Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Alina FIRICEL

Sur le développement en fraction continue d'une généralisation de la cubique de Baum et Sweet

Tome 22, n° 3 (2010), p. 629-644.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2010__22_3_629_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **22** (2010), 629-644

Sur le développement en fraction continue d'une généralisation de la cubique de Baum et Sweet

par Alina FIRICEL

Résumé. En 1976, Baum et Sweet ont donné le premier exemple d'une série formelle algébrique de degré 3 sur $\mathbb{F}_2(T)$ ayant un développement en fraction continue dont les quotients partiels sont tous des polynômes en T de degré 1 ou 2. Cette série formelle est l'unique solution dans le corps $\mathbb{F}_2((T^{-1}))$ de l'équation $TX^3 + X - T = 0$. En 1986, Mills et Robbins ont décrit un algorithme permettant de calculer le développement en fraction continue de la série de Baum et Sweet.

Dans cet article, nous considérons les équations plus générales $TX^{r+1} + X - T = 0$, où r est une puissance du nombre premier p. Une équation de ce type admet une unique solution dans le corps $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$. En appliquant une méthode déjà utilisée par Lasjaunias, nous décrivons le développement en fraction continue de ces séries algébriques.

Abstract. *On the continued fraction expansion of a generalization of the Baum and Sweet's cubic*

In 1976, Baum and Sweet gave the first example of an algebraic power series of degree 3 over the field $\mathbb{F}_2(T)$ and whose continued fraction expansion has partial quotients with degree at most 2. This power series is the unique solution in the field $\mathbb{F}_2((T^{-1}))$ at the equation $TX^3 + X - T = 0$. In 1986, Mills and Robbins described an algorithm that allows one to compute the continued fraction expansion of the Baum and Sweet power series.

In this paper, we consider the more general equations $TX^{r+1} + X - T = 0$, where r is a power of a prime number p. Such an equation has a unique solution in the field $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$. Applying an approach already used by Lasjaunias, we described the continued fraction expansion of these algebraic power series.

1. Introduction

Il y a une trentaine d'années, les travaux de Baum et Sweet [1] ont ouvert un nouveau domaine de recherche sur l'approximation diophantienne dans les corps de séries formelles à coefficients dans un corps fini, par le biais

Manuscrit reçu le 14 janvier 2010.

du développement en fraction continue. Ces auteurs ont notamment donné l'exemple d'une série formelle à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_2$, algébrique de degré 3 sur $\mathbb{F}_2(T)$, ayant un développement en fraction continue avec des quotients partiels qui sont tous des polynômes en T de degré 1 ou 2. Dix ans plus tard, Mills et Robbins [5] ont décrit un algorithme qui leur a permis de donner le développement explicite en fraction continue pour la série formelle cubique de Baum et Sweet. Ces travaux ont mis en lumière un sous ensemble de séries formelles algébriques, obtenues comme points fixes de la composée d'une homographie à coefficients entiers (polynômes) avec le morphisme de Frobenius ; ces séries sont alors appelées hyperquadratiques. Le développement en fraction continue a pu être donné explicitement (voir [2, 5, 6] pour plus de références) pour de nombreux exemples de ces séries formelles.

Nous avons observé que pour tout nombre premier p et $r = p^t$, l'équation

$$TX^{r+1} + X - T = 0$$

a une unique solution dans le corps $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$. Pour $r = p = 2$ cette solution est la cubique de Baum et Sweet. Dans cet article, nous donnons le développement en fraction continue de cette solution pour $r > 2$ (voir la partie 3). On peut par ailleurs remarquer que si l'on remplace r par 2 dans les formules obtenues, alors le développement obtenu est impropre (une sous-suite de quotients partiels tend vers 0 dans $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$). Cependant, cette expression, lorsqu'elle est tronquée et rendue propre, donne le développement qui a été obtenu dans [5].

Pour obtenir ce développement nous utilisons une méthode déjà utilisée par Lasjaunias dans [3], qui, bien que proche de l'algorithme de Mills et Robbins, en diffère un peu. Pour illustrer cette méthode, nous l'appliquons dans un premier temps à un autre exemple de série formelle hyperquadratique, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Cet exemple, très célèbre, a été introduit par Mahler [4] dans un article fondateur sur l'approximation diophantienne dans les corps de fonctions.

Nous rappelons brièvement les notations utilisées. Dans ce texte, p est un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ désigne le corps fini à p éléments, $\mathbb{F}_p[T]$, $\mathbb{F}_p(T)$ et $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ sont, respectivement, l'anneau des polynômes, le corps des fonctions rationnelles et le corps des séries formelles (en $1/T$) de la variable T sur $\mathbb{F}_p$. Ainsi

$$\mathbb{F}_p((T^{-1})) = \{0\} \cup \left\{ \sum_{k \le k_0} u_k T^k, k_0 \in \mathbb{Z}, u_k \in \mathbb{F}_p, u_{k_0} \neq 0 \right\}.$$

Ce corps de séries formelles est muni d'une valeur absolue ultramétrique définie par $|\alpha| = |T|^{k_0}$ et $|0| = 0$, où $|T|$ est un réel fixé strictement supérieur à 1. De plus, il est connu que $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ est le completé de $\mathbb{F}_p(T)$ pour cette valeur absolue.

Dans la suite, r est une puissance de p, $r = p^t$, avec $t \geq 1$ entier. Le morphisme de Frobenius défini dans $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ est noté $\alpha \mapsto \alpha^r$. Une série formelle, $\alpha \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$, est dite hyperquadratique si l'on a $\alpha = f(\alpha^r)$ où f est une homographie à coefficients dans $\mathbb{F}_p[T]$.

Tout élément $\alpha \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$ a un développement en fraction continue (infini si α n'est pas une fraction rationnelle) que l'on notera

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}] \tag{1.1}$$

où les $a_i \in \mathbb{F}_p[T]$ (avec $\deg(a_i) > 0$ pour $i > 0$) sont appelés les quotients partiels et les $\alpha_i \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$ sont les quotients complets.

2. Méthode employée et exemple de Mahler

Dans cette partie nous présentons le raisonnement sur lequel les preuves reposent. Nous commençons par un lemme élémentaire concernant les fractions continues. Une courte démonstration en est donnée dans l'article [3].

Nous rappelons déjà la notation suivante. Soit $P/Q \in \mathbb{F}_p(T)$ tel que $P/Q := [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Pour tout $x \in \mathbb{F}_p(T)$, nous noterons

$$\Big[[a_1, a_2, \ldots, a_n], x\Big] := \frac{P}{Q} + \frac{1}{x}.$$

Lemme 2.1. *Soient $a_1, \ldots, a_n, x \in \mathbb{F}_p(T)$. On a la relation suivante :*

$$\Big[[a_1, a_2, \ldots, a_n], x\Big] = [a_1, a_2, \ldots, a_n, x'],$$

avec

$$x' = f_n x + g_n, \tag{2.1}$$

où les f_n, g_n sont des éléments de $\mathbb{F}_p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (voir [3], page 330).

A l'exception du paragraphe 2.2, nous utilisons ce lemme uniquement dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, qui s'énoncent comme suit.

Lemme 2.2. *Soient $a_1, a_2, a_3, x \in \mathbb{F}_p(T)$. On a les relations suivantes :*

$$\Big[[a_1, a_2], x\Big] = [a_1, a_2, y], \ \text{où } y = -a_2^{-2}x - a_2^{-1},$$

$$\Big[[a_1, a_2, a_3], x\Big] = [a_1, a_2, a_3, y], \ \text{où } y = (a_2a_3+1)^{-2}x - a_2(a_2a_3+1)^{-1}.$$

2.1. Premier exemple. Nous allons à présent décrire la suite de quotients partiels d'un ensemble de séries formelles vérifiant un certain type d'équation. Comme corollaire, nous obtenons le développement en fraction continue de la série de Mahler :

$$\Theta_r = 1/T + 1/T^r + 1/T^{r^2} + \cdots + 1/T^{r^k} + \cdots \in \mathbb{F}_p((T^{-1})). \tag{2.2}$$

On peut remarquer que Θ_r est une série algébrique de degré r vérifiant l'équation

$$Tz^r - Tz + 1 = 0. \tag{2.3}$$

Il convient de noter que le développement en fraction continue de Θ_r, donné dans le corollaire 2.1 est déjà connu, même s'il n'a jamais été présenté sous cette forme. En effet, il est exposé dans [2] (p. 215) et peut aussi être déduit de travaux plus anciens de Shallit sur les fractions continues de certains nombres réels [7].

Théorème 2.1. *Soit p un nombre premier et $r = p^t$, $t \geq 1$, avec $r > 2$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$ et soit $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ un ℓ-uplet de polynômes dans $F_p[T]$, avec $a_i(T) \in T\mathbb{F}_p[T]$, pour tout i impair, $1 \leq i \leq l$. Si z est la fraction continue $z = [a_1, a_2, \ldots, a_\ell, z_{\ell+1}]$ vérifiant l'équation :*

$$z^r = -T^2 z_{\ell+1} - T, \tag{2.4}$$

alors la suite de quotients partiels de z, $(a_n)_{n\geq l+1} \in (\mathbb{F}_p[T])^{\mathbb{N}}$ est définie pour $k \geq 0$ par :

$$a_{\ell+4k+1} = -\frac{a_{2k+1}^r}{T^2}, \qquad a_{\ell+4k+2} = -T,$$
$$a_{\ell+4k+3} = a_{2k+2}^r, \qquad a_{\ell+4k+4} = T.$$

Remarque. L'existence de la fraction continue vérifiant (2.4) découle du théorème 1 de l'article [3].

Revenons maintenant à la série Θ_r. On pose $y := 1/\Theta_r$ et $y := [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. D'après (2.2), pour $r > 2$, on a

$$\left| T - \frac{1}{\Theta_r} \right| = \frac{1}{|T^{r-1}\Theta_r|} = \frac{1}{|T|^{r-2}} < 1,$$

et par conséquent $y = T + 1/y_2 = [T, y_2]$. D'après (2.3) on a

$$\frac{T}{y^r} = \frac{T}{y} - 1 = -\frac{1}{Ty_2 + 1},$$

et donc y_2 vérifie la relation :

$$y^r = -T^2 y_2 - T. \tag{2.5}$$

En remarquant que l'équation (2.5) est un cas particulier de l'équation (2.4), où $\ell = 1$ at $a_1 = T$, nous en déduisons directement le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *On a* $\Theta_r = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ *où la suite* $(a_i)_{i\geq 1}$ *est définie par récurrence, pour* $k \geq 0$*, par :*

$$\begin{aligned} a_{4k+1} &= T, & a_{4k+2} &= -a_{2k+1}^r/T^2, \\ a_{4k+3} &= -T, & a_{4k+4} &= a_{2k+2}^r. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 2.1. Nous partons de la relation :

$$z^r = -T^2 z_{\ell+1} - T,$$

qui peut être écrite aussi sous la forme $[a_1^r, z_2^r] = -T^2 z_{\ell+1} - T$, ou encore :

$$\left[[-\frac{a_1^r}{T^2}, -T], -T^2 z_2^r\right] = z_{\ell+1}.$$

En utilisant le lemme 2.2 et en tenant en compte du fait que a_1 est divisible par T, nous en déduisons les relations suivantes :

$$z_{\ell+1} = [-\frac{a_1^r}{T^2}, -T, z'], \text{ avec } z' = z_2^r + T^{-1}.$$

Puisque $|z'| > 1$, on en déduit que $z' = z_{l+3}$. On a donc

$$a_{\ell+1} = -\frac{a_1^r}{T^2},\ a_{\ell+2} = -T \text{ et } z_{l+3} = z_2^r + \frac{1}{T}.$$

Nous appliquons de nouveau le même raisonnement et nous obtenons :

$$z_{l+3} = z_2^r + \frac{1}{T} = [a_2^r + \frac{1}{T}, z_3^r] = [a_2^r, T, z''],$$

avec $z'' = -T^{-2} z_3^r - T^{-1}$. Puisque $r > 2$, on a $|z''| > 1$ et alors, par identification, $z'' = z_{l+5}$. On a donc

$$a_{\ell+3} = a_2^r,\ a_{\ell+4} = T \text{ et } z_{l+5} = -T^{-2} z_3^r - T^{-1}.$$

En résumé,

$$z_{\ell+1} = [-\frac{a_1^r}{T^2}, -T, a_2^r, T, z_{\ell+5}].$$

Plus généralement, par une simple récurrence sur k, on obtient que :

$$z_{2k+1}^r = -T^2 z_{\ell+4k+1} - T.$$

Puisque $a_{2k+1} \in T\mathbb{F}_p[T]$, nous obtenons comme précédemment :

$$z_{\ell+4k+1} = [-\frac{a_{2k+1}^r}{T^2}, -T, a_{2k+2}^r, T, z_{\ell+4k+5}],$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

2.2. Le contexte général. Dans cette partie nous énonçons le raisonnement général et les notations utilisées dans les preuves qui suivent. Ceux-ci restent proches de ceux utilisés par Mills et Robbins dans [5].

Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{F}_p[T]^3$ et soient m, n deux entiers strictement positifs, $m < n$. On dit que z satisfait une relation du type (P, Q, R, m, n) si on a :

$$Pz_m^r = Qz_n + R, \tag{2.6}$$

où la notation z_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, designe un quotient complet de z, comme défini en (1.1).

Dans la suite, nous considérons une série $z = [a_1, a_2, \ldots] \in \mathbb{F}_p((T^{-1}))$ satisfaisant (2.6), avec un triplet (P, Q, R) bien choisi. En fait, il est probable que cette relation soit vraie pour presque toutes les séries formelles hyperquadratiques, mais à notre connaissance, aucun résultat général ne le confirme (le lecteur peut consulter [3], page 333, pour quelques commentaires à ce sujet).

On suppose connus les $n-1$ premiers coefficients partiels : $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (qui peuvent être vus comme une “donnée de départ”). La relation (2.6) implique :

$$Pa_m^r + \frac{P}{z_{m+1}^r} = Qz_n + R,$$

car, par définition, $z_m = [a_m, z_{m+1}]$. Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{Pa_m^r - R}{Q} + \frac{P}{Qz_{m+1}^r} = z_n. \tag{2.7}$$

Puisque

$$\frac{Pa_m^r - R}{Q} \in \mathbb{F}_p(T),$$

cette expression a un développement en fraction continue qui est fini. Il existe ainsi des polynômes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{F}_p[T]$, que l'on peut calculer, tels que :

$$\frac{Pa_m^r - R}{Q} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell].$$

La relation (2.7) devient :

$$\left[[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell], \frac{Qz_{m+1}^r}{P}\right] = z_n,$$

et le lemme 2.1 implique alors que :

$$z_n = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell, z'].$$

A ce moment, si $|z'| > 1$, nous pouvons déjà identifier $a_n = \lambda_1, a_{n+1} = \lambda_2, \ldots, a_{n+l-1} = \lambda_\ell$ et $z_{n+\ell} = z'$.

Par le lemme 2.1 on déduit donc :

$$z_{n+\ell} = f_\ell \frac{Qz_{m+1}^r}{P} + g_\ell,$$

où f_ℓ et g_ℓ appartiennent à $\mathbb{F}_p(T)$ (voir la formule (2.1)). Il existe donc trois polynômes $P_1, Q_1, R_1 \in \mathbb{F}_p[T]$, qu'on peut déterminer explicitement, tels que :

$$P_1 z_{m+1}^r = Q_1 z_{n+\ell} + R_1.$$

En résumé, la connaissance de P, Q, R et a_m nous permet de déterminer les ℓ nouveaux quotients partiels : $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell-1}$ et une nouvelle équation :

$$P_1 z_{m+1}^r = Q_1 z_{n+\ell} + R_1.$$

Dans la suite, nous noterons ce raisonnement par :

$$(P, Q, R, m, n : a_m) \to (P_1, Q_1, R_1, m+1, n+\ell : a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell-1}).$$

Plus généralement, si $X := (P, Q, R, m, n)$ et $Y := (P_\ell, Q_\ell, R_\ell, m+\ell, n+k)$, nous noterons :

$$(X : a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+\ell-1}) \to (Y : a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}) \tag{2.8}$$

pour désigner la suite des raisonnements suivants :

$$\begin{cases} (X : a_m) & \to \quad (X_1 : a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k_1-1}) \\ (X_1 : a_{m+1}) & \to \quad (X_2 : a_{n+k_1}, a_{n+k_1+1}, \dots a_{n+k_2-1}) \\ & \vdots \\ (X_{\ell-1} : a_{m+\ell-1}) & \to \quad (Y : a_{n+k_{\ell-1}}, a_{n+k_{\ell-1}+1}, \dots, a_{n+k-1}). \end{cases}$$

où $X_i := (P_i, Q_i, R_i, m+i, n+k_i)$, pour $1 \le i \le \ell - 1$. La nouvelle équation va donc relier $z_{m+\ell}$ et z_{n+k} de la manière suivante :

$$P_\ell z_{m+\ell}^r = Q_\ell z_{n+k} + R_\ell.$$

Nous remarquons que, lorsque $\ell = n - m$, la relation (2.8) s'écrit :

$$(P, Q, R, m, n : a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}) \to$$
$$(P_{n-m}, Q_{n-m}, R_{n-m} : a_n, a_{n+1} \dots, a_{n+k-1}),$$

ce qui signifie que la connaissance de $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}$ nous permet de calculer les k quotients partiels suivants, à savoir $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$. Nous pouvons alors appliquer de nouveau le même raisonnement, à une équation du type $(P_{n-m}, Q_{n-m}, R_{n-m}, n, n+k)$ ayant comme "donnée de départ" les quotients partiels $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$. L'itération de ce procédé permet ainsi d'obtenir tous les quotients partiels de la série z.

Soient W, W' deux suites finies de polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On note $|W|$ la longueur de W, c'est-à-dire le nombre de ses termes. Alors la relation (2.8) peut être écrite aussi :

$$(P, Q, R, m, n : W) \to (P_{|W|}, Q_{|W|}, R_{|W|}, m + |W|, n + |W'| : W').$$

Pour alléger les notations, nous nous permettons parfois d'écrire :

$$(P, Q, R, m, n : W) \to (P_{|W|}, Q_{|W|}, R_{|W|} : W').$$

3. Généralisation de la cubique de Baum et Sweet

Avant d'énoncer notre résultat principal, nous allons tout d'abord introduire quelques définitions.

Définition. On définit la suite de liste de polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, $(\Gamma_k)_{k\geq 1}$, de la façon suivante. On pose $\Gamma_1 := -T, T^r, T$. Pour $k > 1$, Γ_k est défini récursivement par :

$$\Gamma_k := a_1, a_2, \ldots, a_{2^{k+1}-1} \text{ et } \Gamma_{k+1} := b_1, b_2, \ldots, b_{2^{k+2}-1},$$

où

$$b_{2i-1} = (-1)^{i+k} T \quad \text{ pour } 1 \leq i \leq 2^{k+1}$$

et

$$b_{4i} = a_{2i}^r / T^2 \text{ pour } 1 \leq i \leq 2^k - 1, \quad b_{4i-2} = -a_{2i-1}^r \text{ pour } 1 \leq i \leq 2^k.$$

Définition. On définit la suite de liste de polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, $(\Lambda_k)_{k\geq 1}$, de la façon suivante. On pose $\Lambda_1 := T+1, T-1$, $\Lambda_2 := T, -T^r+1, -T$. Pour $k \geq 3$, Λ_k est défini récursivement par :

$$\Lambda_k := \Lambda_{k-2}, -T^{\lambda_{k-1}}, \Gamma_{k-2},$$

où $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ est défini comme suit :

$$\lambda_1 = r, \quad \lambda_{k+1} = r\lambda_k - 2.$$

Etant donnée une suite $W = a_1, \ldots, a_m$ à valeurs dans $\mathbb{F}_p[T]$, on note $-W := -a_1, \ldots, -a_m$ et $\overline{W} := a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1$.

Définition. On définit la suite de liste de polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, $(\Omega_k)_{k\geq 1}$, de la façon suivante. On pose $\Omega_1 := -T^{\omega_1}$. Pour $k \geq 2$, Ω_k est défini récursivement par :

$$\Omega_k := \Omega_{k-1}, \Lambda_{k-1}, -T^{\omega_k}, -\overline{\Lambda}_{k-1}, -\overline{\Omega}_{k-1}, \tag{3.1}$$

où $(\omega_k)_{k\geq 1}$ est défini comme suit :

$$\omega_1 = r - 2, \quad \omega_{k+1} = r\omega_k - 2.$$

Nous notons Ω_∞ la suite infinie commençant par Ω_k, pour tout $k \geq 1$.

Avec les notations ci-dessus, nous présentons maintenant notre résultat principal.

Théorème 3.1. *Soit p un nombre premier et $r = p^t$, où $t \geq 1$, avec $r > 2$. L'équation*

$$TX^{r+1} + X - T = 0$$

a une unique racine dans le corps $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ dont le développement en fraction continue est :

$$[1, -T-1, \Omega_\infty].$$

3.1. Démonstration du théorème 3.1. Tout d'abord, nous montrons que l'équation :

$$TX^{r+1} + X - T = 0 \tag{3.2}$$

a une unique solution dans le corps $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$.

En effet, de (3.2), on déduit que :

$$X = \frac{T}{TX^r + 1}. \tag{3.3}$$

Nous considérons maintenant l'application $f(X) = T/(TX^r + 1)$ définie sur $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ à valeurs dans $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$. Il n'est pas difficile de voir que f est une application strictement contractante (puisque $r > 2$) et nous savons que $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ est un espace complet pour la distance ultramétrique usuelle. Ainsi, par utilisation du théorème du point fixe, l'équation $f(X) = X$ a une unique solution dans $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$. Celle-ci est donc l'unique solution de l'équation (3.2), que nous noterons dans la suite BS_r.

Soit z la série définie par :

$$BS_r = 1 + \frac{1}{(-T-1) + 1/z}. \tag{3.4}$$

A partir de (3.3) et (3.4), un calcul simple nous conduit à :

$$z = \frac{(-T^r + T - 1)z^r + 1}{T^2 z^r}, \tag{3.5}$$

ce qui entraîne

$$\left| z - \frac{-T^r + T - 1}{T^2} \right| = \frac{1}{|T^2 z^r|} < \frac{1}{|T^4|},$$

l'inegalité $|z^r| > |T^2|$ etant due au fait que $|z| > |T|$ et $r > 2$.

Autrement dit, $(-T^r + T - 1)/T^2$ est une réduite de z, donc les trois premiers quotients partiels de z sont $-T^{r-2}, T+1$ et $T-1$. Ainsi $z = [-T^{r-2}, T+1, T-1, z_4]$ et d'après (3.5) on obtient la relation suivante :

$$z^r = T^2 z_4 + (T+1).$$

Le théorème 3.1 est alors une conséquence directe de proposition ci-dessous.

Proposition 3.1. *Soit z la fraction continue infinie $z := [-T^{r-2}, T+1, T-1, z_4]$ satisfaisant :*

$$z^r = T^2 z_4 + (T+1). \tag{3.6}$$

Alors la suite de quotients partiels de z est Ω_∞.

Notation. On dit qu'une équation est du type A_1 si $P = 1$, $Q = T^2$ et $R = T+1$ et on note $A_1 := (1, T^2, T+1)$. De la même manière, nous allons définir les équations des types suivants :

$$\begin{aligned}
A_2 &:= (1, T^2, -T+1),\\
A_3 &:= (T, -T, -1),\\
A_4 &:= (1, T^2, -T),\\
A_5 &:= (T, -T, 1),\\
A_6 &:= (1, T^2, T).
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations décrites dans la partie 2.2.

Lemme 3.1. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$ et soit $a \in \mathbb{F}_p[T]$. On a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
&(A_1, m, n : a) \to \left(A_2, m+1, n+3 : \frac{a^r}{T^2}, -T+1, -T-1\right) \ \textit{si } a \equiv 0[T],\\
&(A_1, m, n : a) \to \left(A_5, m+1, n+2 : \frac{(a-1)^r}{T^2}, -T\right) \ \textit{si } a \equiv 1[T],\\
&(A_2, m, n : a) \to \left(A_1, m+1, n+3 : \frac{a^r}{T^2}, T+1, T-1\right) \ \textit{si } a \equiv 0[T],\\
&(A_2, m, n : a) \to \left(A_3, m+1, n+2 : \frac{(a-1)^r}{T^2}, T\right) \ \textit{si } a \equiv 1[T],\\
&(A_3, m, n : a) \to (A_4, m+1, n+2 : -a^r, -T) \ \textit{pour tout } a \in \mathbb{F}_p[T],\\
&(A_4, m, n : a) \to \left(A_3, m+1, n+2 : \frac{a^r}{T^2}, T\right) \ \textit{si } a \equiv 0[T],\\
&(A_4, m, n : a) \to \left(A_2, m+1, n+3 : \frac{(a+1)^r}{T^2}, T+1, T-1\right) \ \textit{si } a \equiv -1[T],\\
&(A_5, m, n : a) \to (A_6, m+1, n+2 : -a^r, T) \ \textit{pour tout } a \in \mathbb{F}_p[T],\\
&(A_6, m, n : a) \to \left(A_5, m+1, n+2 : \frac{a^r}{T^2}, -T\right) \ \textit{si } a \equiv 0[T],\\
&(A_6, m, n : a) \to \left(A_2, m+1, n+3 : \frac{(a+1)^r}{T^2}, -T+1, -T-1 :\right)\\
&\qquad\qquad\qquad \textit{si } a \equiv -1[T].
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons prouver le premier cas, c'est à dire le cas où z satisfait une relation du type A_1, avec $a \equiv 0[T]$:

$$z_m^r = T^2 z_n + (T+1).$$

Cette relation s'écrit aussi sous la forme : $[a^r, z_{m+1}^r] = T^2 z_n + (T+1)$ ou bien
$$\frac{a^r}{T^2} - \frac{T+1}{T^2} + \frac{1}{T^2 z_{m+1}^r} = z_n.$$
Puisque a est divisible par T, nous obtenons :
$$\Big[[\frac{a^r}{T^2}, -T+1, -T-1], T^2 z_{m+1}^r\Big] = z_n.$$
En appliquant le lemme 2.2, on en déduit que
$$z_n = [\frac{a^r}{T^2}, -T+1, -T-1, z_{n+3}]$$
et
$$z_{m+1}^r = T^2 z_{n+3} + (-T+1).$$
Nous remarquons que z_{n+3} est bien un quotient complet puisque $|z_{n+3}| > 1$ (en utilisant la relation précèdente, le fait que $|z_{m+1}| > 1$ et le fait que $r > 2$).

Ainsi nous obtenons les nouveaux quotients partiels $a_n = \frac{a^r}{T^2}, a_{n+1} = -T+1, a_{n+2} = -T-1$ et une équation du type $A_2 := (1, T^2, -T+1)$.

Les autres cas se déduisent de manière analogue, en appliquant le raisonnement précédent et, en particulier, le lemme 2.2. $\square$

Notation. Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i, j \leq m$ et $W = a_1, a_2, \ldots, a_m$. On notera
$${}^{(i)}W := a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_m \text{ et } W^{(j)} := a_1, a_2, \ldots, a_{m-j}.$$
Lorsque $i + j < m - 1$, on notera
$${}^{(i)}W^{(j)} := a_{i+1}, \ldots, a_{m-j}.$$

La proposition 3.1 est une conséquence immédiate de la proposition 3.2.

Proposition 3.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a la relation suivante :*
$$(A_1, 1, 4 : \Omega_k) \to \Big(A_2, 1 + |\Omega_k|, |\Omega_{k+1}| : {}^{(3)}\Omega_{k+1}^{(1)}\Big).$$

Remarque. Soit $k \in \mathbb{N}$. Nous notons ℓ_k la longueur du mot fini Ω_k. La proposition précédente peut être traduite de la manière suivante. On suppose connus les ℓ_k premiers quotients de z. Alors, si on applique ℓ_k fois le procédé énoncé dans le paragraphe 2.2 à l'équation (3.6) nous obtenons :
$$z_4 = [{}^{(3)}\Omega_{k+1}^{(1)}, z_{\ell_{k+1}}]$$
et la nouvelle relation sera :
$$z_{\ell_k+1} = T^2 z_{\ell_{k+1}} + (-T+1).$$

Pour démontrer la proposition 3.2, nous allons utiliser les lemmes suivants.

Lemme 3.2. *Soient k, m, n des entiers strictement positifs, $m < n$. On a les relations suivantes :*

– *si k est pair, alors :*

$$(A_5, m, n : \Gamma_k) \to (A_6 : {}^{(1)}\Gamma_{k+1}),$$
$$(A_5, m, n : -\overline{\Gamma}_k) \to (A_6 : {}^{(1)}(-\overline{\Gamma}_{k+1}))\,;$$

– *si k est impair, alors :*

$$(A_3, m, n : \Gamma_k) \to (A_4 : {}^{(1)}\Gamma_{k+1}),$$
$$(A_3, m, n : -\overline{\Gamma}_k) \to (A_4 : {}^{(1)}(-\overline{\Gamma}_{k+1})).$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les termes de Γ_k sont des polynômes divisibles par T.

Soient $a, b \in T\mathbb{F}_p(T)$. Alors, à l'aide du lemme 3.1 on peut déduire :

$$(A_5, m, n : a, b) \to (A_5, m+2, n+4 : -a^r, T, b^r/T^2, -T).$$

Plus généralement, si $a_1, a_2, \ldots, a_{2i} \in T\mathbb{F}_p[T]$ alors :

$$(A_5, m, n : a_1, a_2 \ldots, a_{2i}) \to \\ (A_5 : -a_1^r, T, a_2^r/T^2, -T, \ldots, -a_{2i-1}^r, T, a_{2i}^r/T^2, -T).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\Gamma_k := a_1, a_2, \ldots, a_{2^{k+1}-1}$. La suite Γ_k a un nombre impair d'éléments ; ainsi, nous devons appliquer le lemme 3.1 à son dernier terme aussi. On obtient :

$$(A_5, m, n : \Gamma_k) \to \\ (A_6 : -a_1^r, T, a_2^r/T^2, -T, \ldots, -a_{2i-1}^r, T, a_{2i}^r/T^2, -T, -a_{2i+1}^r, T).$$

Dans le cas où k est pair, le premier terme de Γ_{k+1} est $b_1 := -T$. Donc, par définition,

$${}^{(1)}\Gamma_{k+1} = b_2, \ldots, b_{2^{k+2}-1} = -a_1^r, T, \ldots, -a_{2i-1}^r, T, a_{2i}^r/T^2, -T, -a_{2i+1}^r, T,$$

ce qui coïncide avec notre résultat.

Les autres cas se démontrent de manière analogue. □

Lemme 3.3. *Soient k, m, n des entiers strictement positifs, $m < n$. On a les relations suivantes :*

– *si k est pair, alors :*

$$(A_2, m, n : \Lambda_k) \to (A_6 : T^{r-2}, \Lambda_{k+1}), \tag{3.7}$$
$$(A_5, m, n : -\overline{\Lambda}_k) \to (A_1 : {}^{(1)}(-\overline{\Lambda}_{k+1}), T^{r-2}, T+1, T-1). \tag{3.8}$$

– *si k est impair, alors :*

$$(A_2, m, n : \Lambda_k) \to (A_4 : T^{r-2}, \Lambda_{k+1}), \tag{3.9}$$
$$(A_3, m, n : -\overline{\Lambda}_k) \to (A_1 : {}^{(1)}(-\overline{\Lambda}_{k+1}), T^{r-2}, T+1, T-1). \tag{3.10}$$

Démonstration. Nous allons démontrer ici la relation (3.7). Les relations (3.8), (3.9) et (3.10) peuvent être démontrées de manière analogue. On raisonne par récurrence sur k.

Nous commençons par le cas où $k = 2$. Par définition :

$$\Lambda_2 = T, -T^r + 1, -T$$

et

$$\Lambda_3 = T + 1, T - 1, -T^{r^2-2}, -T, T^r, T.$$

En appliquant les formules du lemme 3.1, on a :

$$(A_2, m, n : T) \to (A_1, m + 1, n + 3 : T^{r-2}, T + 1, T - 1)$$
$$(A_1, m + 1, n + 3 : -T^r + 1) \to (A_5, m + 2, n + 5 : -T^{r^2-2}, -T)$$
$$(A_5, m + 2, n + 5 : -T) \to (A_6 : -T^r, T)$$

Par conséquent, (3.7) est prouvé pour $k = 2$.

Nous supposons à présent que k est un entier pair, $k > 2$, et que la relation (3.7) est vraie pour $k - 2$. Nous allons la montrer maintenant pour k.

Par définition,

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-2}, -T^{\lambda_{k-1}}, \Gamma_{k-2}.$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$(A_2, m, n : \Lambda_{k-2}) \to (A_6, m + |\Lambda_{k-2}|, n + |\Lambda_{k-1}| + 1 : T^{r-2}, \Lambda_{k-1}).$$

En appliquant les lemmes 3.1 et 3.2 nous avons aussi :

$$(A_6, m + |\Lambda_{k-2}|, n + |\Lambda_{k-1}| + 1 : -T^{\lambda_{k-1}}) \to (A_5 : -T^{\lambda_k}, -T)$$
$$(A_5, m + |\Lambda_{k-2}| + 1, n + |\Lambda_{k-1}| + 3 : \Gamma_{k-2}) \to (A_6 : {}^{(1)}\Gamma_{k-1}).$$

En réunissant tous ces relations et en tenant en compte que, pour tous les k pairs, Γ_{k-1} commence par $-T$, on obtient le résultat. □

Démonstration de la proposition 3.2. Nous allons prouver par récurrence sur k que, pour tous m, n tels que $m < n$, on a les relations suivantes :

$$(A_1, m, n : \Omega_k) \to \left(A_2 : {}^{(3)}\Omega_{k+1}^{(1)}\right), \tag{3.11}$$

$$(A_1, m, n : -\overline{\Omega}_k) \to \left(A_2 : {}^{(3)}(-\overline{\Omega}_{k+1})^{(1)}\right). \tag{3.12}$$

Lorsque $m = 1, n = 4$, la relation (3.11) implique la proposition 3.2. On commence par le cas où $k = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= -T^{r-2}, -\overline{\Omega_1} = T^{r-2}, \\
\Omega_2 &= -T^{r-2}, T + 1, T - 1, -T^{\omega_2}, -T + 1, -T - 1, T^{r-2}, \\
-\overline{\Omega}_2 &= -T^{r-2}, T + 1, T - 1, T^{\omega_2}, -T + 1, -T - 1, T^{r-2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, le lemme 3.1 implique que pour tous m, n, $m < n$:

$$(A_1, m, n : \pm T^{r-2}) \to (A_2 : \pm T^{r(r-2)-2}, -T+1, -T-1),$$

et puisque $\omega_2 = r(r-2) - 2$ les relations (3.11) et (3.12) sont établies pour $k = 1$.

Soit $k > 1$. Nous supposons maintenant que (3.11) et (3.12) sont vraies pour $k-1$ et tous m, n, $m < n$. A cause du lemme 3.3, nous devons distinguer deux cas : le cas où k est pair et le cas où k est impair. Nous allons supposer maintenant que k est pair.

Fixons $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$.

D'après (3.1) on peut écrire les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \Omega_{k-1}, \Lambda_{k-1}, -T^{\omega_k}, -\overline{\Lambda}_{k-1}, -\overline{\Omega}_{k-1}, \\ -\overline{\Omega}_k &= \Omega_{k-1}, \Lambda_{k-1}, T^{\omega_k}, -\overline{\Lambda}_{k-1}, -\overline{\Omega}_{k-1}, \end{aligned}$$

afin d'appliquer notre algorithme à chaque sous-suite qui apparaît dans les expressions de Ω_k et $-\overline{\Omega}_k$.

Soient $1 \le i, i' \le 6$ et W, W' des suites finies de polynômes sur $\mathbb{F}_p$. Pour alléger l'écriture, nous nous permettons d'utiliser la notation :

$$(A_i : W) \to (A_{i'} : W'),$$

les indices m et n étant sous-entendus.

Par l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} (A_1 : \Omega_{k-1}) &\to (A_2 : {}^{(3)}\Omega_k^{(1)}), \\ (A_1 : -\overline{\Omega}_{k-1}) &\to \left(A_2 : {}^{(3)}(-\overline{\Omega}_k)^{(1)}\right). \end{aligned}$$

Les lemmes 3.3 et 3.1 impliquent :

$$\begin{aligned} (A_2 : \Lambda_{k-1}) &\to (A_4 : T^{r-2}, \Lambda_k), \\ (A_4 : \pm T^{\omega_k}) &\to (A_3 : \pm T^{\omega_{k+1}}, T), \\ (A_3 : -\overline{\Lambda}_{k-1}) &\to (A_1 : {}^{(1)}(-\overline{\Lambda}_k), T^{r-2}, T+1, T-1). \end{aligned}$$

En résumé, on a :

$$\begin{aligned} (A_1 : \Omega_k) \to (A_2 : {}&^{(3)}\Omega_k^{(1)}, T^{r-2}, \Lambda_k, -T^{\omega_{k+1}}, T, {}^{(1)}(-\overline{\Lambda}_k), \\ &T^{r-2}, T+1, T-1, {}^{(3)}(-\overline{\Omega}_k)^{(1)}), \\ (A_1 : -\overline{\Omega}_k) \to (A_2 : {}&^{(3)}\Omega_k^{(1)}, T^{r-2}, \Lambda_k, T^{\omega_{k+1}}, T, {}^{(1)}(-\overline{\Lambda}_k), \\ &T^{r-2}, T+1, T-1, {}^{(3)}(-\overline{\Omega}_k)^{(1)}). \end{aligned}$$

Nous remarquons que pour tous les $k > 1$, Ω_k commence par $-T^{r-2}$, $T+1, T-1$ et il se termine par $-T+1, -T-1, T^{r-2}$. De même, $-\overline{\Lambda}_k$ commence par T (puisque Γ_{k-2} se termine par $-T$). En combinant les relations précédentes, nous en déduisons (3.11) et (3.12).

Le cas où k est impair se traite de manière analogue. $\square$

Nous avons observé que tout le raisonnement ci-dessus pour obtenir le développement en fraction continue de BS_r est basé sur le fait que le premier des 3 quotients partiels de départ $(-T^{r-2}, T+1, T-1)$ est divisible par T. Ainsi, nous pouvons obtenir un résultat plus général en remplaçant $-T^{r-2}$ par un polynôme P arbitraire, divisible par T. En utilisant les mêmes notations qu'au début de ce paragraphe, nous avons le théorème ci-dessous dont la preuve s'obtient comme précédemment.

Théorème 3.2. *Soit $P \in T\mathbb{F}_p[T]$. On définit la suite des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, $(\Omega_k(P))_{k\geq 0}$, de la façon suivante.*

On pose $\Omega_1(P) := P$. Pour $k \geq 2$, $\Omega_k(P)$ est défini récursivement par :

$$\Omega_k(P) := \Omega_{k-1}(P), \Lambda_{k-1}, T^{\omega_{k-1}}(P/T)^{r^{k-1}}, -\overline{\Lambda}_{k-1}, -\overline{\Omega}_{k-1}.$$

Si z est la fraction continue infinie $z := [P, T+1, T-1, z_4]$ satisfaisant :

$$z^r = T^2 z_4 + (T+1), \tag{3.13}$$

alors la suite de quotients partiels de z est $\Omega_\infty(P)$, où $\Omega_\infty(P)$ est la suite infinie commençant par $\Omega_k(P)$, pour tout $k \geq 1$.

Remarque. L'existence de la fraction continue z vérifiant (3.13) découle aussi du théorème 1 de l'article [3]. De plus, il est facile de voir que z satisfait l'équation algèbrique :

$$T^2 z^{r+1} = (PT^2 + T - 1)z^r + 1.$$

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Alain Lasjaunias, qui m'a indiqué ce sujet, pour les nombreuses discussions que nous avons eues et pour ses commentaires fort utiles au cours de mon travail. Je remercie également Boris Adamczewski pour ses remarques judicieuses qui m'ont beaucoup aidé dans la rédaction du présent travail.

Bibliographie

[1] L. Baum and M. Sweet, *Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2.* Annals of Math. **103** (1976), 593–610.

[2] A.Lasjaunias, *A Survey of Diophantine approximation in Fields of Power Series.* Monatsh. Math. **130** (2000), 211–229.

[3] A. Lasjaunias, *Continued fractions for hyperquadratic power series over a finite field.* Finite Fields Appl. **14** (2008), 329–350.

[4] K. Mahler, *On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic.* Canadian J. Math. **1** (1949), 397–400.

[5] W. Mills and D. Robbins, *Continued fractions for certain algebraic power series.* J. Number Theory **23** (1986), 388–404.

[6] W. Schmidt, *On continued fractions and diophantine approximation in power series fields.* Acta Arith. **95** (2000), 139–166.

[7] J. SHALLIT, *Simple continued fractions for some irrational numbers.* J. Number Theory **11** (1979), 209–217.

Alina FIRICEL
Université de Lyon
Institut Camille Jordan
UMR 5208 du CNRS
43, boulevard du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail: firicel@math.univ-lyon1.fr
URL: http://math.univ-lyon1.fr/~firicel/