat d'Erdös et Komornick est optimal, et plus précisément si l'égalité $l_{[\theta]}(\theta) = 0$ a lieu pour tout $\theta \notin S$ (voir [8]).

Remerciements. *L'auteur remercie vivement le rapporteur pour la lecture profonde de ce travail.*

Bibliographie

[1] Y. Bugeaud, *On a property of Pisot numbers and related questions.* Acta Math. Hungar. **73** (1996), 33–39.

[2] P. Erdös, I. Joó and V. Komornik, *Characterization of the unique expansion* $1 = \sum_{i \geq 1} q^{-n_i}$ *and related problems.* Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 377–390.

[3] P. Erdös and V. Komornik, *Developments in non integer bases.* Acta Math. Hungar. **79** (1998), 57–83.

[4] A. H. Fan and J. Schmeling, *ε-Pisot numbers in any real algebraic number field are relatively dense.* J. Algebra **272** (2004), 470–475.

[5] J. C. Lagarias, *Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets.* Commun. Math. Phys. **179** (1996), 365–376.

[6] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis.* North-Holland, 1972.

[7] R. V. Moody, *Meyer sets and their duals.* The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order, R. V. Moody, Ed., Kluwer 1997, 403–442.

[8] T. Zaïmi, *On an approximation property of Pisot numbers* II. J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 239–249.

Toufik Zaimi
Département de mathématiques
Université Larbi Ben M'hidi
Oum El Bouaghi 04000, Algérie
E-mail: toufikzaimi@yahoo.com