JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Anne BERTRAND-MATHIS

Nombres de Pisots, matrices primitives et bêta-conjugués

Tome 24, n^o 1 (2012), p. 57-72.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2012__24_1_57_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **24** (2012), 57-72

Nombres de Pisots, matrices primitives et bêta-conjugués

par Anne BERTRAND-MATHIS

Résumé. Soit β un nombre de Pisot ; nous montrons que pour tout entier n assez grand il existe une matrice carrée à coefficients positifs ou nuls dont l'ordre est égal au degré de β et dont β^n est valeur propre.

Soit $\beta = a_1/\beta + a_2/\beta^2 + \cdots + a_n/\beta^n + \cdots$ le β-développement de β ; si β est un nombre de Pisot, alors la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est périodique après un certain rang n_0 (pour $n \geq n_0$, $a_{n+k} = a_n$) et le polynôme

$$X^{n_0+k} - (a_1 X^{n_0+k-1} + \cdots + a_{n_0+k}) - (X^{n_0} - (a_1 X^{n_0} + \cdots + a_{n_0}))$$

est appelé polynôme de Parry. Nous montrons qu'il existe un ensemble relativement dense d'entiers n tels que le polynôme minimal de β^n est égal à son polynôme de Parry.

Abstract. *Pisot numbers, primitive matrices and beta-conjugates.*

We show that given a Pisot number β, for any integer n large enough, there is a nonnegative primitive square matrix whose order is equal to the degree of β, and the matrix admits β^n for eingenvalue.

Let $\beta = a_1/\beta + a_2/\beta^2 + \cdots + a_n/\beta^n + \cdots$ be the β-expansion of β. For any Pisot number β, the sequence $(a_n)_{n\geq 1}$ is ultimately periodic *i.e.,* for $n \geq n_0$, $a_{n+k} = a_n$, and we call Parry polynomial the polynomial

$$X^{n_0+k} - (a_1 X^{n_0+k-1} + \cdots + a_{n_0+k}) - (X^{n_0} - (a_1 X^{n_0} + \cdots + a_{n_0})).$$

We also show that there is a relatively dense set of integers n such that the minimal polynomial of β^n is equal to its Parry polynomial.

Manuscrit reçu le 20 novembre 2009, révisé le 12 décembre 2011.
Mots clefs. Primitive matrices ; Pisot Numbers ; numeration ; symbolic dynamics.
Classification math. 11C99, 15A18, 15A36, 15A48, 37B10.

1. Matrices primitives et entiers algébriques, nombres de Pisot et développement en base β.

Une matrice carrée B dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs (au sens large, donc éventuellement nuls) est dite positive ; une matrice positive est dite primitive s'il existe un entier k tel que B^k a tous ses coefficients strictement positifs.

Perron a montré qu'une matrice primitive admet une valeur propre réelle positive strictement supérieure au module de ses autres valeurs propres ; cette valeur propre est dite valeur propre strictement dominante de la matrice. Lorsque les coefficients de B sont des entiers naturels la valeur propre dominante est un entier algébrique (puisqu'elle est racine du polynôme minimal de B) strictement supérieur au module de ses conjugués ; nous dirons alors qu'il domine strictement ses conjugués. Lind a baptisé *nombres de Perron* les entiers algébriques dominant strictement leurs conjugués et a démontré le théorème suivant :

Théorème (Lind) [8]. *Tout nombre de Perron est la valeur propre dominante d'une matrice B à coefficients dans $\mathbb{N}$.*

De plus, cette matrice peut être prise avec des coefficients dans $\{0,1\}$, elle est alors généralement d'ordre plus élevé. On connaît donc l'existence de la matrice B, mais pas sa taille. On peut espérer trouver dans de nombreux cas une matrice dont l'ordre est égal au degré d de β ; on est alors certain de pouvoir trouver un automate à d états dont la matrice d'incidence admet β pour valeur propre, une substitution sur d lettres dont la matrice d'abélianisation admet β pour valeur propre ou un sous-shift de Markov d'entropie $\ln\beta$ possédant d états.

Un *nombre de Pisot* est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont tous les conjugués sont de module strictement inférieur à 1 ; il domine donc strictement ses conjugués. Étant donné un nombre de Pisot de degré d, toutes ses puissances sont encore des nombres de Pisot de même degré d [2].

Nous nous intéressons ici à la question suivante : soit un nombre de Pisot β de degré d ; existe-t-il une matrice primitive à coefficients dans $\mathbb{N}$, d'ordre égal au degré de β, dont β est valeur propre (nécessairement dominante) ? Nous démontrerons qu'étant donné un nombre de Pisot β, pour tout entier n assez grand il existe une matrice d'ordre d positive à coefficients dans $\mathbb{N}$ dont β^n est valeur propre (théorème 1).

Etant donné un nombre réel $\beta > 1$, il existe une unique suite d'entiers naturels $a = (a_n)_{n\geq 1}$ telle que $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$ avec la condition : pour tout $m \geq 1$ on a $\sum_{n>m} \frac{a_n}{\beta^n} < \frac{1}{\beta^m}$ [11]. Cette suite ou la série associées de somme 1 sont appelées *β-développements* de 1 et en multipliant l'égalité par β on obtient par définition le *β-développement* de β. Lorsque la suite a est périodique de période k après le rang n_0, β est dit *nombre de Parry.* Le nombre β est alors un entier algébrique, racine strictement dominante du polynôme

$$P(X) = X^{n_0+k} - (a_1 X^{n_0+k-1} + \cdots + a_{n_0+k}) - (X^{n_0} - (a_1 X^{n_0-1} + \cdots + a_{n_0}))$$

qui prend alors le nom de *polynôme de Parry de* β (n_0 et k sont ici supposés minimums). Deux cas se présentent : ou bien le degré de β est égal au degré du polynôme de Parry qui est alors le polynôme minimal de β (on a alors $d = n_0 + k$) ; ou bien il lui est strictement inférieur et le polynôme de Parry admet d'autres racines que les conjugués de β ; ces autres racines sont dites *béta-conjuguées (ou conjuguées pirates)* de β.

Exemples. Pour le nombre d'or $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dont le polynôme minimal est $X^2 - X - 1$, le β-développement de 1 est $1 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}$ et le polynôme de Parry est égal au polynôme minimal. Pour $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ le polynôme minimal est $X^2 - 3X + 1$, le développement de 1 est $1 = \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \cdots$, le polynôme de Parry de β est $X^2 - 2X - 1 - (X - 2)$ qui est égal au polynôme minimal de β.

Si β est la racine supérieure à 1 de l'équation $\beta^3 = \beta + 1$, le polynôme minimal est $X^3 - X - 1$; l'égalité $1 = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3}$ est vraie mais ceci n'est pas le β-développement de 1 car la condition $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} < \frac{1}{\beta}$ qui caractérise les β-développements n'est pas vérifiée. Le $\beta-$développement de 1 est $1 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^5} = 10001(0)^\infty = 10001$, le polynôme de Parry est $X^5 - X^4 - 1 = (X^3 - X - 1)(X^2 - X - 1)$ et les béta-conjugués sont $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; ils sont de module 1.

Les nombres de Pisot sont des nombres de Parry [3, 4]. Nous montrerons qu'étant donné un nombre de Pisot β de degré d il existe un ensemble dense de puissances de β qui n'admettent pas de valeurs conjuguées pirates et dont le polynôme minimal est égal au polynôme de Parry (théorème 2). Nous aurons besoin, pour établir ces résultats, d'associer à toute suite ultimement périodique une matrice dite matrice compagnon de la suite.

2. Résultats.

Proposition 1. *Soit un nombre de Pisot β de degré d ; il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$ on peut trouver une suite d'entiers positifs ou nuls $(a_k)_{k \geq 1} = b_1 b_2 \ldots b_{d-1} (c_d)^\infty$ telle que*

$$\beta^n = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{\beta^{kn}} .$$

En général cette suite n'est pas le β^n-développement de β^n. Ce résultat et les suivants seront démontrés dans la partie 4.

Théorème 1. *Soit β un nombre de Pisot de degré d ; il existe un entier n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0 on peut trouver une matrice carrée primitive B_n d'ordre d, à coefficients dans $\mathbb{N}$, dont β^n est valeur propre.*

Les seules valeurs propres de B_n sont alors β^n et ses conjugués, et elles sont simples.

Si le polynôme irréductible de β^n est à coefficients positifs ou nuls, on peut prendre pour B_n sa matrice compagnon ; si ce n'est pas le cas, on peut trouver une matrice B_n de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & c_d \\ 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & b_{d-1} \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & b_{d-2} \\ . & 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & b_1 \end{pmatrix}.$$

La différence avec une matrice compagnon classique est le 1 en haut à gauche ; il semble difficile d'obtenir une matrice plus simple.

Exemple. Soit β le plus petit nombre de Pisot, racine de $X^3 - X - 1$; nous nous intéresserons à ses puissances qui sont toutes de degré 3.

Le nombre $\mu = \beta^2$ admet pour polynôme minimal $X^3 - 2X^2 + X - 1$ et la méthode de la partie 4 conduit à la suite a= $10(1)^\infty$ que l'on peut aussi obtenir a l'aide de l'égalité $\beta^2 = \beta + 1$.

Le nombre $\nu = \beta^3$ a pour polynôme minimal $X^3 - 3X^2 + 2X - 1$; la suite a est $20(1)^\infty$ et la matrice obtenue est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dans ces deux cas, la suite obtenue est le μ-(resp.ν-)développement.

Nous dirons qu'un sous-ensemble $\mathbb{H}$ de $\mathbb{N}$ est relativement dense s'il existe un entier m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'un au moins des nombres $n, n + 1, \ldots, n + m$ appartienne à $\mathbb{H}$; il est donc non vide.

Théorème 2. *Soit β un nombre de Pisot de degré d ; soit $\mathcal{F}_\beta$ l'ensemble des entiers n tels que β^n n'ait pas de béta-conjugués (i.e. le polynôme minimal de β^n et son polynôme de Parry sont les mêmes) ; alors $\mathcal{F}_\beta$ est relativement dense dans $[1, \infty[$.*

Plus précisément, $\mathcal{F}_\beta$ contient un sous-ensemble $\mathbb{H}_\beta$ relativement dense dans $\mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{H}_\beta$, β^n n'est pas un nombre de Parry simple mais n'a pas de béta-conjugués : le β^n-développement de β^n est de la forme $b_1 \ldots b_{d-1}(c_d)^\infty$ où b_1 est non nul et où d est égal au degré de β^n. De plus, *la norme de β^n (c'est-à-dire le produit de ses conjugués, lui-même inclus) est égal à $(-1)^d(b_{d-1} - c_d)$.*

On peut en dire un peu plus dans le cas des nombres de Pisot totalement réels :

Proposition 2. *Soit β un nombre de Pisot de degré d dont tous les conjugués sont réels.*

S'ils sont tous de même signe et si n est assez grand, β^n n'admet pas de $\beta-$conjugués.

Si tous les conjugués sont positifs, alors pour tout n assez grand le β^n-développement de β^n est de la forme $b_1 \dots b_{d-1}c_d$ avec c_d non nul.

S'ils sont tous négatifs, si $2p+1$ est assez grand, le β^{2p+1}-développement de β^{2p+1} est de la forme $b_1 \dots b_d$ avec $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_d > 0$; β^{2p+1} est donc un nombre de Parry simple ; β^2 n'a que des conjugués positifs et on applique le cas précédent.

Si β a des conjugués des deux signes pour m assez grand, β^{2m} est un nombre de Parry simple et sans béta-conjugués.

Exemple. Soit β la plus grande racine du polynôme $X^2 - aX + b$ où a et b sont des entiers positifs tels que $a > b - 1$; β est un nombre de Pisot quadratique dont le conjugué $\frac{b}{\beta}$ est positif. Le β-développement de β est $(a-1)(a-b-1)^\infty$ et il n'y a pas de béta-conjugués ; on vérifie aisément que toutes les puissances de β sont solutions d'équations du même type. La matrice du théorème 1 est

$$\begin{pmatrix} 1 & a-b-1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Soit β la plus grande racine du polynôme $X^2 - aX - b$ où a et b sont des entiers strictement positifs tels que $a > b > 0$; β est un nombre de Pisot quadratique dont le conjugué $-\frac{b}{\beta}$ est négatif. Le β-développement de β est ab et il n'y a pas de béta-conjugués ; les puissances impaires de β vérifient des équations similaires, les puissances paires sont racines de polynômes $X^2 - cX + d$ avec $c > d - 1$ et c et d positifs [5].

3. Matrice compagnon d'une suite ultimement périodique non nulle

Commençons par démontrer une proposition générale concernant des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ associées à des suites ultimement périodiques. elle mène à la proposition 4 permettant d'affirmer la primitivité de telles matrices. Ces deux propositions ont des conséquences directes intéressantes et constituent des outils fondamentaux pour établir les preuves de la partie 4. Rappelons tout d'abord que l'on appelle matrice compagnon d'un polynôme $P(X) = X^{n+1} - (m_1X^n + \cdots + m_{n-1}X + m_n)$ la matrice carrée

$$C = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & m_n \\ 1 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 0 & m_2 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & m_1 \end{pmatrix}$$

et la matrice compagnon d'un entier algébrique est celle du polynôme minimal de cet entier, le terme m_n est alors non nul puisqu'il est égal, au signe près, au produit de ses conjugués.

Nous dirons qu'une suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels ou complexes est ultimement périodique s'il existe deux entiers h et k tels que pour tout $n \geq h+1$ on ait $a_{n+k}= a_n$; on l'écrira alors $(a_n)_{n\geq 1} = b_1 \dots b_h(c_1 \dots c_k)^\infty$; $b_1 \dots b_h$ sera dit prépériode et $c_1 \dots c_k$ sera dit période. Cette écriture sera dite minimale si h et k sont les plus petits possible (ce qui implique, si h est non nul, que b_h est différent de c_k) ; si la suite a se termine par des zéros on l'écrit $a = b_1 \dots b_h(0)^\infty$ ou encore $a = b_1 \dots b_h$ et là encore il y a une forme minimale avec b_h non nul.

Définition. *Nous appellerons matrice compagnon de la suite ultimement périodique et non nulle* $a = b_1 \cdots_h (c_1 ... c_k)^\infty$ *la matrice* $B(a)$ *définie à partir de la forme minimale de* a *de la façon suivante :*

Si la suite a *se termine par des zéros* $B(a)$ *est la matrice compagnon de type usuel :*

$$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & b_h \\ 1 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & . & 0 & 1 & b_1 \end{pmatrix}$$

et lorsqu'elle ne se termine pas par des zéros et que h *est non nul*

$$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & c_k \\ 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & c_{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 & c_2 \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 0 & c_1 \\ . & . & . & . & 0 & 1 & . & . & 0 & b_h \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & b_1 \end{pmatrix}$$

où il y a des 1 *sous la diagonale principale, les nombres* b_i *et* c_j *le long de la dernière colonne et des zéros partout ailleurs sauf un 1 à l'intersection de la première ligne et de la* k*-ième colonne.*

Si la prépériode est vide : $h=0$ et $a=(c_1\dots c_k)^\infty$,

$$B(a)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 1+c_k \\ 1 & 0 & . & . & c_{k-1} \\ 0 & 1 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & c_1 \end{pmatrix};$$

ici le dernier 1 *vient se rajouter à c_k à la k-ième colonne aussi, ce qui fait que le terme en haut à droite n'est jamais nul.*

Si la suite a est nulle nous ne définissons pas de matrice compagnon.

Exemple. Si $a=43(662)^\infty$ alors

$$B(a)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

si $a=(824)$, alors

$$B\left(a\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Dans le cas où $P(X)=X^{k+1}-(m_1X^k+\cdots+m_k)$ est un polynôme dont le dernier coefficient n'est pas nul, sa matrice compagnon habituelle est la matrice compagnon de la suite a formée des coefficients du polynôme suivis de zéros. Si P admet 0 comme racine avec la multiplicité r, la suite a qu'il définit est $c_1\dots c_{k-r}(0)^r$ et la matrice compagnon de cette suite n'est pas celle du polynôme.

Proposition 3. *Soit $a=(a_n)_{n\geq 1}=b_1\dots b_h(c_1\dots c_k)^\infty$ une suite non nulle de nombres (réels ou complexes) ultimement périodique ne se terminant pas par des zéros ; alors le polynôme caractéristique de la matrice compagnon $B(a)$ est $P_a(X)=X^{h+k}-(b_1X^{h+k-1}+\cdots+b_hX^k+c_1X^{k-1}+\cdots+c_{k-1}X+c_k)-(X^h-(b_1X^{h-1}+\cdots+b_h))$. Ceci est encore vrai si la prépériode est vide ($h=0$).*

Si tous les a_i sont positifs ou nuls, il existe un unique nombre réel $\beta>1$ vérifiant l'égalité $1=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{\beta^n}$; β est racine simple du polynôme $P_a(X)$ et donc est valeur propre simple de la matrice $B(a)$. Tout autre nombre réel ou complexe λ tel que $1=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{\lambda^n}$ vérifie $|\lambda|\leq\beta$ et β est valeur propre de module maximal de $B(a)$.

Si de plus le P.G.C.D. des entiers i tels que $a_i\neq 0$ est égal à 1, tout nombre réel ou complexe λ tel que $1=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{\lambda^n}$ vérifie $|\lambda|<\beta$ et β est l'unique valeur propre de module maximal de $B(a)$.

Preuve de la proposition 3. On démontre que P_a est le polynôme caractéristique de $B(a)$ en développant le déterminant caractéristique selon la première ligne et en faisant une récurrence.

Si tous les termes de la suite a sont positifs ou nuls, la fonction qui à $x \in [0,1]$ associe $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ croit strictement de 0 à une valeur qui dépasse 1 ; il existe donc un unique $x \in]0,1]$ tel que $\sum_{n\geq 1} a_n x^n = 1$ et par suite l'équation $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$ admet une unique racine réelle $\beta > 1$, de multiplicité 1 car la dérivée ne peut s'annuler ($\beta = 1$ dans le cas où un seul des a_i est non nul et égal à 1). Comme les a_i sont positifs non tous nuls, si λ est un nombre complexe de module $|\lambda| > \beta$ on ne peut pas avoir $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\lambda^n}$.

Supposons maintenant que le P.G.C.D. des entiers i tels que $a_i \neq 0$ soit 1. Si $\lambda \neq \beta$ est un nombre complexe de module β, pour que $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\lambda^n}$ il faut, puisque les a_i sont positifs ou nuls, que chaque fois que a_i est non nul on ait $\lambda^i = \beta^i$ et ceci implique $\lambda = \beta$.

On vérifie aisément que ce β est racine du polynôme de Parry de la suite a : multiplions l'égalité $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$ par β^{h+k} et enlevons lui le produit par β^h de la même égalité ; il vient $P_a(\beta) = 0$. On vérifie de la même façon que toute racine de P_a est racine de l'équation $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$. Aussi, la matrice $B(a)$ est positive et admet une valeur propre dominante β si les a_i sont positifs ou nuls, et elle est strictement dominante si de plus le P.G.C.D. des entiers i tels que $a_i \neq 0$ est égal à 1. □

Proposition 4. *Soit $a = (a_i)_{i\geq 0}$ une suite non nulle ultimement périodique ; soit $B(a)$ sa matrice compagnon. Si les a_i sont positifs ou nuls et si de plus le P.G.C.D. des entiers i tels que $a_i \neq 0$ est égal à 1, alors la matrice $B(a)$ est primitive (rappelons que l'écriture de a utilisée dans la définition de $B(a)$ est l'écriture minimale).*

Remarque. Si $P(X) = X^{k+1} - (m_1 X^k + \cdots + m_k)$ est un polynôme dont tous les coefficients m_j sont positifs, le dernier étant différent de 0, alors la matrice compagnon (au sens usuel) de ce polynôme est primitive ; c'est le cas si P est le polynôme minimal d'un entier algébrique. L'exemple de la suite $a = 0x(0y)^\infty$, x et y distincts positifs avec $y \neq 0$, illustre le cas où l'hypothèse sur le P.G.C.D. n'est pas vérifiée. En effet,

$$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le P.G.C.D. associé à la suite a est ici 2 si $x \neq 0$ et 4 sinon. Les matrices $(B(a))^{2m+1}$ $(m \geq 0)$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $B(a)$ n'est pas primitive.

Pour démontrer la proposition 4 nous ferons appel à la théorie classique des matrices positives que l'on peut trouver dans [6] ou [10]. Une matrice carrée B d'ordre n est dite réductible s'il est possible de diviser l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ en deux sous-ensembles non vides I et J tels que $a_{i,j} = 0$ pour $i \in I$ et $j \in J$ et irréductible si ce n'est pas le cas.

On déduit immédiatement de cette définition qu'une matrice positive B est irréductible si et seulement si $I + B$ est irréductible.

On trouve dans [10] une définition de matrice primitive un peu différente de celle donnée plus haut : une matrice positive B est dite primitive si elle est irréductible et n'admet qu'une seule valeur propre de module maximal qui de plus est simple ; le théorème 37.4.1 de [10] dit qu'alors une des puissances de B, disons B^m, a tous ses coefficients strictement positifs. Inversement, la remarque précédant le théorème 37.4.2 de [10] dit que si B est une matrice positive telle que pour un certain m, B^m n'a que des coefficients > 0, alors B est irréductible avec une seule valeur propre de module maximal, simple de surcroît. Ces deux définitions sont donc équivalentes.

Lemme. *Etant donnée une matrice positive B admettant une valeur propre simple réelle strictement dominante, si $I + B$ est primitive alors B est primitive.*

Preuve du lemme. Si B est une matrice positive admettant une seule valeur propre de module maximum, simple de surcroît, il suffit de montrer qu'elle est irréductible pour montrer qu'elle est primitive.

Supposons $I + B$ primitive : $I + B$ est donc irréductible et comme B est positive, B est aussi irréductible ; B est donc bien primitive au sens de [10] et donc au notre. $\square$

Preuve de la proposition 4. Comme d'après la proposition 3 (avec la propriété requise sur le P.G.C.D.) la matrice $B(a)$ est positive et possède une valeur propre strictement dominante, il suffit d'après le lemme de vérifier que $I + B(a)$ est primitive pour démontrer que $B(a)$ est primitive.

Montrons que $C = I + B(a)$ est primitive. Soit $C^n = (m_{i,j}^{(n)})_{i,j=1\ldots d}$; comme C a des 1 sur la diagonale principale et tous ses coefficients positifs ou nuls, pour tout n, $m_{i,j}^{(n+1)} \geq m_{i,j}^{(n)}$. En raison des 1 sur et sous la diagonale, C^{d-1} n'a que des coefficients strictement positifs sur le triangle inférieur (diagonale comprise) car on obtient une nouvelle sous-diagonale positive chaque fois qu'on multiplie par $B(a)$; par ailleurs $m_{1,d}^{(2)} = b_h + c_k$ est strictement positif car les deux termes de la somme sont positifs ou nuls et différents, à cause du caractère minimal de l'écriture de a ; donc les coefficients de la dernière colonne de C^{d+1} sont tous strictement supérieurs à zéro. En effet, la première colonne de C^{d-1} n'a que des coefficients strictement positifs et $m_{1,r}^{(2)}$ est strictement positif pour $r = 1, \dots, d$ d'où $m_{r,d}^{(d-1)} \geq m_{1,d}^{(2)} > 0$. On vérifie alors aisément que l'avant dernière colonne de C^{d+2} n'a que des coefficients strictement positifs à cause de la dernière ligne et de la dernière colonne de C^{d+1} qui sont strictement positives et on continue ainsi : C^{2d} est une matrice strictement positive. $\square$

On peut aussi démontrer ce résultat en comparant les matrices $B(a)$ à des matrices de substitution (voir à la fin de cette partie).

Corollaire. *Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} = b_1 \dots b_h (c_1 \dots c_k)^\infty$ une suite ultimement périodique de nombres entiers naturels ; on suppose de plus que le P.G.C.D. des entiers i tels que $a_i \neq 0$ est 1. Soit β l'unique nombre réel positif tel que $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$; alors β est racine de $P_a(X)$ et β est valeur propre strictement dominante de la matrice compagnon $B(a)$, qui est une matrice primitive d'ordre $h + k$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.*

Si le degré de β est égal au degré $h+k$ de $P_a(X)$ alors β est valeur propre strictement dominante d'une matrice carrée à coefficients entiers naturels dont l'ordre est égal au degré de β.

Le corollaire est conséquence immédiate des propositions 3 et 4. La proposition 5 qui suit découle du corollaire (la suite a, égale au β-développement de β, a son premier terme a_1 non nul ce qui fait que le P.G.C.D. associé à la suite a est 1) :

Proposition 5. *Soit β un nombre de Parry n'admettant pas de béta-conjugués ; alors il existe une matrice primitive B à coefficients dans $\mathbb{N}$ et d'ordre égal au degré de β et dont β est valeur propre. En particulier, la matrice compagnon de la suite égale au β-développement de β convient.*

Question : lorsqu'un entier algébrique β est valeur propre d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$ dont l'ordre est égal à son degré d, il est clair que toutes les matrices d'ordre d à coefficients dans $\mathbb{N}$, admettant β pour valeur propre, ont les mêmes valeurs propres. Si l'ordre minimum p d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$ dont β est valeur propre est différent de d, est-ce que toutes les matrices d'ordre minimum p admettant β comme valeur propre et à coefficients dans $\mathbb{N}$ ont, en plus de β et de ses conjugués sur $\mathbb{Q}$, les mêmes valeurs propres ? En quelque sorte, existe-t-il des “conjugués sur $\mathbb{N}$” d'un entier algébrique ? La réponse est probablement négative.

Preuve de la proposition 4 à l'aide des substitutions (nous renvoyons à [1] pour la théorie des substitutions). Commençons par le cas où les a_i sont entiers. Considérons un ensemble S de $\ell = h+k$ lettres $d_1, \dots, d_{h+k}$. Une suite finie de s lettres est dite mot de longueur s ; une substitution sur ces ℓ lettres est une application σ de S dans l'ensemble des mots non vides sur ces lettres. Cette application s'étend à l'ensemble des mots : l'image d'un mot uv est alors $\sigma(u)\sigma(v)$. Étant donnée une suite ultimement périodique $a = (a_n)_{n\geq 1} = b_1 b_2 \dots b_h (c_1 \dots c_k)^\infty$, nous définissons une substitution sur les lettres $d_1, \dots, d_{h+k}$ par $\sigma(d_i) = d_1^{a_i} d_{i+1}$ pour $i < h+k$ et $\sigma(d_{h+k}) = d_1^{a_{h+k}} d_h$ (ou $\sigma(d_h) = d_1^{a_h}$ si la suite $a = b_1 \dots b_h \dots$ se termine par des zéros, ou encore $\sigma(d_k) = d_1^{a_k}$ si la suite $a = (c_1 \dots c_k)^\infty$ n'admet pas de prépériode).

On appelle matrice d'une substitution σ la matrice $G = (g_{i,j})_{1\leq i,j \leq h+k}$ dont le terme $g_{i,j}$ est égal au nombre de lettres d_i que contient $\sigma(d_j)$. Pour notre substitution σ, sa matrice G est égale à

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & a_h & . & . & a_{h+k} \\ 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où les a_i sont sur la première ligne avec une sous-diagonale de 1 et des zéros ailleurs sauf à l'intersection de la ligne $h+1$ et de la dernière colonne où il y a un 1 (si la suite est purement périodique, $h+1 = 1$ et il s'agit de la première ligne ; et si la suite se termine par des zéros, ce 1 n'apparaît pas). Cette matrice est la transposée de la matrice $B(a)$ et ces deux matrices seront donc simultanément primitives. Le coefficient $g_{i,j}^{(n)}$ de la matrice G^n est le nombre de lettres égales à d_i que contient $\sigma^n(d_j)$.

S'il existe un entier n tel que l'image par σ^n de chaque lettre contient toutes les autres lettres, tous les $g_{i,j}^{(n)}$ seront strictement positifs et donc G sera primitive.

Pour des raisons de commodité nous noterons d la lettre d_1. Lorsque a_i est non nul $\sigma^i(d)$ contient d, tout itéré $\sigma^{ri}(d)$ contient aussi d et si aucun des $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}$ n'est nul, $\sigma^{r_1 i_1 + r_2 i_2 + \cdots + r_l i_l}$ contient d. Le P.G.C.D. des entiers i tels que $a_i \neq 0$ étant égal à 1, il existe un entier m_0 tel que tout entier $m > m_0$ se met sous la forme $m = r_1 i_1 + r_2 i_2 + \cdots + r_l i_l$ ou les r_i sont des entiers positifs ou nuls ; alors $\sigma^m(d)$ contient d pour tout $m > m_0$. On en déduit que $\sigma^{m+1}(d)$ contient $d = d_1$ et d_2, que $\sigma^{m+2}(d)$ contient d_1, d_2, d_3 et ainsi de suite : $\sigma^{m+h+k}(d)$ contient toutes les lettres.

Soit d_i une autre lettre. Montrons qu'il existe p tel que $\sigma^p(d_i)$ contient d et donc $\sigma^{p+m+h+k}$ contiendra toutes les lettres pour $m > m_0$ (ensuite il suffira de prendre le plus grand des p pour que, pour toute lettre d_j, $\sigma^{p+m+k}(d_j)$ contienne toutes les lettres). Supposons la période vide, c'est-à-dire que $a = b_1 \dots b_h(0)^\infty$ et $b_h \neq 0$: l'image de d_h par σ contient donc d. Pour toute lettre d_i, $\sigma^{h-i}(d_i)$ contient la lettre d_h et donc $\sigma^{h-d_i+1}(d_i)$ contient la lettre d. Si la période n'est pas vide, $a = b_1 \dots b_h(c_1 \dots c_k)^\infty$ avec l'un au moins des nombres $c_1, \dots, c_k$ non nul. Supposons par exemple c_r non nul, ce qui veut dire que l'image de d_{h+r} par σ contient d. Étant donné la lettre d_j, si $j \leq h+r$, alors $\sigma^{r+h-j}(d_j)$ contient d_{h+r} et $\sigma^{r-j+1}(d_j)$ contient d. Si $j > h+r$, la périodicité de la suite a implique que l'un des $\sigma^u(d_j)$ lorsque u varie 1 à k contient c_r et $\sigma^{u+1}(d)$ contient d.

Lorsque la suite a admet des coefficients positifs ou nuls mais non entiers, on peut minorer les coefficients a_i de a par des nombres rationnels q_i strictement positifs lorsque a_i est non nul, de dénominateur commun q. La suite $Q = (qq_i)_{i\geq 1}$ est une suite d'entiers positifs ou nuls, le P.G.C.D. des entiers i tels que qq_i est non nul est 1 est la matrice $B(Q)$ associée est primitive ; mais la matrice $\frac{1}{q}B(Q)$ minore la matrice $B(a)$ qui donc est aussi primitive.

□

4. Preuves des résultats de la partie 2

Preuve de la proposition 1. Soit β un nombre de Pisot de degré d, admettant pour conjugués $\alpha_1 = \beta$ et $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_d$ de module strictement inférieur à 1. Soient $\sigma_1^{(n)}, \dots, \sigma_d^{(n)}$ les fonctions symétriques en les $\beta^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_d^n$; ce sont des entiers relatifs. Si la matrice compagnon de β^n a tous ses coefficients dans $\mathbb{N}$, nous choisirons cette matrice ; sinon le polynôme $X^d - \sigma_1^{(n)}X^{d-1} + \sigma_2^{(n)}X^{d-2} + \dots + (-1)^d\sigma_d^{(n)}$, qui est le polynôme minimal de β^n, a au moins un coefficient strictement négatif. Remarquons alors que si n est assez grand, $\sigma_1^{(n)}$, qui est la somme $\beta^n + {\alpha_2}^n + \dots + \alpha_d^n$, est strictement supérieur à 1 et comme

$$1 = \sum_{i=1}^{d} \frac{(-1)^{i+1}\sigma_i^{(n)}}{\beta^{in}} ,$$

il vient, en remplaçant $\frac{\sigma_1^{(n)}}{\beta^n}$ par $\frac{(\sigma_1^{(n)}-1)+1}{\beta^n}$,

$$1 = \frac{\sigma_1^{(n)} - 1}{\beta^n} + \frac{1}{\beta^n} + \sum_{i=2}^{d} \frac{(-1)^{i+1}\sigma_i^{(n)}}{\beta^{in}}$$

avec $\sigma_1^{(n)} - 1$ positif. Remplaçons dans la formule précédente $\frac{1}{\beta^n}$ par

$$\frac{\sigma_1^{(n)} - 1}{\beta^{2n}} + \frac{1}{\beta^{2n}} + \sum_{i=2}^{d} \frac{(-1)^{i+1}\sigma_i^{(n)}}{\beta^{(i+1)n}},$$

il vient :

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\sigma_1^{(n)} - 1}{\beta^n} + \frac{\sigma_1^{(n)} - \sigma_2^{(n)} - 1}{\beta^{2n}} + \frac{1}{\beta^{2n}} \\ + \sum_{i=2}^{d-1} \frac{(-1)^{i+1}(\sigma_i^{(n)} - \sigma_{i+1}^{(n)})}{\beta^{(i+1)n}} + \frac{(-1)^{d+1}\sigma_d^{(n)}}{\beta^{(d+1)n}}\,. \end{aligned}$$

Remplaçons $\frac{1}{\beta^{2n}}$ par $\frac{\sigma_1^{(n)}-1}{\beta^{3n}} + \frac{1}{\beta^{3n}} + \sum_{i=2}^{d} \frac{(-1)^{i+1}\sigma_i^{(n)}}{\beta^{(i+2)n}}$ et répétons ce procédé jusqu'à obtenir :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\sigma_1^{(n)} - 1}{\beta^{kn}} + \sum_{i=2}^{d} \frac{(-1)^{i+1}\sigma_i^{(n)}}{\beta^{(i+k-1)n}} \Big)$$

et en regroupant selon les puissance de $1/\beta^n$:

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\sigma_1^{(n)} - 1}{\beta^n} + \frac{\sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)}}{\beta^{2n}} + \frac{\sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)}}{\beta^{3n}} + \cdots \\ + \frac{\sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)} + \cdots + (-1)^d \sigma_{d-1}^{(n)}}{\beta^{(d-1)n}} \\ + \left(\frac{\sigma_1^n - 1 - \sigma_2^{(n)} + \cdots + (-1)^{d+1}\sigma_d^{(n)}}{\beta^{dn}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{kn}}\,. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma_1^{(n)} - 1 \\ a_2 &= \sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)} \\ &\vdots \\ a_i &= \sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)} + \cdots + (-1)^{i+1}\sigma_i^{(n)} \\ &\vdots \\ a_{d-1} &= \sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)} + \cdots + (-1)^d \sigma_{d-1}^{(n)} \end{aligned}$$

et pour tout m supérieur ou égal à d

$$a_m = a_d = -1 + \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1}\sigma_i^{(n)} = c_d\,.$$

Notons $b_1 \dots b_{d-1}(c_d)^\infty$ la suite $(a_n)_{n\geq 1}$. Il vient

$$1 = \frac{b_1}{\beta^n} + \frac{b_2}{\beta^{2n}} + \cdots + \frac{b_{(d-1)n}}{\beta^{(d-1)n}} + c_d \sum_{k=d}^{\infty} \frac{1}{\beta^{kn}}\,.$$

Comme β est un nombre de Pisot, son module est strictement supérieur à 1, les modules de ses conjugués sont strictement inférieurs à 1 et il existe un entier k tel que pour tout n supérieur à k la fonction symétrique $\sigma_1^{(n)}$ est positive et supérieure à $1 + \sigma_2^{(n)} + \cdots + \sigma_d^{(n)}$; tous les a_i seront alors des entiers positifs ou nuls et si n est assez grand tous les a_i seront strictement positifs. □

Preuve du théorème 1. Considérons la matrice compagnon $B(a)$ de la suite $a = b_1 \dots b_{d-1}(c_d)^\infty$ ci-dessus ; cette matrice est d'ordre d, ses coefficients sont dans $\mathbb{N}$, son polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} X^d - (a_1X^{d-1} + a_2X^{d-2} + \cdots + a_{d-1}X + a_d)& \\ -(X^{d-1} - (a_1X^{d-2} + a_2X^{d-2} + \cdots + a_{d-1}))& \end{aligned}$$

d'après la proposition 3 et de plus le nombre β^n (au lieu de β dans la proposition) est racine de ce polynôme, il est donc valeur propre de la matrice $B(a)$ qui est à coefficients dans $\mathbb{N}$, primitive si n est assez grand (proposition 4), et d'ordre égal au degré de β^n ; $B(a)$ est la matrice B_n cherchée. □

Preuve du théorème 2. Elle est semblable à la preuve du théorème 1 mais on cherche une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ qui soit le β^n-développement de β^n. Si pour $i \geq 2$ tous les a_i sont strictement inférieurs à a_1 alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est le β-développement d'un nombre β [8], et nous allons montrer que si n est assez grand, ceci est vérifié. Si n est assez grand, la première fonction symétrique $\sigma_1^{(n)}$ de β^n est strictement supérieure à $|\sigma_2^{(n)}| + |\sigma_3^{(n)}| + \cdots + |\sigma_d^{(n)}|$ mais le signe des autres fonctions symétriques dépend du signe de la partie réelle des fonctions symétriques des conjugués $\alpha_2^n, \dots, \alpha_d^n$ de module inférieur à 1 de β^n. Notons $\tau_1^{(n)}, \dots, \tau_d^{(n)}$ ces fonctions symétriques et notons $\theta_2^{(n)}, \dots, \theta_d^{(n)}$ ceux des α_i dont les arguments sont entre $-\pi$ et π. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathbb{H}$ des entiers n tels que tous les $\theta_i^{(n)}$ sont inférieurs à ε en module est relativement dense (voir [7], théorème 442, Chap. 23). Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, tous les $\alpha_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}\alpha_j^{(n)}, \alpha_i^{(n)}\alpha_j^{(n)}\alpha_k^{(n)}, \dots$ auront une partie réelle strictement positive car leur argument principal est compris entre $-d\varepsilon$ et $+d\varepsilon$ et donc toutes les fonctions symétriques en les α_i (elles sont réelles) seront strictement positives. Il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|\sigma_1^{(n)}| > |\sigma_2^{(n)}| + |\sigma_3^{(n)}| + \cdots + |\sigma_d^{(n)}|$, $\sigma_1^{(n)} - 1 > |\sigma_2^{(n)}| > \cdots > |\sigma_d^{(n)}| > 0$ et toutes les fonctions symétriques $\tau_1^{(n)}, \dots, \tau_{d-1}^{(n)}$ des α_i^n sont strictement inférieures à 1. Soit $\mathbb{H}_\beta$ l'ensemble des $n \geq n_0$ qui sont dans $\mathbb{H}$; fixons

$n \in \mathbb{H}_\beta$, alors le polynôme minimal de β^n, $X^d - \sigma_1^{(n)} X^{d-1} + \sigma_2^{(n)} X^{d-2} + \cdots + (-1)^d \sigma_d^{(n)}$, a des coefficients alternativement positifs et négatifs. Pour construire la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ nous prendrons $a_1 = \sigma_1^{(n)} - 1 = \lfloor \beta^n \rfloor$ et nous emploierons le même procédé qu'au théorème 1 : $\sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)}$ est positif et strictement inférieur à $\sigma_1^{(n)} - 1$; $\sigma_1^{(n)} - 1 - \sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)}$ est positif et strictement inférieur à $\sigma_1^{(n)} - 1$ car $\sigma_2^{(n)} > \sigma_3^{(n)}$; répétant cet argument nous obtenons une suite $a_1 a_2 \ldots a_{d-1}(b)^\infty$ qui est le β^n-développement de β^n.

Un calcul simple de déterminant montre que le produit des conjugués de β est égal à $(-1)^d (b_{d-1} - c_d)$. □

Exemple. Considérons la racine positive β de $X^3 - X - 1$. Pour $\gamma = \beta^4$ dont le polynôme minimal est $X^3 - 2X^2 - 3X - 1$, la valeur de la seconde fonction symétrique σ_2 est négative et la méthode présentée ci-dessus donne

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{2}{\gamma} + \frac{3}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^3} \\
&= \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\gamma^2} + \frac{3}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^4} + \frac{3}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^3} \\
&= \frac{1}{\gamma} + \frac{5}{\gamma^2} + \frac{4}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^4}.
\end{aligned}$$

Itérer le procédé ne permettra pas d'obtenir le γ-développement de γ qui est 30021 (il y a deux béta-conjugués qui sont les racines de $X^2 - X + 1$). Mais si l'on considère $\delta = \beta^5$ dont le polynôme minimal est $X^3 - 5X^2 + 4X - 1$ et la seconde fonction symétrique de valeur positive, on obtient

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{5}{\delta} - \frac{4}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3} \\
&= \frac{4}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} - \frac{3}{\delta^3} + \frac{1}{\delta^4} \\
&= \frac{4}{\delta} + \frac{0}{\delta^2} + \frac{2}{\delta^3} - \frac{3}{\delta^4} + \frac{1}{\delta^5} \\
&= \frac{4}{\delta} + \frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{2}{\delta^3} - \frac{3}{\delta^4} + \frac{1}{\delta^5}\Big).
\end{aligned}$$

La récurrence est mise en place et le δ-développement est $40(1)^\infty$. La matrice positive d'ordre 3 associée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les développements de β^6 et β^7 sont 521 et 711. Notons que les béta-conjugués de β et β^4 sont les mêmes (voir le dernier exemple de la partie 1).

Preuve de la proposition 2. Pour les nombres de Pisot totalement positifs, le raisonnement est le même avec $\mathbb{H}_\beta = \mathbb{N}$. Si tous les conjugués de β sont négatifs, β^2 n'a que des conjugués positifs et vérifie ce qui précède. Pour les puissances impaires de β, disons β^{2p+1}, les fonctions symétriques $\tau_i^{(2p+1)}$ des α_i seront alternativement positives et négatives et on aura $\sigma_1^{(2p+1)}$ positif, $\sigma_2^{(2p+1)}$ négatif et ainsi de suite : le polynôme minimal n'aura que des coefficients négatifs à l'exception du terme de plus haut degré et correspond au $\beta-$développement. β^{2p+1} est donc un nombre de Parry simple.

Lorsque β a des conjugués des deux signes, on applique à β^2 le résultat sur les nombres totalement positifs. $\square$

Remerciements. L'auteur remercie le referee anonyme pour ses suggestions et l'éditeur pour son aide à finaliser l'édition de ce travail.

Bibliographie

[1] J.P. Allouche and S. Shallit, *Automatic sequences.* Cambridge University Press, 2003.

[2] M.J. Bertin, A. Decomps, M. Grandet, M. Pathiaux and J.P. Schreiber., *Pisot and Salem numbers.* Birkhauser, Bale, 1992.

[3] A. Bertrand, *Développements en bases de Pisot et répartition modulo 1.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **285**, No 6 (1977), A419–A421.

[4] A. Bertrand, *Répartition modulo un et développements en bases de Pisot.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **289**, No 1 (1979), 1–4.

[5] C. Frougny and J. Sakarovitch, *Automatic conversion from Fibonacci representation in base phi, and a generalization.* Internat. J. Algebra Comput., **9** (1999), 351–384.

[6] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices.* Vol **2**, Chelsea, New-York, 1959.

[7] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon Press, Oxford, 1938.

[8] D. Lind, *The entropies of topological Markov shifts and a related class of algebraic integers.* Ergodic Theory and Dynamical Systems **4** (2) (1984), 283–300.

[9] W. Parry, *On the $\beta-$ expansions of real numbers.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **11** (1960), 401–416.

[10] V. Prasolov, *Problèmes et Théorèmes d'Algèbre Linéaire.* Cassini, Paris, 2008.

[11] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties.* Acta Math. Sci. Hungar., **8** (1957), 477-493.

Anne Bertrand-Mathis
Université de Poitiers
Mathématiques
BP 30179
86962 Futuroscope cedex, France
E-mail: anne.bertrand@math.univ-poitiers.fr