

JOURNAL

de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Shanwen WANG

Le système d'Euler de Kato

Tome 25, n° 3 (2013), p. 677-758.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2013__25_3_677_0>

© Société Arithmétique de Bordeaux, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Le système d’Euler de Kato

par SHANWEN WANG

RÉSUMÉ. Ce texte est consacré au système d’Euler de Kato, construit à partir des unités modulaires, et à son image par l’application exponentielle duale (loi de réciprocité explicite de Kato). La présentation que nous en donnons est sensiblement différente de la présentation originelle de Kato.

ABSTRACT. *Kato’s Euler system.*

This article is devoted to Kato’s Euler system, which is constructed from modular units, and to its image by the dual exponential map (so-called Kato’s reciprocity law). The presentation in this article is different from Kato’s original one, and the dual exponential map in this article is a modification of Colmez’s construction in his Bourbaki talk.

TABLE DES MATIÈRES

1. Notations et Introduction	678
1.1. Notations	678
1.2. Introduction	680
1.3. Remerciements	686
2. Système d’Euler de Kato	686
2.1. Séries d’Eisenstein-Kronecker et la distribution $z_{\mathbf{Eis}}$	686
2.2. Unités de Siegel et distribution $z_{\mathbf{Siegel}}$	698
2.3. Théorie de Kummer p -adique	703
3. Les anneaux de Fontaine	708
3.1. Le corps \mathfrak{K} et les formes modulaires	708
3.2. Application de la construction de Fontaine à l’anneau \mathfrak{K}^+	716
3.3. Une application logarithme log	721
4. Cohomologie des représentations du groupe $P_{\mathfrak{K}_M}$	723
4.1. Cohomologie des représentations analytiques du groupe P_m	725
4.2. Cohomologie des $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{M^{p^\infty}}^+)$ -représentations du groupe $P_{\mathfrak{K}_M}$	736
5. La loi de réciprocité explicite de Kato	739
5.1. Construction de l’application exponentielle duale de Kato	739
5.2. Application au système d’Euler de Kato	742
Bibliographie	757

1. Notations et Introduction

1.1. Notations. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} , et on fixe, pour tout nombre premier p , une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de \mathbb{Q}_p , ainsi qu'un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Si $N \in \mathbb{N}$, on note ζ_N la racine N -ième $e^{2i\pi/N} \in \overline{\mathbb{Q}}$ de l'unité, et on note \mathbb{Q}^{cycl} l'extension cyclotomique de \mathbb{Q} , réunion des $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$, ainsi que $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ l'extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p , réunion de $\mathbb{Q}_p(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$.

1.1.1. Objets adéliques. Soient \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers de \mathbb{Z} et $\hat{\mathbb{Z}}$ le complété profini de \mathbb{Z} , alors $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. Soit \mathbb{A}_f l'anneau des adèles finis de \mathbb{Q} (le produit restreint des \mathbb{Q}_p par rapport aux sous-anneaux \mathbb{Z}_p de \mathbb{Q}_p). Quel que soit $x \in \mathbb{A}_f$, on note x_p (resp. $x^{[p]}$) la composante de x en p (resp. en dehors de p). Notons $\hat{\mathbb{Z}}^{[p]} = \prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l$ et $\mathbb{A}_f^p = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}$. On a donc $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p \times \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}$ et $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{A}_f^p$. Cela induit les décompositions suivantes : pour tout $d \geq 1$,

$$\mathbf{M}_d(\mathbb{A}_f) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathbf{M}_d(\mathbb{A}_f^p) \text{ et } \text{GL}_d(\mathbb{A}_f) = \text{GL}_d(\mathbb{Q}_p) \times \text{GL}_d(\mathbb{A}_f^p).$$

On définit les sous-ensembles suivants de \mathbb{A}_f et $\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}}^{(p)} &= \mathbb{Z}_p^* \times \hat{\mathbb{Z}}^{[p]} \text{ et } \mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}}^{[p]}), \\ \mathbb{A}_f^{(p)} &= \mathbb{Z}_p^* \times (\mathbb{A}_f^p) \text{ et } \mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)} = \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f^p). \end{aligned}$$

1.1.2. Actions de groupes. Soient X un espace topologique localement profini, V un \mathbb{Z} -module. On note $\text{LC}_c(X, V)$ le module des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans V dont le support est compact dans X . On note $\mathfrak{D}_{\text{alg}}(X, V)$ l'ensemble des distributions algébriques sur X à valeurs dans V , c'est à dire, des applications \mathbb{Z} -linéaires de $\text{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ à valeurs dans V . On note $\int_X \phi \mu$ la valeur de μ sur ϕ , où $\mu \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X, V)$ et $\phi \in \text{LC}_c(X, \mathbb{Z})$.

Soit G un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur X et V . On munit $\text{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ et $\mathfrak{D}_{\text{alg}}(X, V)$ d'actions de G à droite comme suit :

si $g \in G, x \in X, \phi \in \text{LC}_c(X, \mathbb{Z}), \mu \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X, V)$, alors

$$(1.1) \quad (\phi * g)(x) = \phi(x * g^{-1}) \text{ et } \int_X \phi(\mu * g) = \left(\int_X (\phi * g^{-1}) \mu \right) * g.$$

1.1.3. Formes modulaires. Soient A un sous-anneau de \mathbb{C} et Γ un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour Γ . On note aussi $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ le sous A -module de $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ des formes modulaires dont le q -développement à la pointe $i\infty$ est à coefficients dans A . On pose $\mathcal{M}(\Gamma, A) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma, A)$. Et on note $\mathcal{M}_k(A)$ (resp. $\mathcal{M}(A)$) la réunion des $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ (resp. $\mathcal{M}(\Gamma, A)$), où Γ décrit tous les sous-groupes d'indice fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. On peut munir

l'algèbre $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+ = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \mid \det \gamma > 0\}$ de la façon suivante :

$$(1.2) \quad f * \gamma = (\det \gamma)^{1-k} f|_k \gamma, \text{ pour } f \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \text{ et } \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+,$$

où $f|_k \gamma$ est l'action modulaire usuelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$ (voir section §2.1.1 la formule (2.1)).

Définition 1.1. Soient $N \geq 1$ et $\Gamma(N) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \}$. Le groupe $\Gamma(N)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini. On dit qu'un sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de congruence s'il contient $\Gamma(N)$ pour un certain $N \geq 1$. On note S^{cong} l'ensemble des sous-groupes de congruence.

Exemple 1.2. Les sous-groupes $\Gamma_0(N) = \{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod N \}$ et $\Gamma_1(N) = \{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \}$ sont des sous-groupes de congruences.

On définit de même :

$$\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_{\Gamma \in S^{\mathrm{cong}}} \mathcal{M}_k(\Gamma, A) \text{ et } \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(A) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A).$$

Soit K un sous-corps de \mathbb{C} et soit \bar{K} la clôture algébrique de K . On note Π_K le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\bar{K})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$; c'est un groupe profini. On note $\Pi'_\mathbb{Q}$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\mathbb{Q})$ engendré par $\Pi_\mathbb{Q}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$ muni d'une topologie pour laquelle $\Pi_\mathbb{Q}$ est un sous-groupe ouvert. Plus généralement, si $S \subset \mathcal{P}$ est fini, on note $\Pi_\mathbb{Q}^{(S)}$ le sous-groupe de $\Pi'_\mathbb{Q}$ engendré par $\Pi_\mathbb{Q}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}^{(S)})_+$, où $\mathbb{Z}^{(S)}$ est le sous-anneau de \mathbb{Q} obtenu en inversant tous les nombres premiers qui n'appartiennent pas à S .

1.1.4. Objets p -adiques. Soit q une variable. On note $\mathfrak{K}^+ = \mathbb{Q}_p\{\frac{q}{p}\}$ l'anneau des fonctions analytiques sur le disque fermé $\{q \in \mathbb{C}_p : v_p(q) \geq 1\}$, que l'on munit de la valuation spectrale v_p (i.e. $v_p(f) = \inf_{v_p(q) \geq 1} v_p(f(q))$). On note \mathfrak{K} le complété du corps des fractions de \mathfrak{K}^+ . On fixe une clôture algébrique $\bar{\mathfrak{K}}$ de \mathfrak{K} et on note $\bar{\mathfrak{K}}^+$ la clôture intégrale de \mathfrak{K}^+ dans $\bar{\mathfrak{K}}$. On note $\mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$ le groupe de Galois de $\bar{\mathfrak{K}}$ sur \mathfrak{K} .

On choisit un système compatible $(q_M)_{M \geq 1}$ de racines M -ièmes de q dans $\bar{\mathfrak{K}}^+$ (i.e. $q_{NM}^N = q_M$, pour tous $N, M \geq 1$). On note $F_M = \mathbb{Q}_p(\zeta_M)$ et $F_{Mp^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} F_{Mp^n}$. Soit $\mathfrak{K}_M = \mathfrak{K}[q_M, \zeta_M]$; c'est une extension galoisienne de \mathfrak{K} . On note \mathfrak{K}_∞ la réunion des \mathfrak{K}_M pour tous $M \geq 1$, \mathfrak{K}_∞^+ la clôture intégrale de \mathfrak{K}^+ dans \mathfrak{K}_∞ , $P_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{K}_\infty$ sur \mathfrak{K} , ainsi que $P_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cycl}}$ le groupe galois de \mathfrak{K}_∞ sur \mathfrak{K} .

L'application qui à une forme modulaire associe son q -développement, nous fournit une inclusion de $\mathcal{M}(\mathbb{Q})$ dans $\bar{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{K}_\infty$ et un morphisme $P_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow$

$\Pi_{\mathbb{Q}}$ car $P_{\mathbb{Q}_p}$ préserve l'espace $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$. Ceci induit un morphisme $\mathcal{G}_{\mathbb{R}} \rightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$ et un morphisme "de localisation" $H^i(\Pi_{\mathbb{Q}}, W) \rightarrow H^i(\mathcal{G}_{\mathbb{R}}, W)$ pour tout $\Pi_{\mathbb{Q}}$ -module W et tout $i \in \mathbb{N}$ (cf. §3.1.1).

Enfin, on note $\mathcal{K}^+ = \mathbb{Q}_p[[q]]$ le complété q -adique de \mathbb{R}^+ , \mathcal{K}_M^+ le complété q -adique de $\mathbb{R}_M^+ = \mathbb{R}^+[\zeta_M, q_M]$ pour $M \geq 1$ un entier, \mathcal{K}_{∞}^+ la réunion des \mathcal{K}_M^+ pour tout $M \geq 1$, ainsi que $\mathcal{K}_{Mp^{\infty}}^+$ la réunion des $\mathcal{K}_{Mp^n}^+$ pour tout $n \geq 1$.

1.2. Introduction.

1.2.1. Fonctions L p -adiques de formes modulaires. Soit $N \geq 1$ et soit ϵ un caractère de Dirichlet modulo N . Soit $f(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ une forme primitive de poids $k \geq 2$ avec $q = e^{2i\pi\tau}$. Soient α, β les racines du polynôme $X^2 - a_p X + \epsilon(p)p^{k-1}$. Supposons $v_p(\alpha) < k - 1$, on pose $f_{\alpha}(\tau) = f(\tau) - \beta f(p\tau)$. C'est une forme de niveau Np , propre pour tous les T_l , normalisée, et avec la valeur propre α pour U_p . Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n q^{n/N}$ le q -développement de f_{α} . Comme $v_p(\alpha) < k - 1$ (en particulier $\alpha \neq 0$), on peut prolonger $n \mapsto b_n$ en une fonction sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ en forçant l'équation fonctionnelle $b_{np} = \alpha b_n$.

Soit $\phi \in \text{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}})$ une fonction localement constante à support compact dans \mathbb{Q}_p , à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On définit la fonction L complexe de la forme modulaire f associée à ϕ et α , par la formule

$$L(f_{\alpha}, \phi, s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} \phi(n) b_n n^{-s}.$$

La série converge pour $\text{Re}(s) > \frac{k+1}{2}$ et la fonction $L(f_{\alpha}, \phi, s)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe. De plus, il existe des nombres complexes non nuls Ω_f^+, Ω_f^- permettant de rendre algébriques les valeurs spéciales $L(f_{\alpha}, \phi, j)$ de $L(f_{\alpha}, \phi, s)$, pour $1 \leq j \leq k - 1$. Plus précisément (cf. [8, Thm.1]), si $\phi \in \text{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}})$ et si $1 \leq j \leq k - 1$, alors

$$\frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} L(f, \phi, j) \in \begin{cases} \mathbb{Q}(f_{\alpha}, \zeta_N) \cdot \Omega_f^+, & \text{si } \phi(-x) = (-1)^{j+1} \phi(x) \\ \mathbb{Q}(f_{\alpha}, \zeta_N) \cdot \Omega_f^-, & \text{si } \phi(-x) = (-1)^j \phi(x). \end{cases}$$

On pose

$$\tilde{L}(f_{\alpha}, \phi, j) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \left(\frac{L(f_{\alpha}, \phi - (-1)^j \phi^{-1}, j)}{\Omega_f^+} + \frac{L(f_{\alpha}, \phi + (-1)^j \phi^{-1}, j)}{\Omega_f^-} \right),$$

où $\phi^{-1}(x) = \phi(-x)$, ce qui est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et permet de le considérer comme un nombre p -adique.

On définit une transformée de Fourier de $LC_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ dans $LC_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ par la formule

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \phi(y) e^{-2i\pi xy} dy = p^{-m} \sum_{y \pmod{p^m}} \phi(y) e^{-2i\pi xy},$$

où $m \in \mathbb{N}$ est assez grand.

Rappelons que la transformée d'Amice nous donne un isomorphisme entre l'algèbre des distributions sur \mathbb{Z}_p à valeurs dans une extension finie L de \mathbb{Q}_p et l'anneau \mathcal{R}_L^+ des fonctions localement analytiques sur la boule ouverte $v_p(T) > 0$ à coefficients dans L :

$$\mathcal{A} : \mathfrak{D}(\mathbb{Z}_p, L) \cong \mathcal{R}_L^+; \mu \mapsto \mathcal{A}_\mu(T) = \int_{\mathbb{Z}_p} (1 + T)^x \mu.$$

Une distribution μ sur \mathbb{Z}_p est d'ordre k si sa transformée d'Amice $\mathcal{A}_\mu(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$ est d'ordre k (i.e. la suite de terme générale $\{v_p(a_n) + k \log_p n\}$ est minorée.)

Théorème 1.3. *Si $v_p(\alpha) < k - 1$, il existe une unique distribution $\mu_{f,\alpha}$ d'ordre $v_p(\alpha)$ sur \mathbb{Z}_p , telle que l'on ait*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) x^{j-1} \mu_{f,\alpha} = \tilde{L}(f_\alpha, \hat{\phi}, j),$$

quels que soient $\phi \in LC(\mathbb{Z}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, et $1 \leq j \leq k - 1$. De plus, quel que soit ϕ une fonction localement analytique sur \mathbb{Z}_p à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on a $\int_{p\mathbb{Z}_p} \phi(p^{-1}x) \mu_{f,\alpha} = \alpha^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) \mu_{f,\alpha}$.

Ce théorème signifie l'existence de l'interpolation p -adique des valeurs spéciales de la fonction L complexe de f_α . En particulier, on peut construire la fonction L p -adique de f associée à α et à un caractère localement analytique $\phi : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$,

$$L_{p,\alpha}(f, \phi, s) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \phi(x) \langle x \rangle^{s-1} \mu_{f,\alpha},$$

où $\langle x \rangle^{s-1} = \exp((s - 1) \log \langle x \rangle)$ et $s \in \mathbb{Z}_p$.

La démonstration du théorème 1.3 a été donnée par plusieurs personnes via des méthodes très différentes (cf. [8, Thm. 4] pour une introduction rapide sur ces méthodes). La manière classique (Mazur et Swinnerton-Dyer [15], Manin [14], Amice et Vélou [1], Vishik [27], Mazur-Tate-Teitelbaum [16]) est à utiliser la théorie de symboles modulaires pour démontrer l'existence d'un réseau de $\overline{\mathbb{Q}}\Omega_f^+ + \overline{\mathbb{Q}}\Omega_f^-$ contenant les $\int_{j_\infty^r} \tau^j f(\tau) d\tau$, pour $r \in \mathbb{Q}$ et $0 \leq j \leq k - 2$, ce qui fournit les résultats d'intégralité dont on a besoin pour démontrer l'existence de $\mu_{f,\alpha}$. On dispose une seconde construction, due à Kato [11] (cf. aussi Scholl [23]), qui repose sur la construction d'un système d'Euler (via la K -théorie) et sur une loi de réciprocité explicite

résultant d'un calcul délicat dans les anneaux de Fontaine, qui permet de montrer que la machine à fonctions L p -adiques de Perrin-Riou [19] fournit naturellement la distribution $\mu_{f,\alpha}$ quand on l'applique au système d'Euler de Kato. Colmez a esquissé dans [6] une variante de la méthode de Kato, et ce texte est consacré à vérifier que cette esquisse, convenablement modifiée, conduit¹ bien au résultat de Kato.

1.2.2. Le système d'Euler de Kato. En bref, un système d'Euler est une collection de classes de cohomologie vérifiant une relation de distribution. On construit le système d'Euler de Kato comme suit :

À partir des unités de Siegel, on construit une distribution algébrique z_{Siegel} sur $\mathbb{A}_f^2 - (0, 0)$ à valeurs dans $\mathbb{Q} \otimes (\mathcal{M}(\bar{\mathbb{Q}})[\frac{1}{\Delta}])^*$, où $\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$ est la forme modulaire de poids 12. Cette distribution z_{Siegel} est invariante sous l'action du groupe $\Pi'_{\mathbb{Q}}$. La théorie de Kummer p -adique nous fournit un élément

$$z_{\text{Siegel}}^{(p)} \in H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbb{A}_f^2 - (0, 0), \mathbb{Q}_p(1))).$$

Par cup-produit et restriction à $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)} \subset \Pi'_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)} \subset (\mathbb{A}_f^2 - (0, 0))^2$, on obtient une distribution algébrique :

$$z_{\text{Kato}} \in H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, \mathbb{Q}_p(2))).$$

En modifiant z_{Kato} par un opérateur $(c^2 - \langle c, 1 \rangle)(d^2 - \langle 1, d \rangle)$ (cf. §2.3.2) qui fait disparaître les dénominateurs, on obtient une distribution algébrique à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(2)$ (que l'on peut donc voir comme une mesure), et une torsion à la Soulé nous fournit enfin un élément

$$z_{\text{Kato},c,d}(k, j) \in H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, V_{k,j})),$$

où $V_{k,j} = \text{Sym}^{k-2} V_p \otimes \mathbb{Q}_p(2 - j)$, où V_p est la représentation standard de dimension 2 de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

1.2.3. La loi de réciprocité explicite de Kato. La loi de réciprocité explicite de Kato consiste à relier l'élément $z_{\text{Kato},c,d}(k, j)$, qui vit dans la cohomologie du groupe $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$, à une distribution construite à partir de produits de deux séries d'Eisenstein (le produit scalaire de Petersson d'une forme primitive avec un tel produit fait apparaître les valeurs spéciales de la fonction L de f , et c'est cela qui permettrait de construire la fonction L p -adique). Ceci se fait en plusieurs étapes :

- On commence par "localiser" notre classe de cohomologie à $\mathcal{G}_{\bar{\mathbb{R}}}$ et à étendre les coefficients de $V_{k,j}$ à $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(V_{k,j}) := \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{\mathbb{R}}^+) \otimes V_{k,j}$, où $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{\mathbb{R}}^+)$ est un énorme anneau de Fontaine.

1. Sauf l'identification de \exp_{BK}^* et \exp_{Kato}^* . Pour plus de détails, voir §1.2.5.

• On constate que l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$ sous l'application "de localisation"

$$H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathcal{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, V_{k,j})) \rightarrow H^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}, \mathcal{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(V_{k,j})))$$

est l'inflation d'un 2-cocycle sur $P_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cycl}}$ à valeurs dans $\mathcal{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, \tilde{V}_{k,j})$, où $\tilde{V}_{k,j} = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{\infty}^+) \otimes V_{k,j}$. Les méthodes de descente presque étale de Tate [26] et Sen [24], revisitées par Faltings [10] (cf. aussi Andreata-Iovita [4]) permettraient de montrer que c'est toujours le cas, mais nous donnons une preuve directe pour l'élément de Kato (cf. la construction dans §5.2).

• On construit une application exponentielle duale (cf. § 5.1) :

$$\text{exp}_{\mathbf{Kato}}^* : H^2(P_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, \tilde{V}_{k,j})) \rightarrow H^0(P_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, \mathcal{K}_{\infty}^+));$$

et on calcule l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$. On obtient finalement le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.4. *Si $k \geq 2$, $1 \leq j \leq k - 1$, et $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, on a :*

$$\text{exp}_{\mathbf{Kato}}^*(z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)) = z_{\mathbf{Eis},c,d}^{(p)}(k, j),$$

où $z_{\mathbf{Eis},c,d}^{(p)}(k, j) \in H^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}, \mathcal{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)}, \mathfrak{K}_{\infty}^+))$ est la localisée d'une distribution $z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j)$ sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)$, à valeurs dans $\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}) \subset \mathfrak{K}_{\infty}^+$, invariante sous l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$.

1.2.4. La cohomologie de P_m . Soit $M \geq 1$ tel que $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$. On note $\mathfrak{K}_{Mp^{\infty}} = \cup_{n \geq 1} \mathfrak{K}_{Mp^n}$. La définition de l'application $\text{exp}_{\mathbf{Kato}}^*$ et le calcul de l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$ reposent sur une description explicite de la cohomologie du groupe de Galois $P_{\mathfrak{K}_M}$ de l'extension $\mathfrak{K}_{Mp^{\infty}}/\mathfrak{K}_M$; c'est un groupe analytique p -adique de rang 2, isomorphe à

$$P_m = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a = 1, c = 0, b \in p^m \mathbb{Z}_p, d \in 1 + p^m \mathbb{Z}_p \}.$$

Si $u, v \in p^m \mathbb{Z}_p$, on pose (u, v) l'élément $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$ de P_m . Soit V une représentation analytique de P_m . On dispose deux opérateurs $\partial_i : V \rightarrow V$, pour $i = 1, 2$, définis par :

$$x * (u, v) = x + u\partial_1 x + v\partial_2 x + O((u, v)^2),$$

où $O((u, v)^2)$ est une fonction analytique sur P_m de valuation ≥ 2 à valeurs dans V . On démontre le résultat très utile suivant :

Théorème 1.5 (Prop.4.10). *Soit V une représentation analytique de P_m . Alors*

(i) *Tout élément de $H^2(P_m, V)$ est représentable par un 2-cocycle analytique ;*

(ii) On a $H^2(P_m, V) \cong V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$, et l'image d'un 2-cocycle analytique

$$((u, v), (x, y)) \rightarrow c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l \geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

par cet isomorphisme, est celle de $\delta^{(2)}(c_{(u,v),(x,y)}) = c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0}$.

1.2.5. Survol de la méthode de Kato et sa variante de Colmez.

Nous donnerons un survol vague de la démonstration du théorème 1.3 pour expliquer le rôle du théorème 1.4 dans la méthode de Kato. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [11] et [6].

• Si $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k - 1$, Kato [11] a construit un système cohérent $c_M(k, j) \in H_{\text{ét}}^2(Y(M), W_{k,j})$, où $W_{k,j}$ est le système local sur la courbe modulaire $Y(M)$ de niveau M dans la cohomologie du lequel on découpe les représentations p -adiques associées aux formes modulaires de poids k et de niveau M d'après Deligne [9]. Ensuite, il dispose d'une application exponentielle duale :

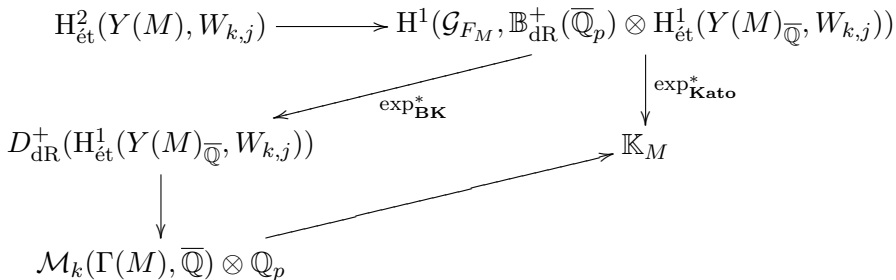
$$(1.3) \quad \exp_{\mathbf{Kato}}^* : H_{\text{ét}}^2(Y(M), W_{k,j}) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(Y(M), \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathbb{K}}) \otimes W_{k,j}) \rightarrow \mathbb{K}_M,$$

avec $\mathbb{K}_M = \mathbb{K}[\zeta_M, q_M]$ et $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de \mathbb{K} , où \mathbb{K} est le complété p -adique du corps des fractions de $\mathbb{Z}_p[[q]][[q^{-1}]]$. Dans son exposé de Bourbaki [6], Colmez a reformulé cette application par la méthode de Tate-Sen-Colmez pour le corps $\overline{\mathbb{K}}$ et il a esquissé une preuve du théorème 1.4. Sa méthode est très belle ; en revanche, le 2-cocycle qu'il a explicité (cf. § 5.2) n'appartient pas à son groupe de cohomologie. Cela nous oblige à augmenter la taille du corps \mathbb{K} et à reconstruire l'application $\exp_{\mathbf{Kato}}^*$ pour l'anneau \mathfrak{K}^+ suivant l'idée de Colmez.

D'autre part, si V est une représentation de de Rham de \mathcal{G}_{F_M} , on a l'application exponentielle duale de Bloch-Kato :

$$\exp_{\mathbf{BK}}^* : H^1(\mathcal{G}_{F_M}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathbb{Q}_p}) \otimes V) \cong H^0(\mathcal{G}_{F_M}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathbb{Q}_p}) \otimes V) =: D_{\text{dR}}^+(V),$$

dont l'inverse est donné par le cup-produit avec $\log \chi_{\text{cycl}} \in H^1(\mathcal{G}_{F_M}, \overline{\mathbb{Q}_p})$. En plus, Kato [11] a vérifié que le diagramme suivant est commutatif :



Ceci lui permet d'identifier les deux applications exponentielles. En revanche, je ne sais pas comment comparer $\exp_{\mathbf{BK}}^*$ et la nouvelle $\exp_{\mathbf{Kato}}^*$.

On identifie $\text{exp}_{\mathbf{BK}}^*$ et $\text{exp}_{\mathbf{Kato}}^*$ et on projette le système d'Euler de Kato sur la composante à la forme primitive f . Ceci demande de calculer le produit scalaire de Pertersson de f avec un produit de deux séries d'Eisenstein, ce qui se fait au moyen de la méthode de Rankin et le résultat fait intervenir les valeurs spéciales des fonction L attachées à f et ses tordues des caractères de Dirichlet.

• Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p . On note \mathcal{R}_L (resp. \mathcal{E}_L^\dagger) l'anneau des $f(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ des fonctions analytiques (resp. analytiques bornées pour la valuation $v_p(f) = \inf v_p(a_n)$) sur une couronne du type $0 < v_p(T) \leq r$, où r dépend de f et a_n sont des éléments de L . On les munit d'un Frobenius φ et d'une action de $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ via les formules :

$$\varphi\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k ((1 + T)^p - 1)^k$$

et

$$\gamma\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k ((1 + T)^{\chi_{\text{cycl}}(\gamma)} - 1)^k.$$

Ces actions commutent entre elles.

Un (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{E}_L^\dagger est un \mathcal{E}_L^\dagger -espace vectoriel D de dimension finie d muni d'actions semi-linéaires de φ et Γ commutant entre elles, vérifiant que la matrice de φ sous une certaine base de D appartient à $\text{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L^\dagger})$ avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L^\dagger} = \{f \in \mathcal{E}_L^\dagger \mid v_p(f) = \inf v_p(a_k) \geq 0\}$. Sur un (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{E}_L^\dagger , il existe un opérateur ψ commutant avec l'action de Γ , qui est l'inverse à gauche de φ .

La théorie d'Iwasawa et la théorie de (φ, Γ) -modules (cf. [5]) nous fournissent un isomorphisme :

$$\text{Exp}^* : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) = H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \mathfrak{D}_0(\mathbb{Z}_p^*, V)) \cong D^\dagger(V)^{\psi=1},$$

avec V une L -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et $\mathfrak{D}_0(\mathbb{Z}_p^*, V)$ l'algèbre des mesures sur \mathbb{Z}_p^* à valeurs dans V .

Soit V une L -représentation cristalline de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Une analyse délicate (cf. [6, §4.4]) de la structure de $D^\dagger(V)^{\psi=1}$ fournit une candidate pour la distribution voulue dans le théorème 1.3.

• Il reste à vérifier la propriété d'interpolation, mais c'est une conséquence non-triviale du théorème suivant (cf. [5]) :

Théorème 1.6. *Si V est une L -représentation de de Rham de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, si $n \in \mathbb{N}$ assez grand, et si $\mu \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V)$, alors $\varphi^{-n}(\text{Exp}^*(\mu))$ converge dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathbb{Q}_p}) \otimes V$, et on a*

$$p^{-n} \varphi^{-n}(\text{Exp}^*(\mu)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{exp}_{\mathbf{BK}}^* \left(\int_{1+p^n \mathbb{Z}_p} x^{-k} \mu \right) \in L(\zeta_{p^n})[[t]] \otimes D_{\text{dR}}(V).$$

1.3. Remerciements. Ce travail est ma thèse de doctorat, sous la direction de Pierre Colmez. Il est évident au lecteur combien cet article doit à Colmez comme cet article vit sur son travail magnifique [6]. Je voudrais lui exprimer toute ma gratitude. Je remercie vivement Denis Benois pour ses remarques utiles, Gaëtan Chenevier et Gabriel Dospinescu pour des discussions et ses encouragements, et les rapporteurs anonymes pour ses remarques. Merci aussi à Francesco Lemma, qui m’a aidé à améliorer la rédaction.

2. Système d’Euler de Kato

2.1. Séries d’Eisenstein-Kronecker et la distribution z_{Eis} .

2.1.1. Formes modulaires. Soient $\mathcal{H} = \{x + iy, y > 0\}$ le demi-plan de Poincaré, $A \subset \mathbb{R}$ un sous anneau. On note $\text{GL}_2(A)_+ = \{\gamma \in \text{GL}_2(A) \mid \det \gamma > 0\}$, et on définit pour chaque $k \in \mathbb{N}$ une action à droite de $\text{GL}_2(\mathbb{R})_+$ sur l’ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{H} dans \mathbb{C} par la formule :

$$(2.1) \quad (f|_k \gamma)(\tau) = \frac{(\det \gamma)^{k-1}}{(c\tau + d)^k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \text{ si } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{H} dans \mathbb{C} fixée par un sous groupe Γ de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ d’indice fini. Alors cette fonction f est une fonction périodique de période N pour un certain entier $N \geq 1$. Le q -développement de f s’écrit sous la forme ci-dessous :

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} a_n e^{2i\pi n\tau} = \sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} a_n q^n, \text{ où } q = e^{2i\pi\tau}.$$

Définition 2.1. Soit Γ un sous-groupe de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ d’indice fini. Une forme modulaire de poids k pour Γ est une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $f|_k \gamma = f$ pour $\gamma \in \Gamma$;
- (2) f est holomorphe à l’infini (i.e. quel que soit $\gamma \in \Gamma \setminus \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, le q -développement de $f|_k \gamma(\tau)$ est de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} a_n q^n$, où $q = e^{2i\pi\tau}$: il n’y a pas de termes négatifs).

Si K est un corps algébriquement clos et si Γ est un sous-groupe distingué d’indice fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\Gamma, K)$ sur $\mathcal{M}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$ est $\text{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$. Ceci implique $\Pi_K = \widehat{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$, où $\widehat{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ est le complété profini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dans le cas général, on dispose d’une suite exacte :

$$1 \rightarrow \Pi_{\overline{K}} \rightarrow \Pi_K \rightarrow \mathcal{G}_K \rightarrow 1,$$

qui admet une section $\mathcal{G}_K \rightarrow \Pi_K$ naturelle, en faisant \mathcal{G}_K agir sur les coefficients du q -développement des formes modulaires.

Soient $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma, \overline{K})$ et $\alpha \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. On peut vérifier que $(f * \alpha)|_k(\alpha^{-1}\gamma\alpha) = f * \alpha$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Donc $f * \alpha$ est invariante pour

le groupe $\alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comme α peut s'écrire sous la forme $\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on en déduit

$$(f * \alpha)(\tau) = d^{-k}(f * \gamma)\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) = d^{-k}(f|_k \gamma)\left(\frac{a\tau + b}{d}\right),$$

ce qui montre que $f * \alpha$ est holomorphe en $i\infty$. Donc $f * \alpha$ est une forme modulaire et $\mathcal{M}(\overline{K})$ est stable sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. On définit Π'_K comme le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\overline{K})$ engendré par Π_K et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. Plus généralement, si $S \subset \mathcal{P}$ est fini, on note $\Pi_K^{(S)}$ le sous-groupe de Π'_K engendré par Π_K et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}^{(S)})$, où $\mathbb{Z}^{(S)}$ est le sous-anneau de \mathbb{Q} obtenu en inversant tous les nombres premiers qui n'appartiennent pas à S .

Le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est le groupe profini $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, le complété profini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par rapport aux sous-groupes de congruence. D'autre part, quel que soit $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, le groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agit sur les coefficients du q -développement de f à travers son quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ qui est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}^*$ par le caractère cyclotomique. On note H le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$. La sous-algèbre $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est stable par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ qui agit à travers H .

Théorème 2.2. *On a un diagramme commutatif de groupes :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \Pi_{\overline{\mathbb{Q}}} & \longrightarrow & \Pi_{\mathbb{Q}} & \overset{\sim}{\longleftarrow} & \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & H & \overset{\iota_0}{\longleftarrow} & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \chi_{\mathrm{cycl}} \\
 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \overset{\det}{\longleftarrow} & \hat{\mathbb{Z}}^* \longrightarrow 1 \\
 & & & & & & \downarrow \iota
 \end{array}$$

où $\alpha : H \rightarrow \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier H et $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Dans cette identification la section de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ décrite plus haut envoie $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.

La démonstration repose sur l'étude des séries d'Eisenstein qui se trouve plus loin, et donc on donne l'idée ici.

- Construire une bijection $\alpha : H \rightarrow \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$:

Soit $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ et soit $\sigma_u \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ l'image inverse de u dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ via l'isomorphisme $\chi_{\mathrm{cycl}} : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q}) \cong \hat{\mathbb{Z}}^*$. On peut décomposer H (resp. $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$) en l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})\sigma_u$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$) par la classe à droite suivant $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Alors, on définit une bijection de H sur $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ en envoyant la classe à droite $\gamma\sigma_u$ sur $\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.

• L'étude des séries d'Eisenstein (c.f. Prop. 2.12) montre que la bijection $\alpha : H \rightarrow \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ construite dans l'étape précédente est un morphisme de groupes :

En utilisant la bijection α , on définit une action de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ induit par celle de H :

Définition 2.3. Si $\gamma = \gamma_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ avec $\gamma_0 \in \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, et si $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, on définit

$$f * \gamma := f * (\alpha^{-1}(\gamma)) = f * (\gamma_0 \sigma_u).$$

En utilisant le fait que l'algèbre $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$ est engendrée par les séries d'Eisenstein, on conclut que le corps des fractions de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est engendré par les séries d'Eisenstein par la théorie de Galois pour l'extension $\mathrm{Frac}(\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}))$ sur $\mathrm{Frac}(\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}))$. On définit une autre action du groupe $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein (c.f. déf. 2.7), dont on peut le prolonger en $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, et on montre dans la proposition 2.12 que ces deux actions coïncident. Donc α est un morphisme de groupes et cela nous permet d'identifier le groupe H au groupe $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ naturellement.

Remarque 2.4. Ce théorème est un analogue du résultat de Shimura [25, Chapter 6], qui étudie le groupe de galois du corps des fonctions modulaires.

2.1.2. Séries d'Eisenstein-Kronecker.

Définition 2.5. Si $(\tau, z) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}$, on pose $q = e^{2i\pi\tau}$ et $q_z = e^{2i\pi z}$. On introduit l'opérateur $\partial_z := \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial z} = q_z \frac{\partial}{\partial q_z}$. On pose aussi $e(a) = e^{2i\pi a}$. Si $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathcal{H}$, et $z, u \in \mathbb{C}$, la série d'Eisenstein-Kronecker (c.f. [28, Chapter VIII]) est

$$H_k(s, \tau, z, u) = \frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k} \left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{2i\pi}\right)^{s-k} \sum'_{\omega \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau} \frac{\overline{\omega + z}^k}{|\omega + z|^{2s}} e\left(\frac{\omega \bar{u} - u \bar{\omega}}{\tau - \bar{\tau}}\right),$$

qui converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$, et possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec des pôles simples en $s = 1$ (si $k = 0$ et $u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$) et $s = 0$ (si $k = 0$ et $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$). Dans la formule ci-dessus \sum' signifie (si $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$) que l'on supprime le terme correspondant à $\omega = -z$. De plus, elle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$H_k(s, \tau, z, u) = e\left(\frac{z\bar{u} - u\bar{z}}{\tau - \bar{\tau}}\right) H_k(k + 1 - s, \tau, u, z).$$

Si $k \geq 1$, on définit les fonctions suivantes :

$$E_k(\tau, z) = H_k(k, \tau, z, 0) = \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum'_{\omega \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau} \frac{1}{(\omega + z)^k} \text{ si } k \geq 3,$$

$$F_k(\tau, z) = H_k(k, \tau, 0, z) = \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum'_{\omega \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau} \frac{1}{(\omega)^k} e\left(\frac{\omega \bar{z} - z \bar{\omega}}{\tau - \bar{\tau}}\right) \text{ si } k \geq 3.$$

Les fonctions $E_k(\tau, z)$ et $F_k(\tau, z)$ sont périodiques en z de période $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. De plus on a :

$E_{k+1}(\tau, z) = \partial_z E_k(\tau, z)$, si $k \in \mathbb{N}$ et $E_0(\tau, z) = \log |\theta(\tau, z)|$ si $z \notin \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, où $\theta(\tau, z)$ est donnée par le produit infini :

$$\theta(\tau, z) = q^{1/12} (q_z^{1/2} - q_z^{-1/2}) \prod_{n \geq 1} ((1 - q^n q_z)(1 - q^n q_z^{-1})).$$

On note $\Delta = (\partial_z \theta(\tau, z)|_{z=0})^{12} = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$ la forme modulaire de poids 12.

Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ qui a pour image (α, β) dans $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$. Si $k = 2$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, ou si $k \geq 1$ et $k \neq 2$, on définit :

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)} = E_k(\tau, a\tau + b) \text{ et } F_{\alpha, \beta}^{(k)} = F_k(\tau, a\tau + b).$$

Si $k = 2$ et $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, on définit $E_{0,0}^{(2)} = F_{0,0}^{(2)} := \lim_{s \rightarrow 2} H_2(s, \tau, 0, 0)$.

Lemme 2.6. Les fonctions $E_{\alpha, \beta}^{(k)}, F_{\alpha, \beta}^{(k)}$ satisfont les relations de distribution suivantes, quel que soit l'entier $f \geq 1$:

$$(2.2) \quad \sum_{\substack{f\alpha'=\alpha, \\ f\beta'=\beta}} E_{\alpha', \beta'}^{(k)} = f^k E_{\alpha, \beta}^{(k)} \text{ et } \sum_{f\alpha'=\alpha, f\beta'=\beta} F_{\alpha', \beta'}^{(k)} = f^{2-k} F_{\alpha, \beta}^{(k)}$$

$$(2.3) \quad \sum_{f\beta'=\beta} E_{\alpha, \beta'}^{(k)} \left(\frac{\tau}{f}\right) = f^k E_{\alpha, \beta}^{(k)} \text{ et } \sum_{f\beta'=\beta} F_{\alpha, \beta'}^{(k)} \left(\frac{\tau}{f}\right) = f F_{\alpha, \beta}^{(k)}.$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ un représentant de $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$. Les relations pour $E_{\alpha, \beta}^{(k)}$ se déduisent du calcul suivant pour $k \geq 3$ (pour $k = 1, 2$, il faut utiliser un prolongement analytique) :

$$\sum_{\substack{f\alpha'=\alpha \\ f\beta'=\beta}} E_{\alpha', \beta'}^{(k)} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq f-1 \\ 0 \leq j \leq f-1}} \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum'_{w \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau} \frac{1}{(w + \frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})^k} = f^k E_{\alpha, \beta}^{(k)};$$

$$\sum_{f\beta'=\beta} E_{\alpha, \beta'}^{(k)} \left(\frac{\tau}{f}\right) = \sum_{j=0}^{f-1} \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum'_{w \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{\tau}{f}} \frac{1}{(w + \frac{a\tau}{f} + \frac{b+j}{f})^k} = f^k E_{\alpha, \beta}^{(k)}.$$

La relation $\sum_{f\beta'=\beta} F_{\alpha, \beta'}^{(k)} \left(\frac{\tau}{f}\right) = f F_{\alpha, \beta}^{(k)}$ se déduit du même genre de calculs

que les relations $\sum_{\substack{f\alpha'=\alpha \\ f\beta'=\beta}} F_{\alpha', \beta'}^{(k)} = f^{2-k} F_{\alpha, \beta}^{(k)}$ et $\sum_{f\beta'=\beta} E_{\alpha, \beta'}^{(k)} \left(\frac{\tau}{f}\right) = f^k E_{\alpha, \beta}^{(k)}$; et la

relation $\sum_{\substack{f\alpha'=\alpha \\ f\beta'=\beta}} F_{\alpha', \beta'}^{(k)} = f^{2-k} F_{\alpha, \beta}^{(k)}$ se déduit facilement en utilisant les deux

égalités suivantes :

2. La série $H_2(s, \tau, 0, 0)$ converge pour $\text{Re}(s) > 2$, mais pas pour $s = 2$.

(1) Quels que soient $w \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et $0 \leq i, j \leq f - 1$, on a

$$e\left(\frac{i(w\bar{\tau} - \tau\bar{w}) + j(w - \bar{w})}{\tau - \bar{\tau}}\right) = 1.$$

(2) Quel que soient $w = fw' + m + n\tau$ avec $w' \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et m ou $n \neq 0$, on a

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq f-1 \\ 0 \leq j \leq f-1}} \frac{1}{w^k} e\left(\frac{w\left(\frac{a+i}{f}\bar{\tau} + \frac{b+j}{f}\right) - \left(\frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f}\right)\bar{w}}{\tau - \bar{\tau}}\right) = 0.$$

□

On dispose d'une action du groupe $GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein.

Définition 2.7. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$, $k \geq 1$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on définit

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)} \circ \gamma = E_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta}^{(k)} \text{ et } F_{\alpha, \beta}^{(k)} \circ \gamma = F_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta}^{(k)}.$$

Nous allons vérifier que ces séries d'Eisenstein appartiennent à $\mathcal{M}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$ (c.f. prop. 2.8) et que l'action de $GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{M}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$ via la bijection $\alpha : H \rightarrow GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$, définie plus haut, induit l'action précédente sur les séries d'Eisenstein.

Proposition 2.8. (1) $E_{0,0}^{(2)} = F_{0,0}^{(2)} = \frac{-1}{24}E_2^*$, où $E_2^* = \frac{6}{i\pi(\tau-\bar{\tau})} + 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n)q^n$ est la série d'Eisenstein non holomorphe de poids 2 habituelle.

(2) Si $N\alpha = N\beta = 0$, alors

- (i) $\tilde{E}_{\alpha, \beta}^{(2)} = E_{\alpha, \beta}^{(2)} - E_{0,0}^{(2)} \in \mathcal{M}_2(\Gamma(N), \mathbb{Q}(\zeta_N))$ et $E_{\alpha, \beta}^{(k)} \in \mathcal{M}_k(\Gamma(N), \mathbb{Q}(\zeta_N))$ si $k \geq 1$ et $k \neq 2$.
- (ii) $F_{\alpha, \beta}^{(k)} \in \mathcal{M}_k(\Gamma(N), \mathbb{Q}(\zeta_N))$ si $k \geq 1, k \neq 2$ ou si $k = 2, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Les résultats au-dessus sont bien connus. Pour faciliter la lecture, on donne l'idée de la preuve; les détails se trouvent plus loin.

Démonstration. (1) Par définition, on a

$$E_{0,0}^{(2)} = F_{0,0}^{(2)} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k} \left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{2i\pi}\right)^{s-k} \sum'_{\omega \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau} \frac{\bar{\omega}^k}{|\omega|^{2s}}.$$

On applique la formule de Poisson pour la somme (voir la démonstration de la proposition (2.10)) et on prend la limite.

(2) On considère le q -développement des séries d'Eisenstein et on va montrer dans la proposition 2.10 que les coefficients sont dans l'extension cyclotomique. Il ne reste qu'à vérifier que les séries sont fixées par le sous-groupe de congruence $\Gamma(N)$. Mais ce fait est vérifié par des formules plus générales dans la proposition 2.12.

□

2.1.3. Les q -développements de séries d'Eisenstein. Soit A un sous-anneau de \mathbb{C} . On note $\mathbf{Dir}(\mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des séries de Dirichlet formelles à coefficients dans \mathbb{C} , ainsi que $\mathbf{Dir}(A)$ le sous A -module de $\mathbf{Dir}(\mathbb{C})$ des séries de Dirichlet formelles dont les coefficients sont dans A . On définit une action du groupe de Galois $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\mathbf{Dir}(\overline{\mathbb{Q}})$ en agissant sur les coefficients.

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On définit les séries de Dirichlet formelles $\zeta(\alpha, s)$ et $\zeta^*(\alpha, s)$, appartenant à $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$, par les formules :

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}_+^* \\ n \equiv \alpha \pmod{\mathbb{Z}}}} n^{-s} \text{ et } \zeta^*(\alpha, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\pi\alpha n} n^{-s}.$$

La fonction $\zeta(\alpha, s)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors de pôles simples en $s = 1$ de résidu 1.

Considérons l'application surjective $\chi_{\text{cycl}} : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$. Soit $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ et soit σ_d un relèvement de d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$. Alors on définit l'action de $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries de Dirichlet formelles $\zeta(\alpha, s)$ et $\zeta^*(\alpha, s)$ via σ_d agissant sur les coefficients³.

Lemme 2.9. *On a $\zeta(\alpha, s) * d = \zeta(\alpha, s)$ et $\zeta^*(\alpha, s) * d = \zeta^*(d\alpha, s)$.*

La proposition suivante décrit les q -développements de séries d'Eisenstein et elle montre que les coefficients du q -développement des séries d'Eisenstein sont dans \mathbb{Q}^{cycl} . En particulier, celle-ci nous permet de conclure la démonstration de la proposition 2.8.

Proposition 2.10. (1) *Si $k \geq 1, k \neq 2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors le q -développement $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} a_n q^n$ de $E_{\alpha, \beta}^{(k)}$ est donné par*

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} = \zeta(\alpha, s) \zeta^*(\beta, s - k + 1) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s) \zeta^*(-\beta, s - k + 1).$$

De plus,

si $k \neq 1$ et si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$), on a $a_0 = 0$ (resp. $a_0 = \zeta^(\beta, 1 - k)$); si $k = 1$ et si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$), on a $a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ (resp. $a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0))$).*

(2) *Si $k \geq 1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (si $k = 2, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$), alors le q -développement $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} a_n q^n$ de $F_{\alpha, \beta}^{(k)}$ est donné par*

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} = \zeta(\alpha, s - k + 1) \zeta^*(\beta, s) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s - k + 1) \zeta^*(-\beta, s).$$

3. L'action de σ_d sur $e^{2i\pi\alpha}$ est donnée par $e^{2i\pi\alpha} * \sigma_d = e^{2i\pi d\alpha}$, où $d\alpha$ est bien défini car on a l'isomorphisme $(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})/\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

De plus, si $k \neq 1$, on a $a_0 = \zeta(\alpha, 1 - k)$;
 si $k = 1$ et si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$), on a $a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ (resp. $a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0))$).

Démonstration. Choisissons une présentation $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathbb{Q}^2$ de $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, alors la fonction $F_{\alpha, \beta}^{(k)}$ (resp. $E_{\alpha, \beta}^{(k)}$) est définie par évaluer la fonction

$$H_k(s, \tau, 0, \tilde{\alpha}\tau + \tilde{\beta}) \text{ (resp. } H_k(s, \tau, \tilde{\alpha}\tau + \tilde{\beta}, 0))$$

en $k = s$. La fonction $H_k(s, \tau, z, u)$ converge si $\text{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$, possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors de pôle simple en $s = 1$ (si $k = 0$ et $u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$) et $s = 0$ (si $k = 0$ et $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$).

Pour obtenir les formules dans la proposition, on applique la formule de Poisson (pour $k = 1, 2$, il faut utiliser un prolongement analytique). Montrons le (2) en utilisant la formule de Poisson.

Pour simplifier la formule, on écrit $z = \tilde{\alpha}\tau + \tilde{\beta}$ et on pose $\tau = x + iy \in \mathcal{H}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

De la définition, on a :

$$\begin{aligned} H_k(s, \tau, 0, z) &= \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^k} \left(\frac{-2iy}{2\pi i}\right)^{s-k} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{e\left(\frac{w\bar{z}-z\bar{w}}{\tau-\bar{\tau}}\right)}{(m\tau+n)^k |m\tau+n|^{2(s-k)}} \\ &= \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{(2iy)^{s-k}}{(m\tau+n)^s (m\bar{\tau}+n)^{s-k}} e(m\tilde{\beta} - n\tilde{\alpha}) \\ &= \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s} \left(\sum_{m \geq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(2iy)^{s-k}}{(m\tau+n)^s (m\bar{\tau}+n)^{s-k}} e(m\tilde{\beta} - n\tilde{\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{2s-k} \sum_{m > 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(2iy)^{s-k}}{(m\tau-n)^s (m\bar{\tau}-n)^{s-k}} e(-m\tilde{\beta} - n\tilde{\alpha}) \right). \end{aligned}$$

Si $\text{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$, la fonction $f(t) = \frac{e(m\tilde{\beta}-t\tilde{\alpha})}{(m\tau+t)^s (m\bar{\tau}+t)^{s-k}}$ vérifie la condition de la formule de Poisson. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi nt} e(m\tilde{\beta} - t\tilde{\alpha})}{(m\tau+t)^s (m\bar{\tau}+t)^{s-k}} dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(m((n+\tilde{\alpha})x + \tilde{\beta})) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi(n+\tilde{\alpha})t}}{(imy+t)^s (-imy+t)^{s-k}} dt \end{aligned}$$

Alors, si $s = k$, on a $k \geq 3$. Grâce à la méthode des résidus, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi(n+\tilde{\alpha})t}}{(imy+t)^k} dt = (-2i\pi)^k \Gamma(k)^{-1} (n+\tilde{\alpha})^{k-1} e^{-2\pi y m(n+\tilde{\alpha})}.$$

Ceci nous donne

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Q}_+, n \equiv \alpha [\mathbb{Z}]} (-2i\pi)^k \Gamma(k)^{-1} n^{k-1} q^{mn} e(m\tilde{\beta}).$$

On peut aussi appliquer la formule de Poisson à la fonction

$$g(t) = \frac{e(-m\tilde{\beta} - t\tilde{\alpha})}{(m\tau - t)^s (m\bar{\tau} - t)^{s-k}} \text{ pour } s = k \geq 3$$

et on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = \sum_{n \in \mathbb{Q}_+, n \equiv -\alpha [\mathbb{Z}]} (-2i\pi)^k \Gamma(k)^{-1} n^{k-1} q^{mn} e(-m\tilde{\beta}).$$

Donc on a

$$F_{\alpha, \beta}^{(k)} = \sum_{m \geq 0} \sum_{n \in \mathbb{Q}_+, n \equiv \alpha [\mathbb{Z}]} n^{k-1} q^{mn} e(m\tilde{\beta}) + (-1)^k \sum_{m > 0} \sum_{n \in \mathbb{Q}_+, n \equiv -\alpha [\mathbb{Z}]} n^{k-1} q^{mn} e(-m\tilde{\beta})$$

$$= \begin{cases} \zeta(\alpha, 1 - k) + \sum_{m > 0} \sum_{n \in \mathbb{Q}_+, n \equiv \alpha [\mathbb{Z}]} n^{k-1} q^{mn} e(m\tilde{\beta}) + \\ + (-1)^k \sum_{m > 0} \sum_{n \in \mathbb{Q}_+, n \equiv -\alpha [\mathbb{Z}]} n^{k-1} q^{mn} e(-m\tilde{\beta}); \text{ si } \alpha \neq 0, \\ \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0)) + \sum_{m > 0} \sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*, n \equiv \alpha [\mathbb{Z}]} n^{k-1} q^{mn} e(m\tilde{\beta}) + \\ + (-1)^k \sum_{m > 0} \sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*, n \equiv -\alpha [\mathbb{Z}]} n^{k-1} q^{mn} e(-m\tilde{\beta}); \text{ si } \alpha = 0 \text{ et } k = 1; \end{cases}$$

Donc,

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}_+^* \\ n \equiv \alpha [\mathbb{Z}]}} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{2i\pi m\tilde{\beta}} \frac{n^{k-1}}{(mn)^s} + (-1)^k \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}_+^* \\ n \equiv -\alpha [\mathbb{Z}]}} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-2i\pi m\tilde{\beta}} \frac{n^{k-1}}{(mn)^s}$$

$$= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}_+^* \\ n \equiv \alpha [\mathbb{Z}]}} \frac{1}{m^s} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi m\tilde{\beta}}}{n^{s-k+1}} + (-1)^k \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}_+^* \\ n \equiv -\alpha [\mathbb{Z}]}} \frac{1}{m^s} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi m\tilde{\beta}}}{n^{s-k+1}}$$

$$= \zeta(\alpha, s - k + 1) \zeta^*(\beta, s) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s - k + 1) \zeta^*(-\beta, s).$$

□

Remarque 2.11. (i) D'après cette proposition, on voit que $E_{\alpha, \beta}^{(1)}$ et $F_{\alpha, \beta}^{(1)}$ ont le même q -développement pour tous les $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (On peut aussi déduire ce résultat par l'équation fonctionnelle de $H_k(s, \tau, z, u)$).

(ii) Soit $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ et soit σ_d un relèvement de d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$. L'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ induit par l'action de H sur les séries d'Eisenstein est donnée par σ_d agissant sur les coefficients du q -développement de formes modulaires. Il équivaut à trouver l'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries de Dirichlet formelles associées. Soit $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} a_n q^n$ le q -développement de $E_{\alpha, \beta}^{(k)}$ (resp. $F_{\alpha, \beta}^{(k)}$). Alors le q -développement $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} b_n q^n$ de $E_{\alpha, \beta}^{(k)} * d$ est donné par

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} * d = \zeta(\alpha, s) \zeta^*(d\beta, s - k + 1) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s) \zeta^*(-d\beta, s - k + 1),$$

$$b_0 = \begin{cases} 0 \text{ (resp. } \zeta^*(d\beta, 1 - k)); & \text{si } k \neq 1, \alpha \neq 0 \text{ (resp. si } \alpha = 0), \\ \zeta(\alpha, 0) \text{ (resp. } \frac{1}{2}(\zeta^*(d\beta, 0) - \zeta^*(-d\beta, 0))); & \text{si } k = 1, \alpha \neq 0 \\ \text{(resp. } \alpha = 0); & \end{cases}$$

et celui de $F_{\alpha, \beta}^{(k)} * d$ est donné par

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{b_n}{n^s} = \zeta(\alpha, s - k + 1) \zeta^*(d\beta, s) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s - k + 1) \zeta^*(-d\beta, s);$$

$$b_0 = \begin{cases} \zeta(\alpha, 1 - k); & \text{si } k \neq 1, \\ \zeta(\alpha, 0) \left(\text{resp. } \frac{1}{2}(\zeta^*(d\beta, 0) - \zeta^*(-d\beta, 0)) \right); & \text{si } k = 1, \alpha \neq 0. \\ \text{(resp. } \alpha = 0) & \end{cases}$$

Donc on a $E_{\alpha, \beta}^{(k)} * d = E_{\alpha, d\beta}^{(k)}$ et $F_{\alpha, \beta}^{(k)} * d = F_{\alpha, d\beta}^{(k)}$.

Proposition 2.12. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), k \geq 1$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, alors

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)} * \gamma = E_{a\alpha + c\beta, b\alpha + d\beta}^{(k)} \text{ et } F_{\alpha, \beta}^{(k)} * \gamma = F_{a\alpha + c\beta, b\alpha + d\beta}^{(k)}.$$

Démonstration. Comme $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) = \cup_{d \in \hat{\mathbb{Z}}^*} \text{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, il suffit de vérifier pour $\gamma \in \text{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$. Le cas de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ suit du lemme 2.9 et du q -développement de la proposition 2.10. Le cas de $\text{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ suit du calcul pour $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ et se déduit par continuité.

Le calcul pour $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ est facile et on donne seulement le calcul pour la relation $E_{\alpha, \beta}^{(k)} * \gamma = E_{a\alpha + c\beta, b\alpha + d\beta}^{(k)}$. Choisissons une présentation $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathbb{Q}^2$

de $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, et si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors on a :

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^{(k)} * \gamma &= E_{\alpha,\beta}^{(k)}|_k \gamma(\tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^k} E_k(\gamma\tau, \tilde{\alpha}\gamma\tau + \tilde{\beta}) \\ &= \frac{1}{(c\tau + d)^k} \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum_{\omega \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\gamma\tau} \frac{1}{(\omega + \tilde{\alpha}\gamma\tau + \tilde{\beta})^k} \\ &= \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum_{\omega \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau} \frac{1}{(\omega + \tilde{\alpha}(a\tau + b) + \tilde{\beta}(c\tau + d))^k} \\ &= E_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta}^{(k)}(\tau) \end{aligned}$$

□

2.1.4. Les distributions $z_{\mathbf{Eis}}(k)$, $z'_{\mathbf{Eis}}(k)$ et $z_{\mathbf{Eis}}(k, j)$. Soient $X = \mathbb{A}_f^2, G = \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ et $V = \mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$. Alors X est un espace topologique localement profini et G est un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur X par la multiplication de matrices.

L'action de G sur V à droite, noté par $*$, se déduit de l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ sur V et l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ se factorise à travers $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Comme tout $\gamma \in G$ peut s'écrire sous la forme $\gamma = g_1 \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} g_2$ avec $g_1, g_2 \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ et e un entier ≥ 1 , il suffit de donner les formules pour $\gamma \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), \gamma = \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ respectivement. Comme $\begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ apparaissent dans $\text{GL}_2(\mathbb{Q})_+$, on prend ses actions par la formule (1.2). Si $\gamma \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, en utilisant la décomposition $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) = \cup_{d \in \hat{\mathbb{Z}}^*} \text{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, on décompose l'action de γ en deux parties. Comme on est en poids k , l'action de $\text{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ est l'action $|_k$. L'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est via un relèvement σ_d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agissant sur les coefficients du q -développement. En particulier, au cas des séries d'Eisenstein, la proposition 2.12 nous donne les formules explicites. Les formules (1.1) s'appliquent dans ce cas.

Théorème 2.13. *Si $k \geq 1$, il existe une distribution algébrique $z_{\mathbf{Eis}}(k)$ (resp. $z'_{\mathbf{Eis}}(k)$) $\in \mathcal{D}_{\text{alg}}(X, \mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}))$ vérifiant : quels que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, on a*

$$\begin{aligned} \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis}}(k) &= r^{-k} E_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)} \\ (\text{resp. } \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis}}(k) &= r^{-k} \tilde{E}_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)} \text{ si } k = 2), \\ \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{\mathbf{Eis}}(k) &= r^{k-2} F_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)}. \end{aligned}$$

De plus, si $\gamma \in G$, alors

$$z_{\mathbf{Eis}}(k) * \gamma = z_{\mathbf{Eis}}(k) \text{ et } z'_{\mathbf{Eis}}(k) * \gamma = |\det \gamma|^{1-k} z'_{\mathbf{Eis}}(k).$$

Démonstration. L'existence de la distribution résulte des relations de distribution de $E_{\alpha,\beta}^{(k)}$ et $F_{\alpha,\beta}^{(k)}$ dans le lemme (2.6). Comme tout $\gamma \in G$ peut s'écrire sous la forme $\gamma = g_1 \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} g_2$ avec $g_1, g_2 \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ et e un entier ≥ 1 . Alors, il ne reste qu'à calculer les actions de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ respectivement. On donnera le calcul pour la distribution algébrique $z_{\mathbf{Eis}}(k)$ et la relation pour $z'_{\mathbf{Eis}}(k)$ est du calcul de la même manière.

– Si $\gamma \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, on a $|\det \gamma| = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis}}(k) * \gamma &= \left(\int_{((a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})) * \gamma^{-1}} z_{\mathbf{Eis}}(k) \right) * \gamma \\ &= r^{-k} E_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)}. \end{aligned}$$

La dernière équation dans la formule au-dessus se déduit de la proposition 2.12.

– Si $\gamma = \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis}}(k) * \gamma &= \left(\int_{\left(\frac{a}{r_0} + \frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}}\right) \times \left(\frac{b}{r_0} + \frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}}\right)} z_{\mathbf{Eis}}(k) \right) * \gamma \\ &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-k} (E_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)}) * \gamma \\ &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-k} \frac{1}{(0\tau + r_0)^k} E_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)}(\gamma\tau) \\ &= r^{-k} E_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)}; \end{aligned}$$

– Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis}}(k) * \gamma &= \left(\int_{((a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})) * \gamma^{-1}} z_{\mathbf{Eis}}(k) \right) * \gamma \\ &= \left(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times \left(\frac{b}{e} + \frac{r}{e}\hat{\mathbb{Z}}\right)} z_{\mathbf{Eis}}(k) \right) * \gamma \\ &= \sum_{i=0}^{e-1} \left(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times \left(\frac{b}{e} + \frac{ir}{e} + r\hat{\mathbb{Z}}\right)} z_{\mathbf{Eis}}(k) \right) * \gamma \\ &= \frac{1}{(0\tau + e)^k} r^{-k} \sum_{i=0}^{e-1} E_{r^{-1}a, \frac{r^{-1}b+i}{e}}^{(k)} \left(\frac{\tau}{e}\right) \\ &= r^{-k} E_{r^{-1}a, r^{-1}b}^{(k)}, \end{aligned}$$

où la dernière équation se déduit de la relation (2.3) du lemme 2.6. □

On peut identifier $\mathbb{A}_f^2 \times \mathbb{A}_f^2$ avec $\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)$ via le morphisme $((a, b), (c, d)) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En utilisant le fait que le produit de deux formes modulaires de poids i et j est une forme modulaire de poids $i + j$, on obtient une application naturelle :

$$\mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbb{A}_f^2, \mathcal{M}_i(\overline{\mathbb{Q}})) \otimes \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbb{A}_f^2, \mathcal{M}_j(\overline{\mathbb{Q}})) \rightarrow \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f), \mathcal{M}_{i+j}(\overline{\mathbb{Q}})).$$

Si $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k - 1$, on définit

$$z_{\text{Eis}}(k, j) = \frac{1}{(j - 1)!} z'_{\text{Eis}}(k - j) \otimes z_{\text{Eis}}(j) \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f), \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})).$$

2.1.5. La distribution $z_{\text{Eis},c,d}(k, j)$ et une variante des séries d'Eisenstein. Soit $\langle \cdot \rangle : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$ l'inclusion naturelle en envoyant x sur $(1, \dots, x, 1, \dots)$, où x est à la place p . Considérons l'inclusion de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ dans $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ en envoyant d sur $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. D'après la proposition 2.12, cela définit une action de $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries d'Eisenstein par les formules : si $k \geq 1$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on a

$$(2.4) \quad d \cdot E_{\alpha,\beta}^{(k)} = E_{d\alpha,d\beta}^{(k)} = E_{\alpha,\beta}^{(k)} * \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ et } d \cdot F_{\alpha,\beta}^{(k)} = F_{d\alpha,d\beta}^{(k)} = F_{\alpha,\beta}^{(k)} * \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

où l'action de $*$ est celle de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein.

Soit A un sous-anneau de \mathbb{C}_p et Γ un sous-groupe de congruence de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ le A -module des formes modulaires p -adiques pour Γ dont le q -développement est à coefficients dans A . On définit

$$\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(A) = \bigcup_{\Gamma \text{ congruence}} \mathcal{M}_k(\Gamma, A) \text{ et } \mathcal{M}^{\text{cong}}(A) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k^{\text{cong}}(A).$$

Considérons l'injection de $\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\overline{\mathbb{Q}})$ dans $\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On peut définir une variante des séries d'Eisenstein à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ci-dessous : si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on pose

$$(2.5) \quad E_{c,\alpha,\beta}^{(k)} = \begin{cases} c^2 E_{\alpha,\beta}^{(k)} - c^k E_{\langle c \rangle \alpha, \langle c \rangle \beta}^{(k)}; & \text{si } k \geq 1 \text{ et } k \neq 2, \\ c^2 \tilde{E}_{\alpha,\beta}^{(2)} - c^2 \tilde{E}_{\langle c \rangle \alpha, \langle c \rangle \beta}^{(2)}; & \text{si } k = 2; \end{cases}$$

$$F_{c,\alpha,\beta}^{(k)} = c^2 F_{\alpha,\beta}^{(k)} - c^{2-k} F_{\langle c \rangle \alpha, \langle c \rangle \beta}^{(k)}; \text{ si } k \geq 1 \text{ et } k \neq 2,$$

ou si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $k = 2$.

Elles sont des combinaisons linéaires des séries d'Eisenstein. On définit une dérivation ∂_z sur $E_{c,\alpha,\beta}^{(k)}$ par la formule :

$$\partial_z E_{c,\alpha,\beta}^{(k)} = E_{c,\alpha,\beta}^{(k+1)}, \text{ pour } k \geq 0.$$

Si $c \in \mathbb{N}$, alors ∂_z coïncide avec l'opérateur ∂_z dans le cas complexe (c.f.§2.1.2) :

$$\partial_z E_{c,\alpha,\beta}^{(k)} = \partial_z (c^2 E_k(\tau, z) - c^k E_k(\tau, cz))|_{z=\alpha\tau+\beta}.$$

D’après le paragraphe §2.1.4. la proposition suivante est immédiate :

Proposition 2.14. (1) Soit $c \in \mathbb{Z}_p^*$. Si $k \geq 1$, il existe une distribution algébrique $z_{\mathbf{Eis},c}(k)$ (resp. $z'_{\mathbf{Eis},c} \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbb{A}_f^2, \mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}))$) vérifiant : quel que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, on a

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis},c}(k) = r^{-k} E_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{(k)}$$

(resp. $\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{\mathbf{Eis},c}(k) = r^{k-2} F_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{(k)}$.)

De plus, si $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, alors on a

$$z_{\mathbf{Eis},c}(k) * \gamma = z_{\mathbf{Eis},c}(k) \text{ et } z'_{\mathbf{Eis},c} * \gamma = |\det \gamma|^{1-k} z'_{\mathbf{Eis},c}(k).$$

(2) Soient $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$. Si $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k - 1$, la distribution

$$z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j) = \frac{1}{(j-1)!} z'_{\mathbf{Eis},c}(k-j) \otimes z_{\mathbf{Eis},d}(j)$$

appartient à $\mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f), \mathcal{M}_k(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}))$. De plus, elle vérifie les propriétés suivantes :

- Si M, N sont deux entiers ≥ 1 , on pose $O_{M,N} = \{ \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}, a_0 - 1, b_0 \in M\hat{\mathbb{Z}}, c_0, d_0 - 1 \in N\hat{\mathbb{Z}} \}$ et $\phi_{M,N}$ la fonction caractéristique de $O_{M,N}$. Alors on a :

$$\int \phi_{M,N} z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j) = \frac{1}{(j-1)!} M^{k-j-2} N^{-j} F_{c, \frac{1}{M}, 0}^{(k-j)} E_{d, 0, \frac{1}{N}}^{(j)}.$$

- Si $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, $z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j)|_k \gamma = |\det \gamma|^{j-1} z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j)$.

2.2. Unités de Siegel et distribution z_{Siegel} .

Définition 2.15. Soit Γ un sous-groupe de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ d’indice fini.

- (1) Une fonction modulaire de poids 0 pour Γ est une fonction holomorphe $f(\tau)$ sur \mathcal{H} et méromorphe sur $(\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))/\Gamma$, telle que, $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = f(z)$ pour $\gamma \in \Gamma$;
- (2) Une unité modulaire pour Γ est une unité de l’anneau des fonctions modulaires de poids 0 pour Γ .

Soit K un sous corps de \mathbb{C} . On note $\mathcal{U}(\Gamma, K)$ le groupe des unités modulaires pour Γ dont le q -développement est à coefficients dans K . On note $\mathcal{U}(K)$ la réunion des $\mathcal{U}(\Gamma, K)$, où Γ décrit tous les sous-groupes d’indice fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

La fonction thêta $\theta(\tau, z)$ est définie par le produit infini

$$\theta(\tau, z) = q^{1/12} (q_z^{1/2} - q_z^{-1/2}) \prod_{n \geq 1} ((1 - q^n q_z)(1 - q^n q_z^{-1})).$$

Elle n’est pas périodique en z de période $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Rappelons ci-après les propriétés fondamentales de la fonction θ (c.f. [13, chapitre 19]) :

- θ est homogène de degré 0 (i.e. $\theta(\begin{pmatrix} \lambda\tau \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda z) = \theta(\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}, z) = \theta(\tau, z)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$);
- Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors $\theta(\tau, z)$ satisfait une équation fonctionnelle :

$$\theta(\gamma \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}, z) = \zeta_{12,\gamma} \theta(\tau, z) e\left(\frac{\pi i c_0 z^2}{(c_0 \tau + d_0)}\right)$$

où $\zeta_{12,\gamma}$ est une racine d'unité d'ordre 12 qui dépend de γ et $\gamma \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ est le produit de matrices usuel (i.e. $\gamma \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \tau + b_0 \\ c_0 \tau + d_0 \end{pmatrix}$).

Notons Λ_τ le réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Pour un entier $c > 2$, $(c, 6) = 1$, on définit une autre fonction $g_{0,c}(z) = \theta(\tau, z)^{c^2} \theta(\tau, cz)^{-1}$ à partir de la fonction thêta. Soit a un entier ≥ 1 ; on note $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, a)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau - (a^{-1}\Lambda_\tau)/\Lambda_\tau$ et on note $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, a)^*$ le groupe des unités de $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, a)$. Soit a, b deux entiers tels que $(a, b) = 1$; on définit une application de norme du groupe $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, ab)^*$ dans le groupe $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, b)^*$ comme suit : soit $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, ab)^*$, on a

$$N_a(f(z)) := \prod_{k=0}^{a-1} \prod_{j=0}^{a-1} f\left(\frac{z}{a} + \frac{k}{a} + \frac{j\tau}{a}\right).$$

Lemme 2.16 (G. Robert[21]; K. Kato[11]). (1) *La fonction $g_{0,c}(z)$, qui est une fonction elliptique sur \mathbb{C}/Λ_τ , est une unité de l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, c)$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau - (c^{-1}\Lambda_\tau)/\Lambda_\tau$.*

(2) *Quel que soit a un entier ≥ 1 tel que $(a, c) = 1$, on a $N_a(g_{0,c}) = g_{0,c}$.*

Démonstration. (1) La première assertion de (1) du lemme suit d'un calcul direct.

Observons que le diviseur associé à $g_{0,c}$ sur \mathbb{C}/Λ_τ est $c^2(\bar{0}) - c^{-1}\Lambda_\tau/\Lambda_\tau$ (cela suit de l'expression explicite de $g_{0,c}$). Il s'ensuit que $g_{0,c}$ est une unité de l'anneau des fonctions holomorphes sur

$$\mathbb{C}/\Lambda_\tau - (c^{-1}\mathbb{Z} + c^{-1}\mathbb{Z}\tau)/\Lambda_\tau.$$

(2) De la définition de l'application N_a , on a $N_a(N_b(g_{0,c})) = N_b(N_a(g_{0,c}))$ pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $(ab, c) = 1$. Comme $N_a(g_{0,c})$ et $g_{0,c}(z)$ ont le même diviseur, il existe une constante $u_a \in \mathbb{C}^*$ telle que $N_a(g_{0,c}) = u_a g_{0,c}$. Par la relation $N_a N_b = N_b N_a$, on a

$$u_b^{a^2-1} = u_a^{b^2-1}.$$

Si on pose $g = u_2^{-3} u_3 g_{0,c}$, alors on a

$$N_a(g) = u_2^{-3a^2} u_3^{a^2} u_a g_{0,c} = u_2^{-3(a^2-1)} u_3^{a^2-1} u_a g = u_a^{-3(2^2-1)} u_a^{3^2-1} u_a g = g.$$

L'assertion se déduit des relations $N_2(g_{0,c}) = g_{0,c}$ et $N_3(g_{0,c}) = g_{0,c}$. En effet, quel que soit $a \geq 1$ tel que $(a, c) = 1$, de la formule

$\prod_{i=0}^{a-1} (1 - Xc^i) = 1 - X^a$, on a

$$N_a(1 - q^n q_z^{\pm 1}) = \prod_{j=0}^{a-1} (1 - q^{an \pm j} q_z^{\pm 1}); N_a(1 - q^n q_z^{\pm c}) = \prod_{j=0}^{a-1} (1 - q^{an \pm cj} q_{cz}^{\pm 1}).$$

Alors, on a la relation

$$N_a\left(\prod_{n \geq 0} (1 - q^n q_z) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n q_z^{-1})\right) = \prod_{n \geq 0} (1 - q^n q_z) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n q_z^{-1});$$

cela simplifie les calculs et on vérifie facilement pour $a = 2, 3$,

$$N_a(g_{0,c}) = g_{0,c}.$$

□

Soit d un autre entier vérifiant $(d, 6) = 1$. On définit $c^* g_{0,d}(z) = g_{0,d}(cz)$.

Lemme 2.17. *Soient c, d deux entiers tels que $(cd, 6) = 1$. Alors on a*

$$(2.6) \quad (g_{0,d})^{c^2} (c^* g_{0,d})^{-1} = (g_{0,c})^{d^2} (d^* g_{0,c})^{-1}.$$

Démonstration. Considérons les fonctions méromorphes $(g_{0,d})^{c^2} (c^* g_{0,d})^{-1}$ et $(g_{0,c})^{d^2} (d^* g_{0,c})^{-1}$, elles ont le même diviseur sur \mathbb{C}/Λ_τ :

$$c^2 d^2 (\bar{0}) - c^2 (d^{-1} \Lambda_\tau / \Lambda_\tau) - d^2 (c^{-1} \Lambda_\tau / \Lambda_\tau) + ((cd)^{-1} \Lambda_\tau / \Lambda_\tau).$$

Donc $\frac{(g_{0,d})^{c^2} (c^* g_{0,d})^{-1}}{(g_{0,c})^{d^2} (d^* g_{0,c})^{-1}}$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{C}/Λ_τ ; en particulier, elle est une fonction constante non nulle u . Comme $g_{0,c}$ est stable sous l'application de norme N_a pour $(a, c) = 1$, il en résulte que pour $a = 2$ (resp. 3), $u^4 = u$ (resp. $u^9 = u$). Donc $u = 1$. □

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$; on définit une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ à droite par le produit de matrices usuel :

$$\text{si } \gamma = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) * \gamma = (a_0 \alpha + c_0 \beta, b_0 \alpha + d_0 \beta).$$

Pour $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, choisissons un relèvement (a, b) de (α, β) dans \mathbb{Q}^2 , et posons

$$g_{c,\alpha,\beta}(\tau) = g_{0,c}(a\tau + b).$$

Proposition 2.18. *Soient $\alpha, \beta \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.*

(1) *Si $(c, 6) = 1$ et $(c\alpha, c\beta) \neq (0, 0)$, alors $g_{c,\alpha,\beta}$ est une unité modulaire dans $\mathcal{U}(\Gamma(N), \mathbb{Q}(\zeta_N))$.*

(2) *Si $(c, 6) = 1$, l'élément $g_{\alpha,\beta} = g_{c,\alpha,\beta}^{1/(c^2-1)}$ de $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ ne dépend pas du choix de $c \equiv 1 \pmod{N}$. De plus, on a $g_{c,\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta}^{c^2} g_{c\alpha,c\beta}^{-1}$ pour tout c avec $(c, 6) = 1$.*

Démonstration. Soit (a, b) un relèvement de (α, β) dans \mathbb{Q}^2 .

(1) Comme $(c\alpha, c\beta) \neq (0, 0)$, on obtient $a\tau + b \notin c^{-1}\mathbb{Z} + c^{-1}\mathbb{Z}\tau$. Comme $g_{0,c}$ est une unité de l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau - (c^{-1}\Lambda_\tau)/\Lambda_\tau$, la fonction $g_{c,\alpha,\beta}(\tau)$ n'a ni zéros, ni pôles sur \mathcal{H} .

Considérons le q -développement de la fonction $g_{c,\alpha,\beta}$, on trouve que les coefficients sont dans $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. Donc il suffit de vérifier que c 'est une fonction modulaire pour le sous groupe de congruence $\Gamma(N)$.

Considérons la fonction $\theta(\tau, a\tau + b)$ sous l'action de $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. L'action de γ sur $(\begin{smallmatrix} \tau \\ 1 \end{smallmatrix})$ nous donne une nouvelle base du réseau $(\tau, 1)$, et l'action de γ sur $a\tau + b$ est donnée par transformation de Möbius (i.e. le point $a\tau + b$ est envoyé en $a\gamma\tau + b$).

Comme $(c, 6) = 1$, on a $12|(c^2 - 1)$. Si $\gamma \in \Gamma(N)$, on a $(\alpha, \beta) * \gamma = (\alpha, \beta)$. Avec les propriétés fondamentales de la fonction θ ci-dessus, on a⁴ alors

$$\begin{aligned} &g_{c,\alpha,\beta}(\gamma\tau) \\ &= \frac{\theta(\gamma\tau, a\gamma\tau + b)^{c^2}}{\theta(\gamma\tau, c(a\gamma\tau + b))} \\ &= \frac{\theta(\gamma(\begin{smallmatrix} \tau \\ 1 \end{smallmatrix}), (aa_0 + bc_0)\tau + b_0a + d_0b)^{c^2}}{\theta(\gamma(\begin{smallmatrix} \tau \\ 1 \end{smallmatrix}), c((aa_0 + bc_0)\tau + ab_0 + bd_0))} \\ &= \frac{\zeta_{12,\gamma}^{c^2} \theta(\tau, (aa_0 + bc_0)\tau + b_0a + d_0b)^{c^2} e^{\left(\frac{c^2 \pi i c_0 ((aa_0 + bc_0)\tau + b_0a + d_0b)^2}{(c_0\tau + d_0)}\right)}}{\zeta_{12,\gamma} \theta(\tau, c((aa_0 + bc_0)\tau + b_0a + d_0b)) e^{\left(\frac{\pi i c_0 (c((aa_0 + bc_0)\tau + b_0a + d_0b))^2}{(c_0\tau + d_0)}\right)}} \\ &= \zeta_{12,\gamma}^{c^2-1} \frac{\theta(\tau, (aa_0 + bc_0)\tau + b_0a + d_0b)^{c^2}}{\theta(\tau, c((aa_0 + bc_0)\tau + b_0a + d_0b))} = g_{c,(\alpha,\beta)*\gamma}(\tau) = g_{c,(\alpha,\beta)}(\tau). \end{aligned}$$

(2) Si on évalue $c^*g_{0,d}(z)$ en $a\tau + b$, on obtient $c^*g_{0,d}(a\tau + b) = g_{0,d}(ca\tau + cb)$. Soient $c \equiv d \equiv 1[N]$. On a $c^*g_{0,d}(a\tau + b) = g_{d,\alpha,\beta}$ et $d^*g_{0,c}(a\tau + b) = g_{c,\alpha,\beta}$. On en déduit que $(g_{d,\alpha,\beta})^{c^2} (g_{d,\alpha,\beta})^{-1} = (g_{c,\alpha,\beta})^{d^2} (g_{c,\alpha,\beta})^{-1}$. Autrement dit, $g_{\alpha,\beta} = g_{c,\alpha,\beta}^{1/(c^2-1)}$ ne dépend pas du choix de $c \equiv 1 \pmod N$. Soient $(c, 6N) = 1$ et $d \equiv 1 \pmod N$. En évaluant en $a\tau + b$, la relation (2.6) se traduit en $(g_{d,\alpha,\beta})^{c^2} g_{d,c\alpha,c\beta}^{-1} = g_{c,\alpha,\beta}^{d^2} g_{c,\alpha,\beta}^{-1}$, et donc $g_{c,\alpha,\beta} = (g_{\alpha,\beta})^{c^2} g_{c,\alpha,c\beta}^{-1}$. □

Remarque 2.19. Il y a une preuve géométrique de cette proposition, en utilisant l'espace de module des courbes elliptiques dans [11].

L'action de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{M}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$ induit celle de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$.

Lemme 2.20. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ et soit $\gamma \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Alors on a

$$g_{\alpha,\beta} * \gamma = g_{(\alpha,\beta)*\gamma}.$$

4. La deuxième égalité est due au fait que θ est homogène de degré 0.

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, on peut choisir un entier c tel que $(c, 6) = 1$, et $(c\alpha, c\beta) \neq (0, 0)$. On a déjà calculé l'action de $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $g_{c,\alpha,\beta}$ dans la proposition ci-dessus : $g_{c,\alpha,\beta} * \gamma = g_{c,(\alpha,\beta)*\gamma}$. Celle-ci induit la formule de l'action de $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $g_{\alpha,\beta}$: $g_{\alpha,\beta} * \gamma = g_{(\alpha,\beta)*\gamma}$. Elle se prolonge par continuité en une action de $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ avec la même formule. Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, l'action de γ sur $g_{c,\alpha,\beta}$ est donnée par la formule : $g_{c,\alpha,\beta} * \gamma = g_{c,\alpha,d\beta} = g_{c,(\alpha,\beta)*\gamma}$, cela se voit directement sur le q -développement de $g_{c,\alpha,\beta}$ (on rappelle que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ agit par σ_d). Alors, l'action de $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $g_{\alpha,\beta}$ est donnée par la formule : $g_{\alpha,\beta} * \gamma = g_{(\alpha,\beta)*\gamma}$. □

Théorème 2.21. *Il existe une distribution algébrique $z_{\mathrm{Siegel}} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{A}_f^2 - (0, 0), \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}))$, telle que, quels que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 - (r\mathbb{Z}, r\mathbb{Z})$, on ait :*

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathrm{Siegel}} = g_{r^{-1}a, r^{-1}b}(\tau).$$

De plus, z_{Siegel} est invariante sous l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Soit e un entier ≥ 1 et soit N le plus petit entier tel que $Nr^{-1}a$ et $Nr^{-1}b$ sont des entiers. On peut trouver $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c, 6eN) = 1$ et $c \equiv 1 \pmod{eN}$. Alors on a

$$\prod_{l=0}^{e-1} \prod_{k=0}^{e-1} g_{\frac{a+kr}{er}, \frac{b+lr}{er}} = N_e (g_{c, r^{-1}a, r^{-1}b})^{1/(c^2-1)} = g_{c, r^{-1}a, r^{-1}b}^{1/(c^2-1)} = g_{r^{-1}a, r^{-1}b}.$$

Si $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^*$ deux nombres rationnels distincts et si $(a_1, a_2) \in \mathbb{Q}^2 - (r_1\mathbb{Z}, r_2\mathbb{Z})$, alors il existe $r \in \mathbb{Q}^*$ tel que $k_1 = \frac{r}{r_1}$ et $k_2 = \frac{r}{r_2}$ appartient à \mathbb{Z} . Pour $i = 1, 2$, $a_i + r_i\hat{\mathbb{Z}}$ est une réunion disjointe des $a_i + e_i r_i + r\hat{\mathbb{Z}}$ pour $0 \leq e_i \leq k_i$. On se remarque que si $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^*$ deux nombres rationnels et si $(a_1, a_2) \in \mathbb{Q}^2 - (r\mathbb{Z}, r\mathbb{Z})$, l'intégration de z_{Siegel} sur $(a_1 + r_1\hat{\mathbb{Z}}) \times (a_2 + r_2\hat{\mathbb{Z}})$ est définie par la formule :

$$\int_{(a_1+r_1\hat{\mathbb{Z}}) \times (a_2+r_2\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathrm{Siegel}} = \prod_{e_1=0}^{k_1} \prod_{e_2=0}^{k_2} g_{r^{-1}(a_1+e_1r_1), r^{-1}(a_2+e_2r_2)}.$$

Ceci ne dépend pas du choix de r à grâce au calcul au-dessus et définit une relation de distribution algébrique. Donc z_{Siegel} est une distribution algébrique.

Par définition de z_{Siegel} , z_{Siegel} est une distribution algébrique à valeurs dans $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. L'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ se factorise à travers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$. Donc en utilisant le même argument que dans le théorème 2.13, il suffit de vérifier l'invariance pour $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, $\gamma = \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ et

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ respectivement. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$ sur l'espace des formes modulaires $\mathcal{M}(\mathbb{Q})$ est donnée par la formule (1.2) dans "notations", c'est-à-dire, $(f * \gamma)(\tau) = f(\gamma\tau)$ car on est en poids 0.

- Si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, l'assertion est de la définition de z_{Siegel} et du lemme 2.20.
- Si $\gamma = \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\text{Siegel}} * \gamma &= \left(\int_{\left(\frac{a}{r_0} + \frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}}\right) \times \left(\frac{b}{r_0} + \frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}}\right)} z_{\text{Siegel}} \right) * \gamma \\ &= (g_{r^{-1}a, r^{-1}b}) * \gamma \\ &= (\det \gamma)^{1-k} g_{r^{-1}a, r^{-1}b} |_{\gamma} \\ &= g_{r^{-1}a, r^{-1}b}; \end{aligned}$$

- Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\text{Siegel}} * \gamma &= \left(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times \left(\frac{b}{e} + \frac{r}{e}\hat{\mathbb{Z}}\right)} z_{\text{Siegel}} \right) * \gamma \\ &= \prod_{i=0}^{e-1} \left(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times \left(\frac{b}{e} + \frac{ir}{e} + r\hat{\mathbb{Z}}\right)} z_{\text{Siegel}} \right) * \gamma \\ &= \prod_{i=0}^{e-1} g_{r^{-1}a, \frac{r^{-1}b+i}{e}} \left(\frac{\tau}{e} \right) \\ &= \prod_{i=0, j=0}^{e-1} g_{\frac{r^{-1}a+j}{e}, \frac{r^{-1}b+i}{e}} (\tau) \\ &= g_{r^{-1}a, r^{-1}b}. \end{aligned}$$

□

2.3. Théorie de Kummer p -adique.

2.3.1. Théorie de Kummer p -adique. Soit G un groupe localement profini. Soit X un espace topologique localement profini muni d'une action continue de G à droite. Soit M un G -module topologique muni d'une action à droite de G . On note $H^i(G, M)$ le i -ième groupe de cohomologie continue de G à valeurs dans M . Si X est de plus muni d'une G -action à gauche (notée $(g, x) = g \cdot x$) commutant à l'action à droite de G , alors $H^i(G, \mathcal{D}_{\text{alg}}(X, M))$ est muni d'une structure de G -module à gauche donnée par la formule :

$$\int_Y g \cdot \mu = \int_{gY} \mu, \text{ si } \mu \in H^i(G, \mathcal{D}_{\text{alg}}(X, M)) \text{ et } Y \subset X.$$

Pour les besoins de l'algèbre homologique (c.f. [22, Appendix B] pour une introduction brève sur la cohomologie continue), on dira que une suite de G -modules topologiques $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$ est exacte si u est le noyau de v et que v admet une section continue (a priori ni équivariante ni linéaire). La section continue $C \rightarrow B$ existe dans les deux cas ci-dessous :

- (1) C est discret,
- (2) B est un \mathbb{Z}_p -module de rang fini ou un \mathbb{Q}_p -espace de dimension finie.

Posons : $X_1 = \mathbb{A}_f^2 - (0, 0)$, $X_2 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f) \mid (a, b), (c, d) \in X_1 \}$, et $X_2^{(p)} := \mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)} \subset X_2$. Dans la section précédente, on a obtenu une distribution algébrique

$$z_{\text{Siegel}} \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})),$$

qui est invariante sous l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$.

Notons $Z^0 = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}), (x_{n+1})^p = x_n \}$. On munit la topologie de limite inverse sur Z^0 . Notons $Z = \mathbb{Q} \otimes Z^0$; Z est muni d'une action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$, agissant sur chaque composante de Z .

On définit une projection θ de Z^0 sur $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ en envoyant $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à x_0 .

Lemme 2.22. *La projection $\theta : Z^0 \rightarrow \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ est surjective, dont le noyau est*

$$\text{Ker}(\theta) = \{ (1, \epsilon_p, \epsilon_{p^2}, \dots, \epsilon_{p^n}, \dots) \} \cong \mathbb{Z}_p(1).$$

En plus, comme la topologie sur $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ est discrète, on a une suite exacte de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ -modules topologiques :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow Z^0 \rightarrow \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit Γ un sous-groupe de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini et soit $x \in \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ une unité modulaire pour Γ . Alors $x^{\frac{1}{p}}$ est encore une fonction holomorphe sur \mathcal{H} et méromorphe sur $\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, alors $x^{\frac{1}{p}} * \gamma = \zeta_{p,\gamma} x^{\frac{1}{p}}$, où $\zeta_{p,\gamma}$ est une racine d'unité d'ordre p qui dépend de γ ; ce qui nous fournit un caractère χ de Γ sur μ_p le groupe des racines d'unité d'ordre p . Par conséquent, le noyau du caractère χ est un sous-groupe de Γ d'indice fini, qui fixe $x^{\frac{1}{p}}$. Ceci permet de conclure sur la surjectivité.

Le reste est immédiat. □

Comme \mathbb{Q} est plat sur \mathbb{Z} , on obtient une suite exacte de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ -modules topologiques :

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p(1) \rightarrow Z \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow 0.$$

Cela nous fournit une suite exacte de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1)) \rightarrow \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, Z) \rightarrow \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})) \rightarrow 0.$$

En prenant la cohomologie continue de $\Pi'_\mathbb{Q}$, on obtient une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1))) \rightarrow H^0(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, Z)) \\ &\rightarrow H^0(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}))) \xrightarrow{\delta} H^1(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1))) \\ &\rightarrow H^1(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, Z)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

On appelle "application de Kummer" le morphisme δ . Notons

$$z_{\text{Siegel}}^{(p)} \in H^1(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1))),$$

l'image de $z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ par l'application de Kummer.

Lemme 2.23. *Il existe une distribution algébrique $\mu \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, Z)$ telle que $z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ est l'image du 1-cocycle*

$$\sigma \rightarrow \mu * \sigma - \mu$$

dans $H^1(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1)))$.

Démonstration. Soit $\{\phi_i\}_{i \in I}$ une base de $\text{LC}_c(X_1, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{Z} . On peut fabriquer une distribution algébrique $\mu \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, Z)$ en prenant pour $\int_{X_1} \phi_i \mu$ n'importe quel relèvement dans Z de $\int_{X_1} \phi_i z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ et alors $z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ est l'image du 1-cocycle $\sigma \rightarrow \mu * \sigma - \mu$ dans $H^1(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1)))$. \square

En utilisant l'application de cup-produit, on obtient un élément

$$z_{\text{Siegel}}^{(p)} \otimes z_{\text{Siegel}}^{(p)} \in H^2(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_2, \mathbb{Q}_p(2))).$$

On définit z_{Kato} comme l'image de $z_{\text{Siegel}}^{(p)} \otimes z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ sous l'application de restriction :

$$H^2(\Pi'_\mathbb{Q}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_2, \mathbb{Q}_p(2))) \rightarrow H^2(\Pi_\mathbb{Q}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_2^{(p)}, \mathbb{Q}_p(2))).$$

2.3.2. Passer à la mesure. Soit $\langle \cdot \rangle : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$ l'inclusion naturelle en envoyant x sur $\langle x \rangle = (1, \dots, x, 1, \dots)$, où x est à la place p . Considérons l'inclusion de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ dans $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ en envoyant d sur $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. D'après le lemme 2.20, cela définit une action de $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur l'unité de Siegel $g_{\alpha, \beta} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ par la formule :

$$d \cdot g_{\alpha, \beta} = g_{d\alpha, d\beta} = g_{\alpha, \beta} * \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

où l'action $*$ est celle de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $g_{\alpha, \beta}$, ainsi qu'une action de d sur Z , agissant sur chaque composante de Z . Par la théorie de Kummer, $z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ est l'image du 1-cocycle $\sigma \mapsto \mu * \sigma - \mu$, où μ est un relèvement de $z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ dans $\mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, Z)$. On définit $d \cdot z_{\text{Siegel}}^{(p)}$ comme l'image du 1-cocycle $\sigma \mapsto (d \cdot \mu) * \sigma - d \cdot \mu$.

Soit $u \in \mathbb{Z}_p^*$; on définit un opérateur r_u sur $z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}$ par la formule

$$r_u z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} = (u^2 - \langle u \rangle) z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)},$$

où l'action de u^2 est la multiplication par u^2 et l'action de $\langle u \rangle$ est définie ci-dessus.

Lemme 2.24. *Si $u \in \mathbb{Z}_p^*$, alors $r_u z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \in H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Z}_p(1)))$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, quels que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 - (r\mathbb{Z}, r\mathbb{Z})$, on ait

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} r_u z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \in H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p(1)).$$

On pose $\alpha = r^{-1}a$ et $\beta = r^{-1}b$. Soit N le plus petit entier tel que $N\alpha$ et $N\beta$ sont des entiers.

Rappelons que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & Z^0 & \longrightarrow & \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(1) & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

D'après la proposition 2.18, si on choisit un entier d tel que $(d, 6N) = 1$ et $d \equiv 1 \pmod{N}$ et si u_0 est un entier congru à $\langle u \rangle$ modulo pN , alors $g_{\alpha, \beta} = \frac{1}{d^2-1} \otimes g_{d, \alpha, \beta}$ et $(u_0^2 - \langle u \rangle)g_{\alpha, \beta} = g_{u_0, \alpha, \beta}$ appartiennent à $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$. Ceci implique que

$$(d^2 - 1) \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \text{ et } (u_0^2 - \langle u \rangle) \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}$$

sont dans $H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p(1))$. En conséquence, $(u^2 - u_0^2) \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}$ appartient à $H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p(1))$ si la valuation p -adique de $u - u_0$ assez grande. On conclut le lemme par la relation $r_u = (u^2 - u_0^2) + (u_0^2 - \langle u \rangle)$. \square

Soient $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, on définit un opérateur $r_{c,d}$ sur $z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \otimes z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}$ par la formule

$$r_{c,d}(z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \otimes z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}) = r_c(z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}) \otimes r_d(z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}).$$

Donc, pour tous $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, l'élément $r_{c,d}(z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \otimes z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)})$ appartient à $H^2(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(X_2, \mathbb{Z}_p(2)))$. Ceci permet de définir $z_{\mathbf{Kato}, c, d} := r_{c,d} z_{\mathbf{Kato}}$ comme l'image de $r_{c,d}(z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \otimes z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)})$ sous l'application de restriction :

$$H^2(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))) \rightarrow H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))).$$

Par ailleurs, tout élément de $\mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_2, \mathbb{Z}_p(2))$ s'étend par continuité en une mesure (i.e. forme linéaire continue sur les fonctions continues) sur X_2 à

valeurs dans $\mathbb{Z}_p(2)$. Donc $z_{\mathbf{Kato},c,d}$ peut être vu comme un élément à valeurs dans l'espace $\mathfrak{D}_0(X_2, \mathbb{Z}_p(2))$.

2.3.3. Torsion à la Soulé. On note $t = (\zeta_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$, le générateur canonique⁵ de $\mathbb{Z}_p(1)$ et l'action de $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $\mathbb{Z}_p(1)$ est par multiplication par $\det \gamma$. On note $V_p = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ la représentation de dimension 2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ donnée par les formules suivantes :

$$\text{si } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), e_1 * \gamma = ae_1 + be_2 \text{ et } e_2 * \gamma = ce_1 + de_2.$$

Si $k \geq 2$ et $j \in \mathbb{Z}$, on note $V_{k,j} = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p \otimes \mathbb{Q}_p(2-j)$.

Rappelons $X_2^{(p)} := \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{[p]})$. Soit $x \in X_2^{(p)}$; on note $x_p = \begin{pmatrix} a_p & b_p \\ c_p & d_p \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ la composante de x en p , qui est un élément dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On considère la multiplication d'une mesure $\mu \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ par la fonction

$$x \mapsto (e_1^{k-2} t^{-j}) * x_p = (a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2} ((\det x_p) t)^{-j},$$

qui est donnée par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $V_{k,j}$ et qui est continue sur $X_2^{(p)}$. Ceci nous donne une mesure $(e_1^{k-2} t^{-j}) * x_p \otimes \mu$ sur $X_2^{(p)}$ à valeurs dans $V_{k,j}$.

Lemme 2.25. *La multiplication d'une mesure $\mu \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ par la fonction $x \mapsto (e_1^{k-2} t^{-j}) * x_p$ induit un morphisme de $\mathbb{Z}_p[[\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}]]$ -modules de $\mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ dans $\mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})$.*

Démonstration. On applique la formule (1.1)

$$(\phi * g)(x) = \phi(x * g^{-1}) \text{ et } \int_X \phi(\mu * g) = \left(\int_X (\phi * g^{-1}) \mu \right) * g.$$

dans le paragraphe “notation” au cas $X = X_2^{(p)}$, $G = \Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ et $V = \mathbb{Z}_p(2)$ ou $V = V_{k,j}$. Le groupe $G = \Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ agit continûment sur X à travers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{[p]})$ par la multiplication de matrices usuelle à droite.

Soient $\phi \in \mathrm{LC}_c(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p)$, $\tau \in \Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ et $\mu \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$.

Si on considère $\mu * \tau \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$, alors τ agit sur $e_1^{k-2} t^{-j} * x_p$ comme l'action sur une fonction et la formule (1.1) se traduit par $\int \phi(x) (\mu * \tau) = \int \phi(x\tau) \chi_{\mathrm{cycl}}^2(\tau) \mu$, où $x\tau$ est donné par l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ sur $X_2^{(p)}$. Alors, on a la formule :

$$\int_{X_2^{(p)}} \phi(x) ((e_1^{k-2} t^{-j} * x_p) \otimes (\mu * \tau)) = \int_{X_2^{(p)}} \chi_{\mathrm{cycl}}^2(\tau) \phi(x\tau) ((e_1^{k-2} t^{-j} * (x\tau)_p) \otimes \mu).$$

5. D'habitude, il n'y pas de générateur canonique de $\mathbb{Z}_p(1)$. Par contre, dans notre cas, on a fixé un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{C} et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ respectivement, et on pose $\zeta_{p^n} = e^{\frac{2i\pi}{p^n}}$.

Si on considère $((e_1^{k-2}t^{-j} * x_p) \otimes \mu) * \tau \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})$, alors l'action de τ sur $e_1^{k-2}t^{-j} * x_p$ est donnée par l'action de τ sur l'espace $V_{k,j}$ et la formule (1.1) se traduit par

$$\int_{X_2^{(p)}} \phi(x) \left((e_1^{k-2}t^{-j} * x_p) \otimes \mu \right) * \tau = \int_{X_2^{(p)}} \chi_{\text{cycl}}^2(\tau) \phi(x\tau) \left((e_1^{k-2}t^{-j} * (x\tau)_p) \otimes \mu \right).$$

La comparaison des deux formules permet de conclure. □

D'après le lemme 2.25, la multiplication par $e_1^{k-2}t^{-j} * x_p$ induit un morphisme naturel :

$$H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))) \rightarrow H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})).$$

Donc on peut définir, pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$z_{\mathbf{Kato},c,d}(k,j) = ((e_1^{k-2}t^{-j} * x_p) \otimes z_{\mathbf{Kato},c,d} \in H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})),$$

où $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ agit sur $V_{k,j}$ à travers son quotient $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

3. Les anneaux de Fontaine

3.1. Le corps \mathfrak{K} et les formes modulaires.

3.1.1. Le corps \mathfrak{K} . Soit $\mathfrak{K}^+ = \mathbb{Q}_p\{\frac{q}{p}\}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q) \geq 1$ à coefficients dans \mathbb{Q}_p ; c'est un anneau principal complet pour la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$ définie par la formule :

$$v_{p,\mathfrak{K}}(f) = \inf_{n \in \mathbb{N}} v_p(a_n), \text{ si } f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n q^n / p^n \in \mathfrak{K}^+.$$

Cette valuation est aussi la valuation spectrale :

$$v_{p,\mathfrak{K}}(f) = \inf_{v_p(q) \geq 1} v_p(f(q)).$$

La restriction de la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$ à \mathbb{Q}_p coïncide avec la valuation p -adique normalisée v_p sur \mathbb{Q}_p . Dans la suite, on notera v_p au lieu de $v_{p,\mathfrak{K}}$. L'anneau \mathfrak{K}^+ est un anneau de Dedekind, et donc chaque idéal premier de \mathfrak{K}^+ définit une valuation sur \mathfrak{K}^+ . En particulier, on a la valuation normalisée v_q (i.e. $v_q(q) = 1$) correspondant à l'idéal premier (q) de \mathfrak{K}^+ .

On note \mathfrak{K} le complété du corps des fractions de l'anneau \mathfrak{K}^+ pour la valuation v_p . Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathfrak{K}}$ de \mathfrak{K} . Comme \mathfrak{K} est un corps complet pour la valuation v_p , on peut prolonger v_p sur \mathfrak{K} à $\overline{\mathfrak{K}}$ de manière unique par la formule :

$$v_p(x) = \frac{1}{[\mathfrak{K}[x] : \mathfrak{K}]} v_p(N_{\mathfrak{K}[x]/\mathfrak{K}}(x)), \text{ si } x \in \overline{\mathfrak{K}}.$$

On note le groupe de Galois de $\overline{\mathfrak{K}}$ sur \mathfrak{K} par $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.

Remarque 3.1. Il existe une manière de prolonger la valuation spectrale en une valuation spectrale sur $\overline{\mathfrak{K}}$: si $x \in \overline{\mathfrak{K}}$, on note $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathfrak{K}[X]$ le polynôme caractéristique de $y \mapsto xy, \forall y \in \mathfrak{K}[x]$. On définit la valuation spectrale v_{sp} sur $\mathfrak{K}[x]$ par la formule : $v_{\text{sp}}(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{v_p(a_i)}{i}$. Elle coïncide avec la valuation v_p sur $\overline{\mathfrak{K}}$.

Soit $M \geq 1$ un entier. On note q_M (resp. ζ_M) une racine M -ième $q^{1/M}$ (resp. $\exp(\frac{2i\pi}{M})$) de q (resp. 1). On note $F_M = \mathbb{Q}_p[\zeta_M]$. Soit $\mathfrak{K}_M = \mathfrak{K}[q_M, \zeta_M]$; c'est une extension galoisienne de \mathfrak{K} . Soit $\mathfrak{F}_M = \mathfrak{K}[\zeta_M]$ la sous-extension de \mathfrak{K}_M sur \mathfrak{K} , qui est aussi une extension galoisienne de \mathfrak{K} ; la clôture intégrale \mathfrak{F}_M^+ de \mathfrak{K}^+ dans \mathfrak{F}_M est $\mathfrak{K}^+[\zeta_M]$, qui est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q) \geq 1$ à coefficients dans F_M . Alors, \mathfrak{K}_M est une extension de Kummer de \mathfrak{F}_M de groupe de Galois cyclique d'ordre M , dont un générateur σ_M est défini par son action sur $q_M : \sigma_M q_M = \zeta_M q_M$.

On note \mathfrak{K}_{∞} (resp. \mathfrak{F}_{∞}) la réunion des \mathfrak{K}_M (resp. \mathfrak{F}_M), $M \geq 1$. On note $P_{\mathbb{Q}_p}$ (resp. $P_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$) le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{K}_{\infty}$ sur \mathfrak{K} (resp. $\overline{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{K}$). Le groupe $P_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ est un groupe profini qui est isomorphe au groupe $\hat{\mathbb{Z}}$. De plus, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow P_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow P_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow 0.$$

Fixons M un entier ≥ 1 . On note $\mathfrak{K}_{Mp^{\infty}}$ (resp. $\mathfrak{F}_{Mp^{\infty}}, F_{Mp^{\infty}}$) la réunion des \mathfrak{K}_{Mp^n} (resp. $\mathfrak{F}_{Mp^n}, F_{Mp^n}$), $n \geq 1$, ainsi que $P_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{K}_{Mp^{\infty}}$ sur \mathfrak{K}_M . On note $U_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{K}_{Mp^{\infty}}$ sur $\mathfrak{F}_{Mp^{\infty}}$, qui est isomorphe au groupe \mathbb{Z}_p , et on note $\Gamma_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{F}_{Mp^{\infty}}$ sur \mathfrak{K}_M , qui est isomorphe au groupe $\text{Gal}(F_{Mp^{\infty}}/F_M)$. On a une suite exacte : $0 \rightarrow U_{\mathfrak{K}_M} \rightarrow P_{\mathfrak{K}_M} \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{K}_M} \rightarrow 0$.

Soit $\overline{\mathfrak{K}}^+$ la clôture intégrale de \mathfrak{K}^+ dans $\overline{\mathfrak{K}}$. La clôture intégrale de \mathbb{Q}_p dans $\overline{\mathfrak{K}}$ est une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p . Donc on a une inclusion $\overline{\mathbb{Q}_p} \subset \overline{\mathfrak{K}}^+$. On note \mathfrak{K}_M^+ la clôture intégrale de \mathfrak{K}^+ dans \mathfrak{K}_M , qui est aussi la clôture intégrale de \mathfrak{F}_M^+ dans \mathfrak{K}_M .

Lemme 3.2. (1) Si $M \geq 1$ est un entier, on a $\mathfrak{K}_M^+ = \mathfrak{K}^+[\zeta_M, q_M]$. En particulier, \mathfrak{K}_M^+ est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q_M) \geq \frac{1}{M}$.
 (2) La valuation v_p sur \mathfrak{K}_M^+ est donnée par la formule :

$$v_p(x) = \inf_{v_p(q_M) \geq \frac{1}{M}} v_p\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) q_M^n\right).$$

Démonstration. (1) Si $x \in \mathfrak{K}_M^+$, il s'écrit uniquement sous la forme

$$x = \sum_{i=0}^{M-1} b_i q_M^i \text{ avec } b_i \in \mathfrak{F}_M.$$

Comme $xq_M^{M-i} \in \mathfrak{K}_M^+$, on a $\frac{1}{M} \text{Tr}_{\mathfrak{K}_M/\mathfrak{F}_M}(xq_M^{M-i}) = b_i q \in \mathfrak{F}_M^+$ et donc $b_i \in q^{-1}\mathfrak{F}_M^+$. La valuation normalisée v_q de \mathfrak{K}^+ s'étend de manière unique en une valuation v_q sur \mathfrak{K}_M car (q) est totalement ramifié. On constate que $v_q(\mathfrak{F}_M^+[q^{-1}]) = \mathbb{Z}$ et les $v_q(b_i q_M^i)$ sont distincts deux à deux. On en déduit que $0 \leq v_q(x) = \inf_i (v_q(b_i) + \frac{i}{M})$ et $\inf_i v_q(b_i) \geq 0$. Ceci permet de conclure que $b_i \in \mathfrak{F}_M^+$ pour tout i .

Si $a \in \mathfrak{F}_M^+$, alors a peut s'écrire uniquement sous la forme $a = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j q^j$, où a_j est une suite d'éléments de F_M telle que $\lim_{j \rightarrow +\infty} v_p(a_j) + j = +\infty$. On conclut le (1) en appliquant cette écriture à b_i pour $0 \leq i \leq M-1$.

(2) D'après le (1), \mathfrak{K}_M^+ est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q_M) \geq \frac{1}{M}$ à coefficients dans F_M et donc il est muni d'une valuation spectrale v donnée par la formule : $v(x) = \inf_{v_p(q_M) \geq \frac{1}{M}} v_p(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) q_M^n)$. L'anneau \mathfrak{K}^+ s'identifie à un sous-anneau de \mathfrak{K}_M^+ par changement de variable : $f(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{Mn} q_M^{Mn}$ si $f(q) \in \mathfrak{K}^+$. Alors la restriction de la valuation spectrale v sur \mathfrak{K}_M^+ à \mathfrak{K}^+ coïncide avec la valuation v_p sur \mathfrak{K}^+ . On en déduit la formule de valuation dans le lemme puisqu'il existe une manière unique de prolonger la valuation v_p sur \mathfrak{K} à \mathfrak{K}_M . □

On note $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ (resp. $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}^+$) la clôture intégrale de \mathfrak{K}^+ dans \mathfrak{K}_{Mp^∞} (resp. \mathfrak{F}_{Mp^∞}). Posons $I_n = \{\frac{a}{p^{n-1}} | a \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq (p-1)p^{n-1} - 1\}$ et $J_n = \{\frac{b}{p^n} | b \in \mathbb{N}, 0 \leq b \leq p^n - 1\}$. On note I (resp. J) la réunion des I_n (resp. J_n), pour toutes $n \geq 1$. Le lemme suivant, qui décrit l'écriture explicite d'un élément de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$, est une conséquence directe du lemme 3.2.

Lemme 3.3. *Soit $M \geq 1$ un entier tel que $v_p(M) \geq v_p(2p)$ (resp. $v_p(M) < v_p(2p)$).*

(1) *Les $\{q_M^j\}_{j \in J}$ forment une base de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ sur $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}^+$. De plus, tout $x \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ peut s'écrire uniquement sous la forme $\sum_{j \in J} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk}(x) q_M^{j+k}$, pour une suite double $a_{jk}(x) \in F_{Mp^\infty}$, telle que,*

(i) *quel que soit $j \in J$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk}(x) q_M^k$ converge dans $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}^+$;*

(ii) *L'ensemble des $j \in J$ tels qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $a_{jk}(x) \neq 0$ est fini.*

(2) *Les $\{\zeta_M^i q_M^j\}_{(i,j) \in J \times J}$ (resp. $\{\zeta_M^i q_M^j\}_{(i,j) \in I \times J}$) forment une base de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ sur \mathfrak{K}_M^+ . De plus, tout $x \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ peut s'écrire uniquement sous la forme*

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in J} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k} \text{ (resp. } \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k}\text{),}$$

pour une suite triple $a_{ijk}(x) \in F_M$ telle que :

(i) Quel que soit $(i, j) \in J \times J$ (resp. $(i, j) \in I \times J$), la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) q_M^k$

converge dans \mathfrak{K}_M^+ (i.e. $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_p(a_{ijk}(x)) + \frac{k}{M} = +\infty$.)

(ii) L'ensemble $\{(i, j) | \exists k \in \mathbb{N}, a_{ijk}(x) \neq 0\}$ est fini.

(3) La valuation v_p sur $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ est donnée par la formule :

$$v_p(x) = \inf_{v_p(q) \geq 1} (v_p(\sum_{j \in J} \sum_{i \in J} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k}))$$

$$(resp. \inf_{v_p(q) \geq 1} (v_p(\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k}))).$$

3.1.2. Le théorème d'Ax-Sen-Tate. Soit L un anneau de caractéristique 0, muni d'une valuation v_p normalisée par $v_p(p) = 1$. On note $\mathbb{C}(L)$ le complété de L pour la valuation v_p . Le but du reste de ce paragraphe est de montrer un analogue (le théorème 3.6) du théorème d'Ax-Sen-Tate et de donner une description de l'anneau $\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ (c.f. Corollaire 3.7).

Soit H un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$; si $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}$, on définit le diamètre $\Delta_H(\alpha)$ par rapport à un sous-groupe fermé H de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$ par $\Delta_H(\alpha) = \inf_{g \in H} (v_p(g\alpha - \alpha))$. Notons que $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^H$ si et seulement si $\Delta_H(\alpha) = +\infty$.

Lemme 3.4. Soit $P(X) \in \overline{\mathfrak{K}}[X]$ (resp. $\in \overline{\mathfrak{K}}^+[X]$), unitaire de degré n , dont toutes les racines vérifient $v_p(\alpha) \geq u$, où u est une constante.

(1) Si $n = p^k d$ avec $(p, d) = 1$ et $d \geq 0$ et si $l = p^k$, alors le polynôme $P^{(l)}$, dérivée l -ième de P , a au moins une racine $\beta \in \overline{\mathfrak{K}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{K}}^+$) vérifiant $v_p(\beta) \geq u$.

(2) Si $n = p^{k+1}$ et $l = p^k$, alors $P^{(l)}$ a au moins une racine $\beta \in \overline{\mathfrak{K}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{K}}^+$) vérifiant $v_p(\beta) \geq u - \frac{1}{p^{k+1} - p^k}$.

Démonstration. La démonstration pour $P \in \overline{\mathfrak{K}}[X]$ est classique. Par exemple, elle se trouve dans les notes du cours⁶ de Colmez. Elle marche aussi pour $P \in \overline{\mathfrak{K}}^+[X]$. □

Lemme 3.5 (Ax). Il existe une constante $C = \frac{p}{(p-1)^2}$ telle que

(1) si $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}$, alors il existe $a \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ vérifiant $v_p(\alpha - a) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - C$;

(2) si $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^+$, alors il existe $a \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ vérifiant

$$v_p(\alpha - a) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - C.$$

Démonstration. Le (1) correspond au cas traité par Ax; nous ne traiterons donc que le (2). Soit $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^+$ tel que $[\mathfrak{K}_{Mp^\infty}[\alpha] : \mathfrak{K}_{Mp^\infty}] = n$ et soit $l(n)$ le plus grand entier l tel que $p^l \leq n$. On montre le résultat suivant par

6. <http://www.math.jussieu.fr/~colmez/nombres-p-adiques.pdf>

réurrence sur n : il existe $a \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ vérifiant $v_p(a - \alpha) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - \sum_{i=1}^{l(n)} \frac{1}{p^i - p^{i-1}}$; ce qui permet de conclure la démonstration du lemme car $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p^i - p^{i-1}} = \frac{1}{(p-1)^2}$.

On prend la constante $u = \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha)$ dans le lemme précédent. Posons $P(X) = Q(X + \alpha)$, où Q est le polynôme minimal de α sur $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$. Comme les racines de P sont les $\sigma(\alpha) - \alpha$, pour $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$, $P(X)$ vérifie la condition du lemme précédent.

(i) Si n n'est pas une puissance de p , il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que le polynôme $Q^{(l)} \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+[X]$ ait une racine $\beta \in \overline{\mathfrak{K}}^+$ vérifiant $v_p(\beta - \alpha) \geq u$. D'autre part, si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$, alors on a

$$v_p(\sigma(\beta) - \beta) \geq \min(v_p(\sigma(\beta - \alpha)), v_p(\sigma(\alpha) - \alpha), v_p(\alpha - \beta)) \geq u.$$

Par ailleurs, on a $[\mathfrak{K}_{Mp^\infty}[\beta] : \mathfrak{K}_{Mp^\infty}] = \deg Q^{(l)} < n$. Cela permet de conclure par l'hypothèse de récurrence.

(ii) Si $n = p^{k+1}$, on peut trouver une racine β de $Q^{(p^k)}(X)$ vérifiant les conditions

$$v_p(\beta - \alpha) \geq u - \frac{1}{p^{k+1} - p^k} \text{ et } [\mathfrak{K}_{Mp^\infty}[\beta] : \mathfrak{K}_{Mp^\infty}] < n.$$

On tire l'existence de $a \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$, de l'hypothèse de récurrence, vérifiant

$$v_p(\beta - a) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\beta) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{p^i - p^{i-1}}.$$

On a $\Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\beta) \geq u$ de la même manière de (i). Ceci permet de conclure la démonstration du lemme. □

Théorème 3.6 (Ax-Sen-Tate). (1) *Le corps \mathfrak{K}_{Mp^∞} est dense dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}})^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$.*

(2) *L'anneau $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ est dense dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$.*

Démonstration. On montre le (2) et le (1) se déduit de la même manière. L'inclusion $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+) \subset H^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}, \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+))$ est immédiate. Il suffit de montrer l'inverse.

Si $\alpha \in H^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}, \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+))$, il existe une suite $\{\alpha_n \in \overline{\mathfrak{K}}^+ : v_p(\alpha - \alpha_n) \geq n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On note $\Delta_n = \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha_n)$. Quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$, on a $v_p(\sigma(\alpha_n) - \alpha_n) \geq \min\{v_p(\sigma(\alpha_n - \alpha)), v_p(\alpha_n - \alpha)\} \geq n$. Ceci implique que $\Delta_n \geq n$. Par ailleurs, quel que soit $n \geq 1$, par le lemme d'Ax 3.5, il existe un élément $a_n \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ tel que $v_p(\alpha_n - a_n) \geq \Delta_n - \frac{p}{(p-1)^2} \geq n - \frac{p}{(p-1)^2}$. Ceci implique que $v_p(\alpha - a_n) \geq n - \frac{p}{(p-1)^2}$ et α est la limite de la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. □

Corollaire 3.7. Soit $M \geq 1$ un entier tel que $v_p(M) \geq v_p(2p)$ (resp. $v_p(M) < v_p(2p)$).

(1) Tout élément x de $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$ s'écrit uniquement sous la forme

$$\sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k} \quad (\text{resp. } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k}),$$

pour une suite triple $\{a_{ijk}(x)\}_{(i,j,k) \in J \times J \times \mathbb{N}}$ (resp. $\{a_{ijk}(x)\}_{(i,j,k) \in I \times J \times \mathbb{N}}$) d'éléments de F_M telle que, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\{(i, j, k) \in J \times J \times \mathbb{N} : v_p(a_{ijk}(x)) + \frac{j+k}{M} \leq N\}$ (resp. $\{(i, j, k) \in I \times J \times \mathbb{N} : v_p(a_{ijk}(x)) + \frac{j+k}{M} \leq N\}$) est fini.

(2) La valuation v_p sur $\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ est donnée par la formule :

$$v_p(x) = \inf_{v_p(q) \geq 1} v_p\left(\sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k}\right)$$

$$(\text{resp. } \inf_{v_p(q) \geq 1} v_p\left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ijk}(x) \zeta_M^i q_M^{j+k}\right)).$$

Démonstration. On déduit le corollaire du lemme 3.3 et du théorème d'Ax-Sen-Tate 3.6. □

3.1.3. Trace de Tate normalisée. Dans ce paragraphe, on construira une application \mathfrak{K}_M^+ -linéaire continue Γ_M , appelée la trace de Tate normalisée, de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ dans \mathfrak{K}_M^+ pour tous $M \in \mathbb{N}$, et on décrira ses propriétés. L'ingrédient principal est la construction de la trace de Tate normalisée pour l'algèbre de Tate de type $\mathbb{Z}_p\{T, T^{-1}\}$, qui est bien étudiée par Andreatta et Brinon dans [3].

On note $R = \mathbb{Z}_p\{\frac{q}{p}, \frac{p}{q}\}$ l'algèbre de Tate dans les variables $q/p, p/q$ à coefficients dans \mathbb{Z}_p . Si $m \in \mathbb{N}$, on note R_m la clôture intégrale de R dans $\text{Frac}(R)[\zeta_{p^m}]$ et on note $R_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} R_n$. Si $m, n \in \mathbb{N}$, on note R_m^n la clôture intégrale de R dans $\text{Frac}(R_m)[(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p^n}}]$. On pose

$$R_\infty^n = \cup_{m \in \mathbb{N}} R_m^n \text{ et } R_\infty^\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} R_n^n.$$

Si $m \geq n$, on a $R_m^n = R_m \otimes_{R_n} R_n^n$. Par ailleurs, on a un isomorphisme de groupes de Galois $\text{Gal}(R_\infty^\infty[\frac{1}{p}]/R_\infty[\frac{1}{p}]) \cong \text{Gal}(\mathfrak{K}_{p^\infty}/\mathfrak{F}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}_p$. On note u un des générateurs du groupe $\text{Gal}(\mathfrak{K}_{p^\infty}/\mathfrak{F}_{p^\infty})$; on pose $u_m = u^{p^m}$ qui est un générateur du groupe de Galois $\text{Gal}(R_\infty^\infty[\frac{1}{p}]/R_\infty[\frac{1}{p}]) \cong U_{\mathfrak{K}_{p^m}}$.

Si m est un entier non négatif, on définit une application $R_\infty^m[\frac{1}{p}]$ -linéaire $\Lambda_m : R_\infty^\infty[\frac{1}{p}] \rightarrow R_\infty^m[\frac{1}{p}]$ par la formule :

$$\Lambda_m(x) = \frac{1}{p^{n-m}} \text{Tr}_{R_n[\frac{1}{p}]/R_n^m[\frac{1}{p}]}(x), \text{ si } n \geq m \text{ et } x \in R_n^n[\frac{1}{p}].$$

Lemme 3.8. (1) Il existe une constante C telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in R_{m+1}^{m+1}[\frac{1}{p}]$, on a $v_p((u_m - 1)x) \geq v_p(x) + \frac{1}{p-1} - Cp^{-m}$.

(2) Λ_m est continue. Plus précisément, on a $v_p(\Lambda_m(x)) \geq v_p(x) - \frac{C}{p^{m-1}}$.

Démonstration. Ce lemme est un cas particulier dans [3, Lemme 3.7 et 3.8], et l'ingrédient principal est la contrôlation de ramification dans [2, cor. 3.10].

(1) D'après [2, cor. 3.10], il existe une constante C telle que, pour tous $m \geq 1$, on a

$$p^{C/p^m} R_{m+1}^{m+1} \subset \bigoplus_{i=0}^{p-1} R_{m+1}^m \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{i}{p^{m+1}}} \subset R_{m+1}^{m+1}.$$

Si $x \in R_{m+1}^{m+1}[\frac{1}{p}]$, x s'écrit sous la forme $\sum_{i=0}^{p-1} x_i \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{i}{p^{m+1}}}$, où $x_i \in R_{m+1}^m$ et $v(x_i) \geq v(x) - \frac{C}{p^m}$. On en déduit que

$$v_p((u_m - 1)x) = v_p\left(\sum_{i=0}^{p-1} x_i (\zeta_p^i - 1) \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{i}{p^{m+1}}}\right) \geq v_p(x) + \frac{1}{p-1} - \frac{C}{p^m}.$$

(2) Si $x \in R_{m+1}^{m+1}[\frac{1}{p}]$, on a

$$p\Lambda_m(x) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} u_m^i\right)(x) = ((1 - u_m)^{p-1} + pP(u_m))(x),$$

où $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et $P(1) = 1$. On déduit de (1) que

$$v_p(\Lambda_m(x)) \geq v_p(x) - (p-1)\frac{C}{p^m}.$$

En conséquence, si $x \in R_n^n[\frac{1}{p}]$, on a

$$\begin{aligned} v_p(\Lambda_m(x)) &\geq v_p(\Lambda_{m+1}(x)) - (p-1)\frac{C}{p^m} \geq \dots \\ &\geq v_p(x) - (p-1)\frac{C}{p^m} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i}\right) \geq v_p(x) - \frac{C}{p^{m-1}}. \end{aligned}$$

□

On note $\pi_n = \zeta_{p^{n+1}} - 1$. Comme $\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p^n}} = a \frac{q_p^n}{(\pi_n)^{p-1}}$, où a est une unité de $\mathcal{O}_{F_{p^{n+1}}}$, on a une inclusion naturelle de $\mathfrak{K}_{p^\infty}^+$ dans $R_\infty^\infty[\frac{1}{p}]$. Si $n \geq m$, on définit une application $\mathfrak{K}_{p^m}^+ F_{p^n}$ -linéaire $T_{p^m, p^n} : \mathfrak{K}_{p^\infty}^+ \rightarrow \mathfrak{K}_{p^m}^+ F_{p^n}$ en composant la restriction de Λ_m à $\mathfrak{K}_{p^\infty}^+$ et la trace de Tate normalisée de F_∞ dans F_{p^n} . Soit $M = M_0 p^m$ avec $(p, M_0) = 1$. L'application T_{p^m, p^m} s'étend en une trace de Tate normalisée $T_{M, p^m} : \mathfrak{K}_{p^\infty}^+ F_M \rightarrow \mathfrak{K}_{p^m}^+ F_M$ par F_M -linéarité.

Lemme 3.9. *La trace de Tate normalisée T_{M,p^m} est $\mathfrak{K}_{p^m}^+ F_M$ -linéaire, donnée par la formule :*

$$T_{M,p^m} : \mathfrak{K}_{p^\infty}^+ F_M \longrightarrow \mathfrak{K}_{p^m}^+ F_M$$

$$\zeta_{M_0 p^n}^a q_{p^n}^b \mapsto \begin{cases} \zeta_{M_0 p^n}^a q_{p^n}^b; & \text{si } p^{n-m} | a \text{ et } p^{n-m} | b; \\ 0; & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit e_1, \dots, e_d une base de \mathfrak{K}_M^+ sur $\mathfrak{K}_{p^\infty}^+ F_M$. Comme $[\mathfrak{K}_{M p^\infty}^+ : \mathfrak{K}_{p^\infty}^+ F_M] = [\mathfrak{K}_M^+ : \mathfrak{K}_{p^m}^+ F_M]$, les e_1, \dots, e_d forment aussi une base de $\mathfrak{K}_{M p^\infty}^+$ sur $\mathfrak{K}_{p^\infty}^+ F_M$. Si $x \in \mathfrak{K}_{M p^\infty}^+$, alors x peut s'écrire uniquement sous la forme $x = \sum_{i=1}^d a_i(x) e_i$ avec $a_i(x) \in \mathfrak{K}_{p^\infty}^+ F_M$. On pose une application \mathfrak{K}_M^+ -linéaire

$$T_M : \mathfrak{K}_{M p^\infty}^+ \rightarrow \mathfrak{K}_M^+$$

par la formule $T_M(x) = \sum_{i=1}^d T_{M,p^m}(a_i(x)) e_i$.

Remarque 3.10. Si on fixe une base de \mathfrak{K}_M^+ sur $\mathfrak{K}_{p^m}^+ F_M$, les coefficients $a_i(x)$ dans l'écriture de $x \in \mathfrak{K}_{M p^n}$ se calculent de la manière suivante : Soit e_1^*, \dots, e_d^* la base duale de \mathfrak{K}_M sur $\mathfrak{K}_{p^m} F_M$ par rapport à la trace $\frac{1}{d} \text{Tr}_{\mathfrak{K}_M/\mathfrak{K}_{p^m} F_M}$. On a donc $a_i(x) = \frac{1}{d} \text{Tr}_{\mathfrak{K}_{p^n} M/\mathfrak{K}_{p^{m+n}} F_M}(x e_i^*)$.

Lemme 3.11. *Si $M \in \mathbb{N}$, l'application T_M est continue et elle s'étend par continuité en une application \mathfrak{K}_M^+ -linéaire $T_M : \mathbb{C}(\mathfrak{K}_{M p^\infty}^+) \rightarrow \mathfrak{K}_M^+$ qui commute à l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.*

Démonstration. Par construction, il suffit de démontrer le lemme pour $M = p^m$. D'après Tate [26], la trace de Tate normalisée de F_∞ dans F_{p^m} est continue. Comme Λ_m est continue, on en déduit que T_{p^m} est continue.

Si $i \in I, j \in J$ et $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, on a $(\zeta^i q^j) * \sigma = \zeta^{(\chi_{\text{cycl}}(\sigma)-1)i} \zeta^{c_q(\sigma)j} \zeta^i q^j$, où c_q est le 1-cocycle associé à q à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ par la théorie de Kummer. La commutativité de T_{p^m} et $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ vient de la formule de l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ et de la formule de T_{p^m} sur $\mathfrak{K}_{p^\infty}^+$ (c.f. lemme 3.9). \square

3.1.4. Lien avec l'algèbre $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ des formes modulaires. En associant son q -développement à une forme modulaire, on voit les formes modulaires comme des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_p \mathfrak{K}_\infty$.

Lemme 3.12. *Le groupe de Galois $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ de $\overline{\mathbb{Q}}_p \mathfrak{K}_\infty$ sur \mathfrak{K} préserve l'algèbre des formes modulaires $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$; c'est-à-dire, $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un sous-groupe de $\Pi_{\overline{\mathbb{Q}}}$.*

Démonstration. Considérons la suite exacte : $0 \rightarrow P_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow P_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow \mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow 0$, où $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & \hat{\mathbb{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}_p \mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K} \overline{\mathbb{Q}}_p$. Comme $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ préserve $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un sous-groupe de $\Pi_{\overline{\mathbb{Q}}}$. On a deux actions de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \hat{\mathbb{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$:

- (1) l'action induite par celle de $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p \mathfrak{K}_\infty$;

(2) l'action modulaire étendant par continuité celle de $(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$. On constate que ces deux actions de $(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ coïncident en comparant les formules : on a $(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})q_M = q_M \zeta_M^b$ dans les deux cas. Donc $P_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ preserve l'algèbre $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$, ce qui permet de déduire le lemme. \square

En composant les morphismes $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}} \rightarrow P_{\mathbb{Q}_p}$, l'inclusion $P_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$ induit un morphisme $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}} \rightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$. De plus, si $M \geq 1$ un entier, $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_M}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$ et donc on a un morphisme $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_M} \rightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$.

3.2. Application de la construction de Fontaine à l'anneau \mathfrak{R}^+ .

3.2.1. La construction de Fontaine. Soit L un anneau de caractéristique 0, qui est muni d'une valuation v_p telle que $v_p(p) = 1$. On note $\mathcal{O}_L = \{x \in L, v_p(x) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de L pour la topologie p -adique. On note $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ le complété de \mathcal{O}_L pour la valuation v_p . On pose $\mathbb{C}(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}[\frac{1}{p}]$.

Définition 3.13. Soit $A_n = \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ pour tous n ; alors $\{A_n\}$ muni des morphismes de transition $A_n \mapsto A_{n-1}$ définis par l'application de Frobenius absolu $x_n \mapsto x_n^p$ forme un système projectif. Notons

$$\mathbb{R}(L) = \varprojlim A_n = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} | x_n \in \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L \text{ et } x_{n+1}^p = x_n, \text{ si } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}(L)$, soit \hat{x}_n un relèvement de x_n dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$. La suite $(\hat{x}_{n+k}^{p^k})$ converge quand k tend vers l'infini. On note $x^{(n)}$ sa limite, qui ne dépend pas du choix des relèvements \hat{x}_n . On obtient ainsi une bijection : $\mathbb{R}(L) \rightarrow \{(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}, \forall n\}$. Si $x = (x^{(i)}), y = y^{(i)}$ sont deux éléments de $\mathbb{R}(L)$, alors leur somme $x + y$ et leur produit xy sont donnés par : $(x + y)^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j}$ et $(xy)^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)}$.

L'anneau $\mathbb{R}(L)$ est un anneau parfait de caractéristique p (i.e. le morphisme $x \mapsto x^p$ est bijectif). On note $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{R}(L)$. Alors $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ est un anneau p -adique (i.e. un anneau séparé et complet pour la topologie p -adique), d'anneau résiduel parfait de caractéristique p . Si $x \in \mathbb{R}(L)$, on note $[x] = (x, 0, 0, \dots) \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ son représentant de Teichmüller. Alors tout élément a de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} p^k [x_k]$ avec une suite $(x_k) \in (\mathbb{R}(L))^{\mathbb{N}}$.

On définit un morphisme d'anneaux $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}}(L) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ par la formule $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k [x_k] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}$. On note $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L) = \mathbb{A}_{\text{inf}}(L)[\frac{1}{p}]$, et on étend θ en un morphisme $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L) \rightarrow \mathbb{C}(L)$. On note $\mathbb{B}_m(L) = \mathbb{B}_{\text{inf}}(L)/(\text{Ker}\theta)^m$. On fait de $\mathbb{B}_m(L)$ un anneau de Banach en prenant l'image de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ comme anneau d'entiers.

On définit $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L) := \varprojlim \mathbb{B}_m(L)$ comme le complété $\text{Ker}(\theta)$ -adique de $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L)$; on le munit de la topologie de la limite projective, ce qui en fait

un anneau de Fréchet. Donc θ s'étend en un morphisme continu d'anneaux topologiques $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L) \rightarrow \mathbb{C}(L)$.

On peut munir $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$ d'une filtration de la façon suivante : pour $i \in \mathbb{N}$, notons $\text{Fil}^i \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$ la i -ième puissance de l'idéal $\text{Ker}\theta$ de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$.

L'anneaux $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$ et si $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$U_{m,k} = p^m \mathbb{A}_{\text{inf}}(L) + (\text{Ker}\theta)^{k+1} \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L),$$

alors les $U_{m,k}$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$.

Exemple 3.14. (1) Si $L = \mathbb{Q}_p$, alors la construction est triviale (i.e.

$$\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p).$$

(2) Si $L = \overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $C_p = \mathbb{C}(\overline{\mathbb{Q}_p})$, $\tilde{E}^+ = \mathbb{R}(\overline{\mathbb{Q}_p})$, $\tilde{A}^+ = \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathbb{Q}_p})$, $\tilde{B}^+ = \mathbb{B}_{\text{inf}}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ et $B_{\text{dR}}^+ = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathbb{Q}_p})$. On note $\tilde{\zeta}$ (resp. $\tilde{\zeta}_M$ pour un entier $M \geq 1$) le représentant de Teichmüller de $\zeta^{(1)} = (1, \zeta_p, \dots, \zeta_{p^n}, \dots)$ (resp. $\zeta^{(M)} = (\zeta_M, \dots, \zeta_{Mp^n}, \dots)$) dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\tilde{\mathcal{R}}^+)$. Si $M|N$, alors on a $\tilde{\zeta}_N^{N/M} = \tilde{\zeta}_M$. Le noyau du morphisme $\theta : \tilde{A}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{C_p}$ est un idéal principal engendré par $\omega = \frac{\tilde{\zeta}-1}{\zeta_p-1}$. On pose $t = \log \tilde{\zeta} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\tilde{\zeta})^n}{n}$; c'est le $2\pi i$ p -adique de Fontaine, qui appartient à B_{dR}^+ et aussi engendre le noyau du morphisme $\theta : B_{\text{dR}}^+ \rightarrow C_p$.

(3) On va considérer les cas $L = \mathcal{R}_{Mp^\infty}^+$ pour $M \geq 1 \in \mathbb{N}$ et $L = \overline{\mathcal{R}}^+$. Le $2\pi i$ p -adique de Fontaine t appartient à $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$. D'après la construction de Fontaine, on a un morphisme surjectif d'anneaux : $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}}(L) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ avec le noyau engendré par $\omega = \frac{\tilde{\zeta}-1}{\zeta_p-1}$. De plus, θ s'étend en un morphisme continu d'anneaux $\theta : \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L) \rightarrow \mathbb{C}(L)$, dont le noyau est l'idéal principal engendré par t ou ω , sur lequel $\mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ agit par multiplication par χ_{cycl} .

3.2.2. Trace de Tate normalisée pour $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathcal{R}_{Mp^\infty}^+)$. Pour simplifier la

notation, on note \mathbb{A}_{inf} (resp. \mathbb{B}_{inf} et \mathbb{B}_{dR}^+) l'anneau $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{R}}^+)$ (resp. $\mathbb{B}_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{R}}^+)$ et $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathcal{R}}^+)$). Soit \tilde{q} (resp. \tilde{q}_M si $M \geq 1$ est un entier) le représentant de Teichmüller dans \mathbb{A}_{inf} de $(q, q_p, \dots, q_{p^n}, \dots)$ (resp. $(q_M, \dots, q_{Mp^n}, \dots)$). Si $M|N$, on a $\tilde{q}_N^{N/M} = \tilde{q}_M$.

On définit une application $\iota_{\text{dR}} : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ par $f(q) \mapsto f(\tilde{q})$; ce qui permet d'identifier \mathcal{R}^+ à un sous-anneau de \mathbb{B}_{dR}^+ .

On note $\alpha = \frac{\tilde{q}}{p} - [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \dots,)]$ et on a $\alpha \in \mathbb{A}_{\text{inf}} \cap \text{Ker}\theta$. Si $f(q) \in \mathcal{R}^+$ est de valuation p -adique ≥ 0 (i.e. $f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (\frac{q}{p})^n \in \mathcal{R}^+$ avec $a_n \in \mathbb{Z}_p$),

on a

$$f(\tilde{q}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\alpha + [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \dots)])^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \sum_{n \geq k} a_n \binom{n}{k} [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \dots)]^k$$

et la série $\sum_{n \geq k} a_n \binom{n}{k} [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \dots)]^k$ converge dans \mathbb{A}_{inf} . Donc ι_{dR} est continue. Mais il faut faire attention au fait que $\iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}^+)$ n'est pas stable par $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$ car $\tilde{q}\sigma = \tilde{q}\tilde{\zeta}^{c_q(\sigma)}$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$, où c_q est le 1-cocycle à valeur dans $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à q par la théorie de Kummer.

Posons $\tilde{\mathfrak{K}}^+ = \iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}^+)[[t]]$. Si $M \geq 1$ est un entier, on note $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ l'anneau $\tilde{\mathfrak{K}}^+[\tilde{q}_M, \tilde{\zeta}_M]$ et pose $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+ = \bigcup_n \tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^n}^+$. L'application ι_{dR} s'étend en un morphisme continu de \mathfrak{K}^+ -modules $\iota_{\text{dR}} : \mathfrak{K}_M^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ en envoyant ζ_M et q_M sur $\tilde{\zeta}_M$ et \tilde{q}_M respectivement. On a $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+ = \iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)[[t]]$.

Remarque 3.15. Le module $\iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)$ n'est pas un anneau car $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_M^M \notin \iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)$. Donc le morphisme $\iota_{\text{dR}} : \mathfrak{K}_M^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ n'est plus un morphisme d'anneaux.

- Lemme 3.16.** (1) $\tilde{\mathfrak{K}}^+$ est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$.
 (2) Le $\tilde{\mathfrak{K}}^+$ -module $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ est égal au $\tilde{\mathfrak{K}}^+$ -module $\tilde{\mathfrak{K}}^+[\zeta_M, \tilde{q}_M]$.

Démonstration. Si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$, $\sigma\tilde{q} = \tilde{q}\tilde{\zeta}^{c_q(\sigma)}$ et $\tilde{\zeta} \in \mathfrak{K}[[t]]$. Alors $\sigma\tilde{q} \in \mathfrak{K}[[t]]$. Par ailleurs, on a $\sigma t = \chi_{\text{cycl}}(\sigma)t$. Cela permet de conclure le (1). Le (2) se déduit du fait suivant (c.f. [7, Lemme V 1.1]) : $\zeta_M = \tilde{\zeta}_M \exp(-\frac{t}{M})$. \square

- Théorème 3.17.** Soit $M \geq 1$. On a
 (1) $H^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_{Mp^\infty}}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+) = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$;
 (2) $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ est dense dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$.

Le théorème se déduit des lemmes 3.18 et 3.20 suivants :

Lemme 3.18. Tout élément x de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_{p^\infty}}}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \left(\sum_{i \in I, j \in J} a_{ijk}(x) \tilde{\zeta}^i \tilde{q}^j \right),$$

où $a_{ijk}(x)$ est une suite triple d'éléments de $\iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}^+)$ avec la propriété suivante : pour k fixé et $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{(i, j) \in I \times J : v_p(a_{ijk}(x)) + j \leq N\}$ est fini. De plus, $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^\infty}^+$ est dense dans $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_{p^\infty}}}$.

Démonstration. En composant l'application θ , l'application

$$T_1 : \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_{p^\infty}}} \rightarrow \mathfrak{K}^+$$

et l'application ι_{dR} , on définit une suite d'applications pour $i \in I$ et $j \in J$:

$$\theta_{ij} : (\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_{p^\infty}}} \rightarrow \iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}^+); x \mapsto \theta_{ij}(x) = \frac{1}{\tilde{q}} (\iota_{\text{dR}} \circ T_1(\theta(x)\zeta^{-i}q^{1-j})).$$

Soit η l'application de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}$ dans $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}$ définie par

$$\eta(x) = \omega^{-1}\left(x - \sum_{i \in I, j \in J} \theta_{ij}(x) \tilde{\zeta}^i \tilde{q}^j\right).$$

Si $x \in (\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x = \omega^{n+1} \eta^{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n \omega^k \left(\sum_{i \in I, j \in J} \theta_{ij}(\eta^k(x)) \tilde{\zeta}^i \tilde{q}^j \right),$$

ce qui montre que l'on peut poser $a_{ijk}(x) = \theta_{ij}(\eta^k(x))$; d'où l'existence d'une telle écriture. D'autre part, l'unicité se déduit de la construction de θ_{ij} et de l'unicité d'écriture d'élément dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{R}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}$. Enfin, la densité est une conséquence directe d'une telle écriture. \square

Remarque 3.19. Tout élément x de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}$ s'écrit aussi de manière unique sous la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \left(\sum_{i \in I, j \in J} a'_{ijk}(x) \tilde{\zeta}^i \tilde{q}^j \right),$$

où la suite triple $a'_{ijk}(x)$ d'éléments de $\iota_{\text{dR}}(\mathfrak{R}^+)$ vérifie la même propriété dans le lemme.

Passons au cas général. Soit $M = M_0 p^m$ avec $(p, M_0) = 1$. Soient $l, h \in \mathbb{N}$ et $h \geq l$ tels que $[\mathfrak{R}_M^+ \mathfrak{R}_{p^l}^+ : \mathfrak{F}_M^+ \mathfrak{R}_{p^l}^+] = [\mathfrak{R}_{M p^\infty}^+ : \mathfrak{F}_M^+ \mathfrak{R}_{p^\infty}^+] = c$ et $[F_M F_{p^h} : F_{p^h}] = [F_{M p^\infty} : F_{p^\infty}] = d$. Supposons que e_1, \dots, e_c une base de $\mathfrak{R}_M^+ \mathfrak{R}_{p^l}^+$ sur $\mathfrak{F}_M^+ \mathfrak{R}_{p^l}^+$ et f_1, \dots, f_d une base de $F_M F_{p^h}$ sur F_{p^h} . On peut démontrer le lemme suivant de la même manière du lemme 3.18.

Lemme 3.20. *Sous l'hypothèse ci-dessus. Tout élément x de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_M p^\infty}}$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \left(\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^d b_{ijk}(x) \iota_{\text{dR}}(e_i) f_j \right), \text{ avec } b_{ijk}(x) \in (\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}.$$

Proposition 3.21. *Si X est un ouvert compact de \mathbb{Q}_p vérifiant $X + p^{-1}\mathbb{Z}_p = X$, il existe une unique application $\iota_{\text{dR}}(\mathfrak{R}^+)$ -linéaire Res_X continue de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}$ dans $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_p^\infty}}$ telle que l'on ait*

$$\text{Res}_X(\tilde{\zeta}^x \tilde{q}^y) = \tilde{\zeta}^x \tilde{q}^y, \text{ si } x \in X, y \in X \cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \text{ et } \text{Res}_X(\tilde{\zeta}^x \tilde{q}^y) = 0, \text{ sinon.}$$

Démonstration. Comme $\omega = \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\zeta}_p^i$ est un polynôme en $\tilde{\zeta}_p$, on voit que s'il existe une telle application, Res_X doit être donnée par la formule

$$(3.1) \quad \text{Res}_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \left(\sum_{(i,j) \in (I \cap X) \times (J \cap X)} a_{ijk}(x) \tilde{\zeta}^i \tilde{q}^j \right).$$

Ceci implique que $\text{Res}_X(\mathbb{A}_{\text{inf}}^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}p^\infty}}) \subset \mathbb{A}_{\text{inf}}^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}p^\infty}}$ et

$$\text{Res}_X((\text{Ker}\theta)^{k+1}) = \text{Res}_X(\omega^{k+1}(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}p^\infty}}) \subset (\text{Ker}\theta)^{k+1},$$

et donc que $\text{Res}_X(U_{m,k}) \subset U_{m,k}$, ce qui permet de conclure que l'application Res_X définie par la formule (3.1) est continue.

Il ne reste donc plus qu'à donner la formule explicite pour $\text{Res}_X(\tilde{\zeta}^x)$ si $x \in \mathbb{Q}_p$. On a le fait suivant dans ([7, prop. 4.2]) :

$$\text{Res}_X(\tilde{\zeta}^x) = \tilde{\zeta}^x, \text{ si } x \in X, \text{ et } \text{Res}_X(\tilde{\zeta}^x) = 0 \text{ sinon.}$$

Ceci permet de conclure la démonstration en utilisant le formule explicite pour Res_X . □

Théorème 3.22. *Si $M \geq 1$ est un entier tel que $m = v_p(M) \geq v_p(2p)$, il existe une unique application $\mathbf{R}_M : \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+) \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}_M^+$ qui est $\tilde{\mathfrak{R}}_M^+$ -linéaire et continue et telle que la restriction de \mathbf{R}_M à $\tilde{\mathfrak{R}}_{Mp^\infty}^+$ est donnée par la formule :*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M : \tilde{\mathfrak{R}}_{Mp^\infty}^+ &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{R}}_M^+ \\ \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b &\mapsto \begin{cases} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b; & \text{si } p^n|a \text{ et } p^n|b; \\ 0; & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, \mathbf{R}_M commute à l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$.

Démonstration. S'il existe une telle application, elle est unique par continuité de \mathbf{R}_M .

Passons à l'existence. On décompose $M = M_0 p^m$ avec $(M_0, p) = 1$.

Soit $M_0 = 1$. Soit S_m le sous- $\iota_{\text{dR}}(\mathfrak{R}^+)$ -module de \mathbb{B}_{dR}^+ engendré par les $\tilde{\zeta}^x \tilde{q}^y$ pour $x \in p^{-m}\mathbb{Z}_p, y \in p^{-m}\mathbb{Z}$. L'adhérence de S_m dans \mathbb{B}_{dR}^+ est $\tilde{\mathfrak{R}}_p^+$. En appliquant la proposition 3.21 à $X = p^{-m}\mathbb{Z}_p$, on obtient une application $\tilde{\mathfrak{R}}_p^+$ -linéaire continue $\text{Res}_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}$ de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}p^\infty}}$ dans $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}p^\infty}}$ telle que la restriction de $\text{Res}_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}$ à $\tilde{\mathfrak{R}}_p^+$ vérifie la formule voulue. On pose $\mathbf{R}_1 = \text{Res}_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}$.

Passons au cas général. D'après le lemme 3.20, si

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \left(\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^d b_{ijk}(x) \iota_{\text{dR}}(e_i) f_j \right) \in (\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}Mp^\infty}},$$

on pose une application de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}Mp^\infty}}$ à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{R}}_M^+$ par la formule :

$$\mathbf{R}_M(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \left(\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^d \mathbf{R}_1(b_{ijk}(x)) \iota_{\text{dR}}(e_i) f_j \right).$$

C'est une application $\tilde{\mathfrak{R}}_M^+$ -linéaire. La continuité de \mathbf{R}_M se déduit de celle de \mathbf{R}_1 .

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que la restriction de \mathbf{R}_M à $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}$ satisfait la formule voulue. On constate que $l = m$ vérifie la condition du lemme 3.20 et si $n \geq m$, on a $[\mathfrak{K}_M^+ \mathfrak{K}_{p^n}^+ : \mathfrak{K}_{p^n}^+ F_M] = M_0$ avec une base $\mathcal{B} = \{q_{M_0}^i\}_{0 \leq i \leq M_0-1}$. D'après le remarque 3.10, la formule voulue est un calcul direct. Ceci permet de montrer l'existence. Comme les $\{\tilde{\zeta}_M^i \tilde{q}_M^j\}_{i,j \in J}$ forment une base de $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ sur $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$, on n'a pas du choix pour la restriction de \mathbf{R}_M à $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ et donc aussi à $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}}}$ par continuité de \mathbf{R}_M et densité de $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ dans $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}}}$. La commutativité de \mathbf{R}_M et $\mathcal{G}_{\tilde{\mathfrak{K}}}$ vient de la formule de l'action de $\mathcal{G}_{\tilde{\mathfrak{K}}}$ sur les $\tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b$ et de celle de \mathbf{R}_M sur les $\tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b$. □

3.3. Une application logarithme log. On note $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ tels que $v_p(x^{(0)} - 1) > 0$.

Lemme 3.23. *Si $x \in U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, la série $\log[x] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}([x]-1)^n}{n}$ converge dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Ceci définit une unique application logarithme $x \mapsto \log[x]$ de $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, qui est un morphisme de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ -modules (i.e. $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$, et $\sigma(\log[x]) = \log[\sigma x]$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$).*

Démonstration. Si $x \in U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kv_p(x^{(0)} - 1) \geq 1$. On constate que $([x] - 1)^k - p\alpha$ appartient à $\text{Ker}\theta$, où $\alpha = \frac{(x^{(0)} - 1)^k}{p}$. Ceci implique que $([x] - 1)^k = p\alpha + \omega\beta$, où $\beta \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on a $n = km + r$ avec $0 \leq r \leq k - 1$ et

$$\frac{([x] - 1)^n}{n} = \frac{([x] - 1)^r (p\alpha + \omega\beta)^m}{n} = ([x] - 1)^r \sum_{i=0}^m (\omega\beta)^i \frac{\binom{m}{i} (p\alpha)^{m-i}}{km + r}.$$

Donc on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}([x] - 1)^n}{n} = \sum_{r=0}^{k-1} ([x] - 1)^r \sum_{i=0}^{+\infty} (\omega\beta)^i \sum_{m \geq i} \frac{\binom{m}{i} (p\alpha)^{m-i}}{km + r}.$$

D'autre part, on a

$$v_p\left(\binom{m}{i}\right) - v_p(km + r) + m - i \geq m - i - v_p(km + r) - v_p(i).$$

Si k est fixé et si m tend vers $+\infty$, alors $m - v_p(km + r)$ tend vers $+\infty$; ce qui montre que $\sum_{m \geq i} \frac{\binom{m}{i} (p\alpha)^{m-i}}{km + r}$ converge dans \mathbb{B}_{inf} et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}([x]-1)^n}{n}$ est donc convergente pour la topologie faible dans \mathbb{B}_{dR}^+ . La relation $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$ se déduit par un argument de séries formelles. □

On note $\bar{q} = (q, q^{\frac{1}{p}}, \dots) \in \mathbb{R}(\bar{\mathfrak{K}}^+)$; son représentant de Teichmüller est \tilde{q} . Il est évident que \bar{q} n'appartient pas à $\tilde{E}^+U_0(\bar{\mathfrak{K}}^+)$. On aimerait bien que l'application logarithme s'étend à $\tilde{E}^+U_0(\bar{\mathfrak{K}}^+) \times \bar{q}^{\mathbb{Q}}$. On a $\sigma\tilde{q} = \tilde{q}^{\zeta^{c_q(\sigma)}}$, où c_q est le 1-cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à q par la théorie de Kummer, et le minimum que l'on puisse demander à $u_q = \log \tilde{q}$ est de vérifier la formule $\sigma u_q = u_q + c_q(\sigma)t$, quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$. Mais on a le résultat suivant qui dit qu'il n'existe pas un élément u_q dans \mathbb{B}_{dR}^+ et, de plus, un tel u_q est transcendant sur \mathbb{B}_{dR}^+ .

Théorème 3.24. u_q est transcendant sur \mathbb{B}_{dR}^+ .

Démonstration. Supposons que u_q est algébrique sur \mathbb{B}_{dR}^+ . Soit $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{B}_{\text{dR}}^+[X]$ le polynôme minimal de u_q sur \mathbb{B}_{dR}^+ . Si $\sigma \in \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$, alors on a

$$0 = \sigma(P(X)) = (X + c_q(\sigma)t)^n + \sigma(a_1)(X + c_q(\sigma)t)^{n-1} + \dots + \sigma(a_n).$$

Comme $P(X)$ est le polynôme minimal de u_q , on a $\sigma(P(X)) = P(X)$. Ceci permet de déduire $\sigma(a_1) = a_1 - nc_q(\sigma)t$ et donc $\sigma(\frac{a_1}{n}) = \frac{a_1}{n} - c_q(\sigma)t$. Ceci n'est pas possible car il n'existe pas d'élément x de \mathbb{B}_{dR}^+ tel que, si $\sigma \in \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$, $\sigma x = x + c_q(\sigma)t$.

En effet, s'il existe un tel élément x dans \mathbb{B}_{dR}^+ , alors il est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}_M p^\infty}$ pour tous $M \geq 1$ et donc appartient à $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}_M p^\infty}} = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{\mathfrak{K}}_M^+)$. Appliquons la trace de Tate normalisée $\mathbf{R}_M : \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{\mathfrak{K}}_M^+) \rightarrow \bar{\mathfrak{K}}_M^+$ à x , et donc on obtient que $\mathbf{R}_M(x)$ appartient à $\bar{\mathfrak{K}}_M^+$ tel que

$$(3.2) \quad \sigma \mathbf{R}_M(x) = \mathbf{R}_M(x) + c_q(\sigma)t, \text{ pour tous } \sigma \in P_{\bar{\mathfrak{K}}},$$

Par ailleurs, la filtration sur \mathbb{B}_{dR}^+ est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$, alors on peut supposer $\mathbf{R}_M(x) = a_1 + a_2(\tilde{q}_M)t \pmod{t^2}$ avec $a_i \in \iota_{\text{dR}}(\bar{\mathfrak{K}}_M^+)$ pour $i = 1, 2$. On déduit la relation suivante de la formule (3.2) : $\sigma\theta(a_2\chi_{\text{cycl}}(\sigma)) = \theta(a_2) + c_q(\sigma)$ pour tout $\sigma \in P_{\bar{\mathfrak{K}}}$, ce qui est impossible car $\theta(a_2) \in \bar{\mathfrak{K}}_M^+$ n'a qu'un nombre fini de conjugués et $c_q(\sigma)$ prend un nombre d'infini de valeurs pour $\sigma \in U_m \subset P_{\bar{\mathfrak{K}}}$. □

Remarque 3.25. On peut montrer de la même manière que $\log t$ est transcendant sur \mathbb{B}_{dR}^+ .

On pose $\mathbb{B}_{\text{log}}^+ = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+[u_q]$ avec $\sigma(u_q) = u_q + c_q(\sigma)t$. Le groupe $U_0(\bar{\mathfrak{K}}^+) \times \bar{q}^{\mathbb{Q}}$ est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$ car $\sigma\bar{q} = \bar{q}(1, \zeta_p, \dots)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$. Alors l'application $\log \circ [\cdot]$ s'étend à $U_0(\bar{\mathfrak{K}}^+) \times \bar{q}^{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans $\mathbb{B}_{\text{log}}^+$ telle que $\log[\bar{q}^a] = au_q$ si $a \in \mathbb{Q}$, et $\sigma(\log x) = \log(\sigma x)$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\bar{\mathfrak{K}}}$. On pose

$$\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**} = \{x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(\bar{\mathfrak{K}}^+) : x_0 \in U_0(\bar{\mathfrak{K}}^+), x_k \in \mathbb{R}(\bar{\mathfrak{K}}^+) \text{ si } k \geq 1\}.$$

Proposition 3.26. (1) Si $1 + x \in \mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge dans \mathbb{B}_{dR}^+ .

(2) L'application $\log \circ [\cdot] : U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+) \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{log}}^+$ s'étend en une application $\log : \mathbb{A}_{\text{inf}}^{**} \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}^+[u_q]$ telle que

- $\log([x]) = \log[x], \log \tilde{q}^a = au_q$ si $a \in \mathbb{Q}$;
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$;
- $\log(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$, si la série converge.

De plus, on a $\sigma(\log x) = \log(\sigma x)$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\overline{\mathfrak{K}}}$.

Démonstration. (1) Si $1 + x \in \mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $x^k - p\alpha$, où $\alpha = [\frac{(\bar{x}^{(0)})^k}{p}]$, appartient à $\text{Ker}\theta$. Donc on a $x^k = p\alpha + \omega\beta$ avec $\beta \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$. Donc l'argument dans 3.23 s'adapte à montrer la convergence.

(2) Il suffit de montrer que $\log : \mathbb{A}_{\text{inf}}^{**} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{log}}^+$ est bien définie. Si $x_0 \in U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, alors $[x_0]$ est inversible dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$. Donc pour tout $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$, on a $x = [x_0](1 + pa)$ avec $a \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. On constate que

$$\log(1 + pa) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-pa)^n}{n}$$

converge dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Alors $\log x$ est bien défini par multiplicativité. \square

4. Cohomologie des représentations du groupe $P_{\overline{\mathfrak{K}}_M}$

Soit M un entier ≥ 1 et soit $m = v_p(M) \geq v_p(2p)$. Le corps \mathfrak{K}_{Mp^∞} est une extension galoisienne de \mathfrak{K}_M dont le groupe de Galois

$$P_{\overline{\mathfrak{K}}_M} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a = 1, c = 0, b \in p^m\mathbb{Z}_p, d \in 1 + p^m\mathbb{Z}_p \right\} =: P_m$$

est un groupe analytique p -adique de rang 2. Si g est l'élément de $P_{\overline{\mathfrak{K}}_M}$ correspondant à une matrice $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, l'action de g sur $\zeta_M^i q_M^j$ avec $(i, j) \in J \times J$ est donnée par la formule :

$$g(\zeta_M^i q_M^j) = \zeta_M^i q_M^j \zeta_{p^m}^{i(d-1)+jb}.$$

Si $u, v \in p^m\mathbb{Z}_p$, on pose (u, v) l'élément $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$ de P_m . La loi de groupe s'écrit alors sous la forme :

$$(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (e^{v_2}u_1 + u_2, v_1 + v_2).$$

Soient U_m et Γ_m les sous-groupes de P_m engendrés par $u_m = (p^m, 0)$ et $\gamma_m = (0, p^m)$ respectivement. Si $(u, 0) \in U_m$ et $(0, v) \in \Gamma_m$, on a $(0, v)(u, 0)(0, v)^{-1} = (e^{-v}u, 0) \in U_m$. Donc U_m est distingué dans P_m , et on a $\Gamma_m \cong P_m/U_m$. Ces deux sous-groupes U_m et Γ_m sont isomorphes à \mathbb{Z}_p ; ils sont donc de dimension cohomologique 1. Cela implique P_m est de dimension cohomologique ≤ 2 .

Si G est un groupe topologique, si V est une \mathbb{Q}_p -représentation de G , on note le groupe de cohomologie $H^i(G, V)$ la cohomologie continue de G à valeurs dans la représentation V . Si G est pro- p -cyclique, si g_0 est un générateur de G , on a [18, Prop. 1.6.13] :

$$(4.1) \quad H^1(G, V) \cong V/(g_0 - 1),$$

où un 1-cocycle $(g \mapsto c_g)$ est envoyé sur l'image de c_{g_0} dans $V/(g_0 - 1)$.

Lemme 4.1. *L'action \circ de Γ_m sur $V/((p^m, 0) - 1)$ induite par celle sur $H^1(U_m, V)$, est obtenue en tordant l'action originale $*$ sur V par le caractère $\gamma_m^a \mapsto e^{-ap^m}$, où $\gamma_m = (0, p^m)$. Plus précisément, si $x \in V/(u_m - 1)$ avec $u_m = (p^m, 0)$ et si $(0, v) \in \Gamma_m$,*

$$x \circ (0, v) = e^{-v}x * (0, v).$$

Démonstration. On démontre le lemme par le calcul suivant : si $(0, v) \in \Gamma_m$, on a

$$(c * (0, v))_{u_m} = c_{(0,v)u_m(0,v)^{-1}} * (0, v) = c_{(e^{-v}p^m, 0)} * (0, v) = c_{u_m^{e^{-v}}} * (0, v);$$

de plus, la formule de 1-cocycle et l'identité $c_{(p^m, 0)} * (p^m, 0) = c_{(p^m, 0)}$ dans $V/((p^m, 0) - 1)$, nous donnent $c_{u_m^a} = ac_{u_m}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$ et donc

$$\begin{aligned} c_{(p^m, 0)e^{-v}} * (0, v) - c_{(p^m, 0)} &= (e^{-v}c_{(p^m, 0)}) * (0, v) - c_{(p^m, 0)} \\ &= c_{(p^m, 0)} * (e^{-v}(0, v) - 1), \end{aligned}$$

où e^{-v} agit sur $c_{(p^m, 0)}$ par multiplication par e^{-v} . □

Lemme 4.2. *Soit V une \mathbb{Q}_p -représentation de P_m ; alors on a*

$$H^2(P_m, V) \cong V/((p^m, 0) - 1, (0, p^m) - e^{p^m}).$$

Démonstration. On a une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow U_m \rightarrow P_m \rightarrow \Gamma_m \rightarrow 1$$

et la dimension cohomologique de P_m est ≤ 2 . Donc la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit un isomorphisme :

$$H^2(P_m, V) \cong H^1(\Gamma_m, H^1(U_m, V)), \text{ où l'action de } \Gamma_m \text{ sur } H^1(U_m, V)$$

est donnée par

$$(u \mapsto c_u) \mapsto (u \mapsto (c * \gamma)_u := c_{\gamma u \gamma^{-1}} * \gamma).$$

Les U_m, Γ_m sont des groupes procycliques avec les générateurs $(p^m, 0)$ et $(0, p^m)$ respectivement. Soit $(u \mapsto c_u)$ un 1-cocycle représentant un élément c de $H^1(U_m, V)$. Alors, par l'isomorphisme (4.1), c a pour l'image $c_{(p^m, 0)}$ dans $V/((p^m, 0) - 1)$. D'après le lemme ci-dessus, l'action \circ de Γ_m sur

$V/(u_m - 1)$ induite par celle sur $H^1(U_m, V)$ est donnée par la formule : $x \circ (0, v) = e^{-v}x * (0, v)$. Donc on conclut par les isomorphismes suivants :

$$H^1(\Gamma_m, H^1(U_m, V)) \cong (V/(u_m - 1))/(\gamma_m - 1) \cong V/(u_m - 1, e^{-p^m} \gamma_m - 1). \quad \square$$

4.1. Cohomologie des représentations analytiques du groupe P_m .

Définition 4.3. Si $n \geq 1$, on note $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}_p^n$. On note $D(u, m)$ la boule fermée

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n, v_p(x - u) = \inf_{1 \leq i \leq n} v_p(x_i - u_i) \geq m\}.$$

Une fonction f sur $D(u, m)$ à valeurs dans \mathbb{C}_p est \mathbb{Q}_p -analytique s'il existe $\{a_i(f, u) \in \mathbb{Q}_p\}_{i \in \mathbb{N}^n}$ tels que $\lim_{i_1 + \dots + i_n \rightarrow +\infty} v_p(a_i(f, u)) + (\sum_{j=1}^n i_j)m = +\infty$ et $f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i(f, u)(x - u)^i$ quel que soit $x \in D(u, m)$.

On note $\mathcal{C}^{\text{an}}(D(0, m), \mathbb{Q}_p)$ l'anneau des fonctions \mathbb{Q}_p -analytiques sur la boule $D(u = 0, m)$. On définit une valuation v_0 sur $\mathcal{C}^{\text{an}}(D(0, m), \mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans \mathbb{Z} :

$$v_0 : \mathcal{C}^{\text{an}}(D(0, m), \mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Z}; v_0(\sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i(f)x^i) = \inf_{i \in \mathbb{N}^n} \{ \sum_{j=1}^n i_j | a_i(f) \neq 0 \}.$$

Cette valuation induit une filtration sur $\mathcal{C}^{\text{an}}(D(0, m), \mathbb{Q}_p)$: pour tous $k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Fil}^k \mathcal{C}^{\text{an}}(D(0, m), \mathbb{Q}_p) = \{f \in \mathcal{C}^{\text{an}}(D(0, m), \mathbb{Q}_p) : v_0(f) \geq k\}.$$

Si $m \geq v_p(2p)$ est un entier, on pose

$$P_m = \{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} | b \in p^m \mathbb{Z}_p, d \in 1 + p^m \mathbb{Z}_p \}.$$

C'est un groupe analytique p -adique compact. Si $u, v \in p^m \mathbb{Z}_p$, on note (u, v) l'élément $(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix})$ de P_m . La loi de groupe s'écrit alors sous la forme : $(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (e^{v_2}u_1 + u_2, v_1 + v_2)$.

Définition 4.4. (1) Une fonction f sur P_m à valeurs dans \mathbb{Q}_p est \mathbb{Q}_p -analytique s'il existe une fonction \mathbb{Q}_p -analytique \tilde{f} sur $D(0, m)$, telle que, $\forall u, v \in p^m \mathbb{Z}_p, f((\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix})) = \tilde{f}(u, v)$.

(2) Une représentation analytique V de P_m est un \mathbb{Q}_p espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de P_m , et les coordonnées de la matrice de $(u, v) \in P_m$ dans une base de V soient \mathbb{Q}_p -analytiques.

Soit V une représentation analytique de P_m . Comme V est une représentation analytique, on dispose des opérateurs $\partial_i : V \rightarrow V$, pour $i = 1, 2$, définis par :

$$(4.2) \quad x * (u, v) = x + u\partial_1 x + v\partial_2 x + O((u, v)^2),$$

où $O((u, v)^2)$ est une fonction analytique sur P_m de valuation ≥ 2 .

Lemme 4.5. *Ces opérateurs ont des propriétés de dérivations : si $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$, où V_1, V_2 sont des représentations analytiques de P_m , et si $i = 1, 2$, on a*

$$\partial_i(x_1 \otimes x_2) = (\partial_i x_1) \otimes x_2 + x_1 \otimes \partial_i x_2.$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in P_m$ et soient $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$. De la définition de ∂_i , on a

$$(x_1 \otimes x_2) * (u, v) = x_1 \otimes x_2 + u \partial_1(x_1 \otimes x_2) + v \partial_2(x_1 \otimes x_2) + O((u, v)^2).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes x_2) * (u, v) &= x_1 \otimes x_2 + u((\partial_1 x_1) \otimes x_2 + x_1 \otimes (\partial_1 x_2)) \\ &\quad + v((\partial_2 x_1) \otimes x_2 + x_1 \otimes (\partial_2 x_2)) + O((u, v)^2). \end{aligned}$$

On déduit les propriétés de dérivations de ∂_i pour $i = 1, 2$ en comparant les deux formules ci-dessus. \square

Soit $\gamma \in P_m$; l'image de la fonction analytique $\alpha_\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow P_m, \alpha_\gamma(x) = \gamma^x$ est un sous-groupe à un paramètre. Alors on peut définir une dérivation $\partial_\gamma : V \rightarrow V$ par rapport à α_γ par la formule : $\partial_\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x * \gamma^{p^n} - x}{p^n}$.

Lemme 4.6. *On a les relations suivantes :*

$$\partial_1 = p^{-m} \partial_{u_m}, \partial_2 - 1 = p^{-m} \partial_{e^{-p^m} \gamma_m}.$$

Démonstration. Soit $x \in V$. Par définition, on a

$$\partial_{u_m} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x * (p^m, 0)^{p^n} - x}{p^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x * (p^{m+n}, 0) - x}{p^n} = p^m \partial_1 x.$$

Alors $\partial_1 = p^{-m} \partial_{u_m}$. De la même manière, on a

$$\partial_2 = p^{-m} \partial_{\gamma_m} \text{ et } \partial_2 - 1 = p^{-m} \partial_{e^{-p^m} \gamma_m}.$$

\square

Remarque 4.7. Si V est une représentation analytique de P_m munie d'un \mathbb{Z}_p -réseau⁷ T tel que T est stable sous l'action de P_m , et si $x \in T$, alors du lemme précédent, on déduit

$$x * (u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^i v^j \frac{\partial_1^i \partial_2^j x}{i! j!}$$

avec $\frac{\partial_1^i \partial_2^j x}{i! j!} \in p^{-s(i+j)} T \subset p^{-m(i+j)} T$ pour certain $s < m$.

7. Il existe un tel réseau si m assez grand.

Si $x \in V$ est dans le noyau de l'opérateur $u_m - 1$ (resp. $e^{-p^m} \gamma_m - 1$) sur V , alors x est dans le noyau de l'opérateur $\partial_1 = p^{-m} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_m^{p^n} - 1}{p^n}$ (resp. $\partial_2 - 1$) sur V . Ceci nous fournit une application surjective naturelle :

$$\phi : V/(\partial_1, \partial_2 - 1) \rightarrow V/((p^m, 0) - 1, (0, p^m) - e^{p^m}).$$

Lemme 4.8. ϕ est un isomorphisme.

Démonstration. On est ramené à montrer que $\text{Ker} \partial_1 = \text{Ker}(u_m - 1)$ (resp. $\text{Ker}(\partial_2 - 1) = \text{Ker}(e^{-p^m} \gamma_m - 1)$). On a montré l'inclusion $\text{Ker}(u_m - 1) \subset \text{Ker} \partial_1$ (resp. $\text{Ker}(e^{-p^m} \gamma_m - 1) \subset \text{Ker}(\partial_2 - 1)$). Alors il reste à montrer l'inclusion inverse.

Soit $x \in \text{Ker} \partial_1$. Comme on a $\partial_1 u_m = u_m \partial_1$, l'espace $\text{Ker} \partial_1$ est stable sous l'action de u_m . De plus, il existe une base S de $\text{Ker} \partial_1$ telle que la matrice de u_m peut se mettre sous la forme de Jordan. Soit λ une valeurs propre de $u_m|_{\text{Ker} \partial_1}$. Comme V est une représentation analytique de P_m , λ^x est une fonction analytique sur \mathbb{Z}_p . Comme la matrice de ∂_1 dans cette base est 0, on a $\log \lambda = 0$. Ceci implique que λ est une racine de l'unité ζ . De plus, ζ^x est une fonction analytique en variable x sur \mathbb{Z}_p si et seulement si $\zeta = 1$. Donc la matrice de u_m dans la base S est unipotente et on peut supposer qu'elle est de la forme $I + A$ avec A une matrice nilpotente.

Comme $\partial_1 = 0$ sur $\text{Ker} \partial_1$, on a $\log(I + A) = 0$. D'autre part, on a $\log(I + A) = A(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-A)^n}{(n+1)!})$, où $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-A)^n}{(n+1)!}$ est une somme finie. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-A)^n}{(n+1)!}$ est inversible, on obtient $A = 0$. Ceci équivaut à la condition $\text{Ker} \partial_1 \subset \text{Ker}(u_m - 1)$. De la même manière, on obtient $\text{Ker}(\partial_2 - 1) \subset \text{Ker}(e^{-p^m} \gamma_m - 1)$. \square

Par conséquent, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.9. On a un isomorphisme naturel

$$(4.3) \quad H^2(P_m, V) \cong V/(\partial_1, \partial_2 - 1).$$

Rappelons que le groupe de cohomologie $H^2(P_m, V)$ est la cohomologie continue d'un groupe p -adique à valeurs dans la représentation analytique V . On pose $\mathcal{C}^0(P_m, V) = V$ et note $\mathcal{C}^n(P_m, V)$ le groupe des homomorphismes continus de P_m^n à valeurs dans V . On peut le calculer par le complexe nonhomogène \mathcal{C}^\bullet des cochaines continues

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(P_m, V) \xrightarrow{d_0} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{C}^{n-1}(P_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{C}^n(P_m, V) \longrightarrow \dots,$$

avec les différentielles d_n données par les formules

$$\begin{aligned} (d_n f)(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) &= f(\gamma_2, \dots, \gamma_n) * \gamma_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(\gamma_1, \dots, \gamma_n). \end{aligned}$$

Comme V est une représentation analytique, le complexe \mathcal{C}^\bullet des cochaines continues contient un sous-complexe $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$ des cochaines analytiques avec les mêmes différentielles :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{an},0} \xrightarrow{d_0} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{C}^{\text{an},n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{C}^{\text{an},n} \longrightarrow \dots ,$$

où $\mathcal{C}^{\text{an},0} = V$ et $\mathcal{C}^{\text{an},n}$ est le sous-module des fonctions analytiques sur \mathbb{P}_m^n à valeurs dans V de $\mathcal{C}^n(\mathbb{P}_m, V)$. En particulier, tout élément de $\mathcal{C}^{\text{an},2}(\mathbb{P}_m, V)$ peut s'écrire sous la forme :

$$c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i,j,k,l \geq 0} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l, \text{ avec } c_{i,j,k,l} \in V.$$

La filtration sur $\mathcal{C}^{\text{an},n}(D(0, m), \mathbb{Q}_p)$ définie par la valuation v_0 induit celle sur le complexe $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$. Quel que soit $k \geq 1$, on a

$$\text{Fil}^0 \mathcal{C}^{\text{an},\bullet} / \text{Fil}^k \mathcal{C}^{\text{an},\bullet} \cong \mathcal{P}^{\leq k,\bullet}, \text{ où } \mathcal{P}^{\leq k,\bullet} \text{ est le complexe}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_{\leq k}^0 \xrightarrow{d_0} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{P}_{\leq k}^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{P}_{\leq k}^n \longrightarrow \dots ,$$

où $\mathcal{P}_{\leq k}^i$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq k$ sur \mathbb{P}_m^i à coefficients dans V et les différentielles sont ceux du complexe $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$ modulo les termes de valuation $> k + 1$.

Considérons le complété du complexe $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$ pour sa filtration au-dessus, on obtient un complexe \mathcal{S}^\bullet suivant :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^0(\mathbb{P}_m, V) \xrightarrow{d_0} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{S}^{n-1}(\mathbb{P}_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{S}^n(\mathbb{P}_m, V) \longrightarrow \dots ,$$

où $\mathcal{S}^i(\mathbb{P}_m, V)$ l'ensemble des séries formelles sur \mathbb{P}_m^i à coefficients dans V et les différentielles sont celles du complexe $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$. Alors $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$ est un sous-complexe du complexe \mathcal{S}^\bullet .

On note $H^{\text{an},i}(\mathbb{P}_m, V)$ le groupe de cohomologie calculé par le complexe $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$. La proposition suivante montre que le sous-complexe $\mathcal{C}^{\text{an},\bullet}$ calcule le groupe de cohomologie $H^2(\mathbb{P}_m, V)$:

Proposition 4.10. *Soit V une représentation analytique de \mathbb{P}_m . Alors*

- (1) *tout élément de $H^2(\mathbb{P}_m, V)$ est représentable par un 2-cocycle analytique ;*
- (2) *l'image d'un 2-cocycle analytique,*

$$((u, v), (x, y)) \rightarrow c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l \geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

sous l'isomorphisme (4.9) est aussi celle de $\delta^{(2)}(c_{(u,v),(x,y)}) = c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0}$ dans $\frac{V}{(\partial_1, \partial_2 - 1)}$.

Par l'isomorphisme (4.9), il suffit de montrer le (2) et montrer que l'application

$$\delta^{(2)} : \{2\text{-cocycle analytique}\} \rightarrow V$$

induit une surjection de $H^{an,2}(P_m, V) \rightarrow V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$.

La démonstration de la proposition (4.10) se sépare en trois étapes :

(1) On calcule la cohomologie $H^2(\mathcal{P}^{\leq k, \bullet})$. On est ramené à étudier la cohomologie des complexes quotient $Fil^i \mathcal{C}^{an, \bullet} / Fil^{i+1} \mathcal{C}^{an, \bullet}$:

$$\mathcal{P}^{i, \bullet} : 0 \longrightarrow \mathcal{P}_i^0(P_m, V) \xrightarrow{d_0} \dots \mathcal{P}_i^{n-1}(P_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{P}_i^n(P_m, V) \longrightarrow \dots,$$

où \mathcal{P}_i^n est l'ensemble des polynômes homogènes de degré i sur P_m^n à coefficients dans V . C'est le sujet du lemme 4.12.

(2) On montre que, soit

$$c_{(u,v),(x,y)} : ((u, v), (x, y)) \rightarrow c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l>0} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$$

un 2-cocycle du complexe \mathcal{S}^\bullet , alors $c_{(u,v),(x,y)} - (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$ est un 2-cobord du complexe \mathcal{S}^\bullet (c.f. lemme 4.13). En effet, l'étape (1) nous permet de montrer le résultat à la main.

(3) On montre que, quel que soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle analytique dans $\mathcal{C}^{an, \bullet}$

$$((u, v), (x, y)) \rightarrow c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l>0} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

alors $c_{(u,v),(x,y)} - (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$ est un cobord analytique. En effet, on peut contrôler le 2-cobord dans l'étape (2), ce qui permet de montrer qu'il est un 2-cobord analytique.

Tout d'abord, on fait une remarque sur la relation de 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n, \bullet}$. Soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n, \bullet}$, par définition il vérifie la relation :

$$c_{(x,y),(\alpha,\beta)} * (u, v) - c_{(u,v),(x,y),(\alpha,\beta)} + c_{(u,v),(x,y)(\alpha,\beta)} - c_{(u,v),(x,y)} \equiv 0 \pmod{Fil^{n+1} \mathcal{C}^{an,3}}.$$

La loi de groupe de P_m devient simplement :

$$c_{(u,v),(x,y),(\alpha,\beta)} = c_{(u+v,v+y),(\alpha,\beta)}.$$

De plus, soit $(u_i, v_i) \in P_m$ pour $i = 1, 2, 3$; si $f((u_2, v_2), (u_3, v_3))$ est un polynôme homogène de degré n à valeurs dans V , alors il est de la forme

$$\sum_{i+j+k+l=n} a_{i,j,k,l} u_2^i v_2^j u_3^k v_3^l \text{ avec } a_{i,j,k,l} \in V \text{ et } (u_1, v_1) \text{ agit sur } f \text{ à travers}$$

l'action de P_m sur V :

$$(4.4) \quad \left(\sum_{i+j+k+l=n} a_{i,j,k,l} u_2^i v_2^j u_3^k v_3^l \right) * (u_1, v_1) = \sum_{i+j+k+l=n} a_{i,j,k,l} * (u_1, v_1) u_2^i v_2^j u_3^k v_3^l.$$

Comme l'action de (u_1, v_1) sur les coefficients $a_{i,j,k,l}$ se factorise à travers les opérateurs ∂_1 et ∂_2 dans la formule (4.2), l'action de (u_1, v_1) est triviale dans la formule (4.4). Donc, la relation de 2-cocycle ainsi que celle de 2-cobord dans $\mathcal{P}^{n,\bullet}$ se simplifient

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & c_{(x,y),(\alpha,\beta)} - c_{(u+x,v+y),(\alpha,\beta)} + c_{(u,v),(x+\alpha,y+\beta)} - c_{(u,v),(x,y)} = 0; \\ & (dQ)_{(u,v),(x,y)} = Q_{(u,v)} - Q_{(u+x,v+y)} + Q_{(x,y)}, \text{ où } Q \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{P}_m, V). \end{aligned}$$

Définition 4.11. On dira qu'un polynôme

$$P((u,v),(x,y)) = \sum_{i+j+k+l=n} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l \in \mathcal{P}_n^2$$

est de valuation faible m si $m = \min\{i+j, k+l : c_{i,j,k,l} \neq 0\}$.

Si $n \geq 2$, soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$. On note la dérivation en la i -ième variable par D_i pour $1 \leq i \leq 4$.

Lemme 4.12. (1) Si $n = 1$, alors tout 2-cocycle de $\mathcal{P}^{1,\bullet}$ est nul.
 (2) Si $n = 2$, tout 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{2,\bullet}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l=2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

où c_{ijkl} sont dans V . Alors, son image dans le groupe de cohomologie $H^2(\mathcal{P}^{2,\bullet})$ est aussi celle de $(c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$.

(3) Si $n \geq 3$, le groupe de cohomologie $H^2(\mathcal{P}^{n,\bullet})$ est nul. En particulier, si

$$c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l=n} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$$

est un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$, alors le polynôme homogène de degré n

$$Q(X, Y) =$$

$$\frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0}X^n + c_{0,n-1,0,1}Y^n) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} c_{n-k-1,k,0,1} X^{n-k-1} Y^{k+1}$$

vérifie la relation $c = -dQ$.

Démonstration. (1) Si $n = 1$, un 2-cocycle $c_{(u,v),(x,y)}$ de $\mathcal{P}^{1,\bullet}$ s'écrit sous la forme $a_1u + a_2v + a_3x + a_4y$ avec $a_i \in V$ pour $1 \leq i \leq 4$. Alors la relation de 2-cocycle (4.5) se traduit en la relation : $a_1x + a_2y + a_3\alpha + a_4\beta = 0$, ce qui implique $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

(2) Si $n = 2$, soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{2,\bullet}$. Alors, $c_{(u,v),(x,y)}$ peut se ranger par la valuation faible sous la forme :

$$c_{(u,v),(x,y)} = P_{01}(u, v) + P_{02}(x, y) + P_1(u, v, x, y),$$

où $P_{01}(u, v) = c_u u^2 + c_v v^2 + c_{uv} uv$, $P_{02}(x, y) = c_x x^2 + c_y y^2 + c_{xy} xy$ sont de valuation faible 0, et $P_1(u, v, x, y) = \sum_{\substack{i+j+k+l=2 \\ (i,j) \neq (0,0), (k,l) \neq (0,0)}} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$ est de valuation faible 1.

Pour les termes $c_{1,0,1,0} ux + c_{0,1,0,1} vy$ et $c_{1,0,0,1} uy + c_{0,1,1,0} vx$, on pose $Q_{21}(x, y) = \frac{1}{2}(c_{1,0,1,0} x^2 + c_{0,1,0,1} y^2)$ et $Q_{22}(x, y) = c_{0,1,1,0} xy$ dans \mathcal{P}_2^1 respectivement. Donc on a

$$\begin{aligned} Q_{21}(u + x, v + y) - Q_{21}(u, v) - Q_{21}(x, y) &= c_{1,0,1,0} ux + c_{0,1,0,1} vy; \\ Q_{22}(u + x, v + y) - Q_{22}(x, y) - Q_{22}(u, v) &= c_{0,1,1,0}(uy + vx). \end{aligned}$$

On pose $Q_2 = Q_{21} + Q_{22}$ et alors

$$c_{(u,v),(x,y)} = P_{01}(u, v) + P_{02}(x, y) - dQ_2 + (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy.$$

Par ailleurs, $(c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$ est un 2-cocycle. On peut alors supposer que le 2-cocycle $c_{(u,v),(x,y)}$ est de la forme $P_{01}(u, v) + P_{02}(x, y)$. La relation de 2-cocycle (4.5) nous fournit la relation suivante :

$$P_{01}(x, y) - P_{01}(u + x, v + y) + P_{02}(x + \alpha, y + \beta) - P_{02}(x, y) = 0.$$

Si on évalue en $(x, y) = (0, 0)$, alors on a $-P_{01}(u, v) + P_{02}(\alpha, \beta) = 0$, cela implique que $P_{01} = P_{02} = 0$.

(3) Si $n \geq 3$, La relation de 2-cocycle (4.5) nous dit que la fonction analytique dans six variables

$$g(u, v, x, y, \alpha, \beta) = c_{(x,y),(\alpha,\beta)} - c_{(u+x,v+y),(\alpha,\beta)} + c_{(u,v),(x+\alpha,y+\beta)} - c_{(u,v),(x,y)}$$

est identiquement nulle. En développant cette fonction g dans les variables (u, v) , on obtient :

$$\begin{aligned} &- u(D_1 c)_{(x,y),(\alpha,\beta)} - v(D_2 c)_{(x,y),(\alpha,\beta)} + u(D_1 c)_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)} \\ &+ v(D_2 c)_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)} + c_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)} - c_{(0,0),(x,y)} \\ &- u(D_1 c)_{(0,0),(x,y)} - v(D_2 c)_{(0,0),(x,y)} + O((u, v)^2), \end{aligned}$$

où $O((u, v)^2)$ note les termes de valuation faible ≥ 2 dans les variables (u, v) . Alors, pour $i = 1, 2$, on a

$$(4.6) \quad (D_i c)_{(x,y),(\alpha,\beta)} = (D_i c)_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)} - (D_i c)_{(0,0),(x,y)}.$$

De la même manière, si on développe la fonction g dans les variables (α, β) , on obtient les relations suivantes pour $j = 3, 4$:

$$(D_j c)_{(u,v),(x,y)} = (D_j c)_{(u+x,v+y),(0,0)} - (D_j c)_{(x,y),(0,0)}.$$

On pose deux polynômes homogènes de degré $n - 1 \geq 2$ dans les variables (X, Y) :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} Q_X(X, Y) &= (D_1c)_{(0,0),(X,Y)} = \sum_{1+k+l=n} c_{1,0,k,l} X^k Y^l; \\ Q_Y(X, Y) &= (D_4c)_{(X,Y),(0,0)} = \sum_{1+i+j=n} c_{i,j,0,1} X^i Y^j. \end{aligned}$$

Ensuite, on développe la fonction g dans les variables (u, v, α, β) et on obtient

$$\begin{aligned} &- u((D_1c)_{(x,y),(0,0)} + \alpha(D_3D_1c)_{(x,y),(0,0)} + \beta(D_4D_1c)_{(x,y),(0,0)}) \\ &- v((D_2c)_{(x,y),(0,0)} + \alpha(D_3D_2c)_{(x,y),(0,0)} + \beta(D_4D_2c)_{(x,y),(0,0)}) + O((\alpha, \beta)^2) \\ &+ \alpha((D_3c)_{(0,0),(x,y)} + u(D_1D_3c)_{(0,0),(x,y)} + v(D_2D_3c)_{(0,0),(x,y)}) \\ &+ \beta((D_4c)_{(0,0),(x,y)} + u(D_2D_4c)_{(0,0),(x,y)} + v(D_2D_4c)_{(0,0),(x,y)}) + O((u, v)^2). \end{aligned}$$

Les coefficients des termes $u, v, \alpha, \beta, u\alpha, u\beta, v\alpha$ et $v\beta$ nous donnent les relations :

$$(4.8) \quad (D_1c)_{(x,y),(0,0)} = (D_2c)_{(x,y),(0,0)} = (D_3c)_{(0,0),(x,y)} = (D_4c)_{(0,0),(x,y)} = 0;$$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} (D_3D_1c)_{(x,y),(0,0)} &= (D_1D_3c)_{(0,0),(x,y)}; (D_4D_1c)_{(x,y),(0,0)} = (D_1D_4c)_{(0,0),(x,y)}; \\ (D_3D_2c)_{(x,y),(0,0)} &= (D_2D_3c)_{(0,0),(x,y)}; (D_4D_2c)_{(x,y),(0,0)} = (D_2D_4c)_{(0,0),(x,y)}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\partial_Y Q_X(X, Y) = (D_4D_1c)_{(0,0),(X,Y)} = (D_1D_4c)_{(X,Y),(0,0)} = \partial_X Q_Y(X, Y).$$

Par ailleurs, on a $Q_X(0, 0) = Q_Y(0, 0) = 0$. On en déduit qu'il existe un polynôme $Q(X, Y)$ homogène de degré n tel que $\partial_X Q = Q_X$ et $\partial_Y Q = Q_Y$:

$$Q(X, Y) = \frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0} X^n + c_{0,n-1,0,1} Y^n) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{c_{n-k-1,k,0,1}}{k+1} X^{n-k-1} Y^{k+1}.$$

Ceci nous donne un cobord

$$dQ(x, y, \alpha, \beta) = Q(x, y) - Q(x + \alpha, y + \beta) + Q(\alpha, \beta)$$

vérifiant la relation $D_1c = -D_1dQ$ et $D_4c = -D_4dQ$.

Le 2-cocycle $c'_{(x,y),(\alpha,\beta)} = (c + dQ)_{(x,y),(\alpha,\beta)}$ vérifie la relation

$$D_1c' = D_4c' = 0,$$

ce qui montre que c' est de la forme $\sum_{j+k=n} c_{j,k} y^j \alpha^k$. Par ailleurs, on a

$$(D_2c')_{(x,y,\alpha,\beta)} = \sum_{j+k=n} j c_{j,k} y^{j-1} \alpha^k;$$

$$(D_2c')_{(0,0,x+\alpha,v+\beta)} = c_{1,n-1}(x + \alpha)^{n-1}; (D_2c')_{(0,0,x,y)} = c_{1,n-1}x^{n-1}.$$

On déduit que $c_{j,k} = 0$ si $j \neq 0$, par la relation (4.6). Alors on a $c'_{(x,y,\alpha,\beta)} = c_{0,n}\alpha^n$. Enfin, la relation (4.8) nous permet de conclure que tout 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$ pour $n \geq 3$ n'a pas les termes de valuation faible 0. Alors on conclut que le 2-cocycle c est nul. □

Lemme 4.13. *Soit V une représentation analytique de P_m .*

(1) *Quel que soit $c \in V$, la fonction $((u, v), (x, y)) \rightarrow c_{(u,v),(x,y)} = cuy$ est un 2-cocycle. Réciproquement, tout élément de la cohomologie $H^2(\mathcal{S}^\bullet)$ est présenté par un 2-cocycle de cette forme.*

(2) *Si $c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l \geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$ est un 2-cocycle analytique, alors il existe une suite de polynôme homogènes $\{Q_n \in \mathcal{P}_1^n, n \geq 2\}$ telle que*

$$c_{(u,v),(x,y)} = (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy - \sum_{i=2}^{+\infty} dQ_i,$$

où Q_n est défini par récurrence :

$$Q_2(X, Y) = \frac{1}{2}(c_{1,0,1,0}X^2 + c_{0,1,0,1}Y^2) + c_{0,1,1,0}XY$$

et si $Q_n(X, Y) = \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} X^{n-k} Y^k$, alors

$$(4.10) \quad \begin{aligned} b_n^{(n)} &= \frac{1}{n}c_{0,n-1,0,1}, b_0^{(n)} = \frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0} - \partial_1 b_0^{(n-1)}), \\ b_k^{(n)} &= \frac{1}{k}(c_{n-k,k-1,0,1} - (n-k)b_{k-1}^{(n-1)}), \text{ si } 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

Démonstration. La première assertion est une conséquence directe de la deuxième. Il suffit de montrer la (2). Soit

$$c_{((u,v),(x,y))} = \sum_{i+j+k+l \geq 1} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$$

un 2-cocycle du complexe \mathcal{S}^\bullet .

D'après le lemme 4.12, par récurrence, il existe une suite de polynômes homogènes $\{Q_n \in \mathcal{P}_n^1\}_{n \geq 3}$ telle que l'on peut écrire c sous la forme

$$(c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy - \sum_{i=2}^{n-1} dQ_i + P_n, \text{ où } P_n = \sum_{i+j+k+l \geq n} c_{i,j,k,l}^{(n)} u^i v^j x^k y^l$$

est une fonction analytique sur P_m^2 de valuation $\geq n$. On s'intéresse aux coefficients $c_{n-k-1,k,0,1}^{(n)}$ et $c_{1,0,n-1,0}^{(n)}$ dans P_n pour $0 \leq k \leq n-1$.

Par ailleurs, les termes de degré n dans P_n provenant du cobord dQ_e avec $2 \leq e \leq n-1$ sont dans les termes $\sum_{i+j+e \geq n} u^i v^j \frac{\partial_1^i \partial_2^j Q_e(x,y)}{i!j!}$ et $\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l!} ((e^y - 1)u)^l \partial_X^l Q_e(X, Y)|_{u+x, v+y}$ par la relation de 2-cobord

$$(dQ_e)_{(u,v),(x,y)} = Q_e(x, y) * (u, v) - Q_e(e^y u + x, v + y) + Q_e(u, v),$$

l'action de (u, v) sur $Q_e(x, y)$ et les égalités

$$Q_e(e^y u + x, v + y) = Q_e(u + x, v + y) + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l!} ((e^y - 1)u)^l \partial_X^l Q_e(X, Y)|_{u+x, v+y}.$$

Si $Q_n(X, Y) = \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} X^{n-k} Y^k$, on a la relation de récurrence pour $c_{n-k-1, k, 0, 1}^{(n)}$ et $c_{1, 0, n-1, 0}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} c_{0, n-1, 0, 1}^{(n)} &= c_{0, n-1, 0, 1}, c_{1, 0, n-1, 0}^{(n)} = c_{1, 0, n-1, 0} - \partial_1 b_0^{(n-1)} \\ c_{n-k-1, k, 0, 1}^{(n)} &= c_{n-k-1, k, 0, 1} - (n-k-1)b_k^{(n-1)}, \text{ si } 0 \leq k \leq n-2 \end{aligned}$$

D'après le lemme (4.12), on a donc

$$Q_n(X, Y) = \frac{1}{n} c_{1, 0, n-1, 0}^{(n)} X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} c_{n-k-1, k, 0, 1}^{(n)} X^{n-k-1} Y^{k+1}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} b_n^{(n)} &= \frac{1}{n} c_{0, n-1, 0, 1}^{(n)} = \frac{1}{n} c_{0, n-1, 0, 1}, \\ b_0^{(n)} &= \frac{1}{n} c_{1, 0, n-1, 0}^{(n)} = \frac{1}{n} (c_{1, 0, n-1, 0} - \partial_1 b_0^{(n-1)}), \\ b_k^{(n)} &= \frac{1}{k} c_{n-k, k-1, 0, 1}^{(n)} = \frac{1}{k} (c_{n-k, k-1, 0, 1} - (n-k)b_{k-1}^{(n-1)}), \text{ si } 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

□

Soit V une représentation analytique de P_m munie d'un \mathbb{Z}_p -réseau T qui est stable sous l'action de P_m . On définit une valuation v_T sur V par rapport à T :

$$\text{si } x \in V, v_T(x) = \min\{n : x \in p^n T\}.$$

Soit $x \in T$ et soit $(u, 0) \in P_m$; on a $x * (u, 0) = x + u\partial_1 x + O(u^2)$ et on a donc $\partial_1 x \in p^{-m}T$.

Lemme 4.14. *Soit V une représentation analytique de P_m munie d'un \mathbb{Z}_p -réseau T qui est stable sous l'action de P_m . Soit*

$$c = \sum_{i+j+k+l \geq 2} c_{ijkl} u^i v^j x^k y^l$$

un 2-cocycle analytique du complexe $\mathcal{C}^{\text{an}, \bullet}$ avec $v_T(c_{i,j,k,l}) \geq -m(i+j+k+l)$.

Si $\{Q_n(x, y) = \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} x^{n-k} y^k \in \mathcal{P}_n^1\}$ est la suite de polynômes homogènes construite dans le lemme précédent, pour tous $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$, on a

$$v_T(b_k^{(n)}) \geq -mn - v_p(n!).$$

Démonstration. Si $n = 2$, le lemme est vrai par la formule explicite de $Q_2(x, y)$. La relation de récurrence (4.10) de $b_k^{(n)}$ nous donne la relation suivante :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} b_n^{(n)} &= \frac{1}{n} c_{0,n-1,0,1}; b_0^{(n)} = \frac{1}{n} (c_{1,0,n-1,0} - \partial_1 b_0^{(n-1)}); \\ b_{n-1}^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(-1)^i}{(n-1) \cdots (n-1-i)} c_{1,n-2-i,0,1} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} b_1^{(2)}; \\ b_k^{(n)} &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-n)^i}{k \cdots (k-i)} c_{n-k,k-1-i,0,1} + \frac{(k-n)^k}{k!} b_0^{(n-k)}, \text{ si } 1 \leq k \leq n-2. \end{aligned}$$

On en déduit que le lemme est vrai pour $b_n^{(n)}$.

On montre par récurrence que $v_T(b_0^{(n)}) \geq -nm - v_p(n!)$ pour tous $n \geq 2$. Supposons $v_T(b_0^{(e)}) \geq -em - v_p(e!)$ pour $2 \leq e \leq n-1$. On a

$$v_T(\partial_1 b_0^{(n-1)}) \geq -nm - v_p((n-1)!)$$

car $v_T(\partial_1 x) \geq v_T(x) - m$. On déduit de la relation de récurrence $b_0^{(n)} = \frac{1}{n} (c_{1,0,n-1,0} - \partial_1 b_0^{(n-1)})$, que $v_T(b_0^{(n)}) \geq -nm - v_p(n!)$ pour tous $n \geq 2$. On a donc, si $1 \leq k \leq n-2$,

$$v_T\left(\frac{(k-n)^k}{k!} b_0^{(n-k)}\right) \geq -m(n-k) - v_p((n-k)!) - v_p(k!) \geq -mn - v_p(n!).$$

Par ailleurs, on a $v_p\left(\frac{(k-n)^i}{k \cdots (k-i)} c_{n-k,k-1-i,0,1}\right) \geq -m(n-i) - v_p(k!)$ pour tous $1 \leq i \leq k-1$. On en déduit que, $v_T(b_k^{(n)}) \geq -mn - v_p(n!)$, si $1 \leq k \leq n-2$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} v_T(b_{n-1}^{(n)}) &\geq \inf_{1 \leq i \leq n-3} \left\{ v_p\left(\frac{(-1)^i}{(n-1) \cdots (n-1-i)} c_{1,n-2-i,0,1}\right), v_T\left(\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} b_1^{(2)}\right) \right\} \\ &\geq -mn - v_p(n!). \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure le lemme. □

On revient à la démonstration de la proposition (4.10) :

Soit $c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l \geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$ un 2-cocycle analytique du complexe $\mathcal{C}^{\text{an}, \bullet}$. Il existe une constante N assez grande telle que $p^N c_{i,j,k,l} \in p^{-(m-1)(i+j+k+l)} T$ pour tout i, j, k, l . Alors, on peut remplacer $c_{(u,v),(x,y)}$ par un 2-cocycle vérifiant la condition du lemme 4.14. Donc il existe une série de polynômes homogènes $\{Q_n(x, y) = \sum_{i=0}^n b_i^{(n)} x^i y^{n-i} \in \mathcal{P}_n^1\}_{n \geq 2}$ telle que $v_T(b_i^{(n)}) \geq -mn - v_p(n!) > -(m + v_p(2p))n$ et $c_{(u,v),(x,y)} =$

$(c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy - \sum_{i=2}^{+\infty} dQ_i$. Par conséquent, la série $\sum_{n=2}^{+\infty} Q_n(u, v)$ converge vers une fonction analytique $Q(u, v)$ sur $P_{m+v_p(2p)}$.

Par la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = H^p(P_m/P_{m+v_p(2p)}, H^q(P_{m+v_p(2p)}, V)) \Rightarrow H^{p+q}(P_m, V),$$

on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1^2 \longrightarrow H^2(P_m, V) \longrightarrow H^2(P_{m+v_p(2p)}, V),$$

où H_1^2 est muni d'une filtration $0 \rightarrow H_2^2 \rightarrow H_1^2$ telle que $H_i^2/H_{i+1}^2 \cong E_2^{i,2-i}$. Comme $H^j(P_{m+v_p(2p)}, V)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{Q}_p de dimension finie et $P_m/P_{m+v_p(2p)}$ est un groupe fini d'ordre p^2 , on obtient $H^i(P_m/P_{m+v_p(2p)}, H^j(P_{m+v_p(2p)}, V)) = 0$, pour tout $i \geq 0$. Ceci implique que $H_1^2 = 0$. Autrement dit, l'application de restriction est injective. L'argument ci-dessus donne que $c_{((u,v),(x,y))} - (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$ est nul sous l'application de restriction. Donc

$$c_{((u,v),(x,y))} = (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy \in H^2(P_m, V).$$

Enfin, comme uy est un 2-cocycle, on peut prendre n'importe quel coefficient $c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0} \in V$. Donc tout élément de $V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$ est représentable par un 2-cocycle analytique.

4.2. Cohomologie des $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ -représentations du groupe $P_{\mathfrak{K}_M}$.

Proposition 4.15. *Soit $M \geq 1$ un entier tel que $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$; soit V une \mathbb{Q}_p -représentation de $P_{\mathfrak{K}_M}$ munie d'un \mathbb{Z}_p -réseau T tel que $P_{\mathfrak{K}_M}$ agit trivialement sur $T/2pT$, alors, pour $i \in \mathbb{N}$, T_M induit un isomorphisme :*

$$T_M : H^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \otimes V) \cong H^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{K}_M^+ \otimes V).$$

Pour démontrer cette proposition, on a besoin de lemmes préparatoires :

On a une décomposition $\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) = \mathfrak{K}_M^+ \oplus X_M$ comme \mathfrak{K}_M^+ -module de Banach, où $X_M = \{x \in \mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \mid \text{Tr}_M(x) = 0\}$. On note $J' = \cup_n \frac{1}{p^n} \mathbb{N}$. D'après le corollaire 3.7, un élément x de X_M s'écrit de manière unique sous la forme

$$(4.12) \quad x = \sum_{(i,j) \notin (0,\mathbb{N}), (i,j) \in J \times J'} a_{ij}(x) \zeta_M^i q_M^j,$$

où $a_{ij}(x)$ est une suite d'éléments de F_M vérifiée que $v_p(a_{ij}(x)) + \frac{j}{M}$ tend vers $+\infty$ à l'infini (i.e. $\forall N > 0$, l'ensemble de $(i, j) \in J \times J'$ tel que $v_p(a_{ij}(x)) + \frac{j}{M} \leq N$ est un ensemble fini).

Lemme 4.16. (1) Un élément $x \in X_M^{U_m}$ si et seulement si $a_{ij}(x) = 0$ pour tout $j \notin \mathbb{N}$;

(2) On a une décomposition $X_M = X_M^{U_m} \oplus Y_M$ comme \mathfrak{K}_M^+ -module de Banach, où

$$Y_M = \{x = \sum_{(i,j) \in J \times (J' - \mathbb{N})} a_{ij}(x) \zeta_M^i q_M^j\} \subset X_M.$$

Démonstration. On déduit les résultats du corollaire 3.7. □

Soit e_1, \dots, e_d une \mathbb{Z}_p -base de T . Tout élément $x \in X_M \otimes T$ s'écrit uniquement sous la forme $\sum_{i=1}^d x_i \otimes e_i$ avec $x_i \in X_M$. On définit une valuation v sur $X_M \otimes T$ par la formule : $v(x) = \inf_{1 \leq i \leq d} v_p(x_i)$.

Lemme 4.17. Il existe des isomorphismes de \mathfrak{K}_M^+ -modules :

- (1) $(X_M \otimes T)^{U_m} \cong (X_M^{U_m} \otimes T)^{U_m} \cong X_M^{U_m} \otimes T^{U_m}$;
- (2) $Z_M := (X_M^{U_m} \otimes T)/(u_m - 1) \cong H^1(U_m, X_M \otimes T)$.

Démonstration. On se ramène à montrer que l'opérateur $u_m - 1$ est inversible sur le \mathfrak{K}_M^+ -module $Y_M \otimes T$. On a la formule explicite de $u_m - 1$ sur

$$x = \sum_{(i,j) \in J \times (J' - \mathbb{N})} a_{ij}(x) \zeta_M^i q_M^j \in Y_M :$$

$$(u_m - 1)(x) = \sum_{(i,j) \in J \times (J' - \mathbb{N})} a_{ij}(x) \zeta_M^i (\zeta_{p^m}^{jp^m} - 1) q_M^j.$$

Comme $0 \leq v_p(\zeta_{p^m}^{jp^m} - 1) < \frac{1}{p-1}$, $\sum_{(i,j) \in J \times (J' - \mathbb{N})} a_{ij}(x) \zeta_M^i (\zeta_{p^m}^{jp^m} - 1)^{-1} q_M^j$ est encore un élément de Y_M . Donc l'opérateur $u_m - 1$ est inversible sur Y_M et on a $v((u_m - 1)^{-1}x) \geq v(x) - \frac{1}{p-1}$.

L'opérateur $u_m - 1$ sur $Y_M \otimes T$ se décompose sous la forme :

$$u_m - 1 = (u_m \otimes 1 - 1) + (u_m \otimes 1)(1 \otimes u_m - 1) = (u_m \otimes 1 - 1)(1 + u'),$$

où $u' = (u_m \otimes 1 - 1)^{-1}(u_m \otimes 1)(1 \otimes u_m - 1)$. On se ramène à montrer que $(1 + u')$ est inversible sur $Y_M \otimes T$. Comme P_m agit trivialement sur $T/2pT$, on a

$$v((1 \otimes u_m - 1)(x_i \otimes e_i)) \geq v(x_i \otimes e_i) + v_p(2p), \text{ si } x = \sum_i x_i \otimes e_i \in Y_M \otimes T.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} v((1 \otimes u_m - 1)x) &= \inf_i v((1 \otimes u_m - 1)x_i \otimes e_i) \\ &\geq \inf_i v(x_i \otimes e_i) + v_p(2p) = v(x) + v_p(2p). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $v(u'(x)) \geq v(x) + v_p(2p) - \frac{1}{p-1}$. Ceci permet de montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-u')^n$ converge et sa somme est l'inverse de $(1 + u')$ sur $Y_M \otimes T$. Donc $u_m - 1$ est inversible sur $Y_M \otimes T$. □

Lemme 4.18. Si $a \in \mathbb{Z}_p^*$, l'opérateur $a\gamma_m - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m}$.

Démonstration. Comme un élément x dans $X_M^{U_m}$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{i \in J, i \neq 0} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik}(x) \zeta_M^i q_M^k \text{ avec } a_{ij}(x) \in F_M,$$

l'action de $a\gamma_m - 1$ sur un élément $x \in X_M^{U_m}$ est donnée par la formule :

$$(a\gamma_m - 1)x = \sum_{i \in J, i \neq 0} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik}(x) (a\zeta_{p^m}^{i(e^{p^m}-1)} - 1) \zeta_M^i q_M^k.$$

Comme $i \neq 0$, on a $0 \leq v_p(a\zeta_{p^m}^{i(e^{p^m}-1)} - 1) \leq \frac{1}{p-1}$. On en déduit que $a\gamma_m - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m}$ avec la formule de l'action de $(a\gamma_m - 1)^{-1}$ sur $X_M^{U_m}$ donnée par

$$(a\gamma_m - 1)^{-1}x = \sum_{i \in J, i \neq 0} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik} (a\zeta_{p^m}^{i(e^{p^m}-1)} - 1)^{-1} \zeta_M^i q_M^k.$$

□

Revenons à la démonstration de la proposition 4.15 :

Démonstration. On se ramène à prouver $H^i(P_m, X_M \otimes T) = 0$. Si on a

$$(4.13) \quad H^1(U_m, X_M \otimes T)^{\Gamma_m} = 0 \text{ et } H^1(U_m, X_M \otimes T)/(\gamma_m - 1) = 0,$$

alors, (1) si $i = 1$, par la suite exacte d'inflation-restriction, on a :

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma_m, (X_M \otimes T)^{U_m}) \rightarrow H^1(P_m, X_M \otimes T) \rightarrow H^1(U_m, X_M \otimes T)^{\Gamma_m} = 0 \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, on déduit $H^1(\Gamma_m, (X_M \otimes T)^{U_m}) = 0$ des lemmes 4.17 et 4.18. Ceci permet de conclure.

(2) si $i = 2$, d'après la suite spectrale de Hochschild-Serre, on a l'isomorphisme :

$$H^2(P_m, X_M \otimes T) \cong H^1(\Gamma_m, H^1(U_m, X_M \otimes T)) = \frac{H^1(U_m, X_M \otimes T)}{(\gamma_m - 1)} = 0.$$

On montre (4.13) dans la suite. Notons $Z_M = (X_M^{U_m} \otimes T)/(\gamma_m - 1)$. D'après le lemme 4.17, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_M & \longrightarrow & H^1(U_m, X_M \otimes T) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow e^{-p^m} \gamma_m - 1 & & \downarrow \gamma_m - 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_M & \longrightarrow & H^1(U_m, X_M \otimes T) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On factorise l'opérateur $e^{-p^m} \gamma_m - 1$ sur $X_M^{U_m} \otimes T$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} e^{-p^m} \gamma_m - 1 &= (e^{-p^m} \gamma_m \otimes 1 - 1) + (e^{-p^m} \gamma_m \otimes 1)(1 \otimes e^{-p^m} \gamma_m - 1) \\ &= (e^{-p^m} \gamma_m \otimes 1 - 1)(1 + \gamma'), \end{aligned}$$

où $\gamma' = (e^{-p^m} \gamma_m \otimes 1 - 1)^{-1} (e^{-p^m} \gamma_m \otimes 1) (1 \otimes e^{-p^m} \gamma_m - 1)$. Comme $e^{-p^m} \gamma_m \otimes 1 - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m} \otimes T$ d'après le lemme 4.18, on se ramène à montrer que $1 + \gamma'$ est inversible sur $X_M^{U_m} \otimes T$.

Par ailleurs, si $x = \sum_i x_i \otimes e_i \in X_M^{U_m} \otimes T$, on a

$$v((1 \otimes e^{-p^m} \gamma_m - 1)(x)) \geq v_p(2p) + v(x)$$

car P_m agit trivialement sur $T/2pT$. Ceci permet de montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-\gamma')^n$ converge et sa somme est l'inverse de $(1 + \gamma')$ sur $X_M^{U_m} \otimes T$. Donc $e^{-p^m} \gamma_m - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m} \otimes T$. On en déduit que l'opérateur $e^{-p^m} \gamma_m - 1$ est inversible sur Z_M . Donc on a

$$H^1(U_m, X_M \otimes T)^{\Gamma_m} = 0 \text{ et } H^1(U_m, X_M \otimes T)/(\gamma_m - 1) = 0.$$

□

Proposition 4.19. *Soit $v_p(M) \geq v_p(2p)$; si V est une \mathbb{Q}_p -représentation de $P_{\mathfrak{R}_M}$ munie d'un \mathbb{Z}_p -réseau T tel que $P_{\mathfrak{R}_M}$ agit trivialement sur $T/2pT$, alors pour $i \in \mathbb{N}$, \mathbf{R}_M induit un isomorphisme :*

$$\mathbf{R}_M : H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+) \otimes V) \cong H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{\mathfrak{R}}_M^+ \otimes V).$$

Démonstration. On pose $\tilde{X}_M = \{x \in \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+) | \mathbf{R}_M(x) = 0\}$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a une décomposition de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+)/t^n$ comme $\tilde{\mathfrak{R}}^+/t^n$ -module : $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+)/t^n = \tilde{\mathfrak{R}}_M^+/t^n \oplus \tilde{X}_M/t^n$. Cela induit une décomposition de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+)$ comme $\tilde{\mathfrak{R}}^+$ -module : $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+) = \tilde{\mathfrak{R}}_M^+ \oplus \tilde{X}_M$. On se ramène donc à montrer : $H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{X}_M \otimes T) = 0$.

Soit c_0 un i -cocycle qui présente un élément dans $H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{X}_M \otimes T)$. D'après la proposition 4.15, $\theta(c_0)$ est un cobord dans $H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, X_M \otimes T)$ et donc $\theta c_0 = db_0$. L'élément $c_0 - d(\iota_{\text{dR}}(b_0))$ est encore un i -cocycle dans $H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{X}_M \otimes T)$, qui est à valeurs dans $t\tilde{X}_M \otimes T$. On définit une suites $(db_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de i -cobords dans $H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, X_M \otimes T(-n))$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de i -cocycles dans $H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{X}_M \otimes T(-n))$ par récurrence :

$$db_{n-1} = \theta(c_{n-1}) \text{ et } c_n = t^{-1}(c_{n-1} - d(\iota_{\text{dR}} b_{n-1})), \text{ si } n \geq 1.$$

Donc, on a $c_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n d(\iota_{\text{dR}}(b_n))$, qui est une somme des cobords qui converge dans $H^i(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{X}_M \otimes T)$. Ceci permet de conclure la proposition. □

5. La loi de réciprocité explicite de Kato

5.1. Construction de l'application exponentielle duale de Kato.

On note $\mathcal{K}^+ = \mathbb{Q}_p[[q]]$ le complété q -adique de \mathfrak{R}^+ et \mathcal{K}_M^+ le complété q -adique de \mathfrak{R}^+ -module $\mathfrak{R}_M^+ = \mathfrak{R}^+[\zeta_M, q_M]$. On a donc $\mathcal{K}_M^+ = F_M[[q_M]]$. On note $\tilde{\mathcal{K}}^+ = \mathbb{Q}_p[[\tilde{q}, t]]$ le complété \tilde{q} -adique de $\tilde{\mathfrak{R}}^+ = \iota_{\text{dR}}(\mathfrak{R}^+)[[t]]$, où l'application ι_{dR} identifie \mathfrak{R}^+ à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}^+)$. On note $\tilde{\mathcal{K}}_M^+$

le complété \tilde{q} -adique de $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ comme $\tilde{\mathfrak{K}}^+$ -module. D'après le lemme 3.16, on a bien $\tilde{\mathcal{K}}_M^+ = \tilde{\mathcal{K}}^+[\tilde{\zeta}_M, \tilde{q}_M] = \tilde{\mathcal{K}}^+[\zeta_M, \tilde{q}_M] = F_M[[t, \tilde{q}_M]]$. On définit une application $\theta : \tilde{\mathcal{K}}_M^+ \rightarrow F_M[[q_M]]$ par réduction modulo t . Elle coïncide avec l'application θ sur $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$.

On note $\mathcal{K}_{M,n}^+ = \mathcal{K}_M^+/(q_M)^n$, $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ = \tilde{\mathcal{K}}_M^+/(t, \tilde{q}_M)^n$. La représentation $\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j}$ de P_m n'est pas une représentation analytique; mais c'est la limite projective des représentations analytiques $\{\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de P_m .

Lemme 5.1. *Les actions de ∂_1 et $\partial_2 - 1$ sur t et \tilde{q}_M sont données par les formules suivantes :*

$$\partial_1(t) = 0, \partial_1(\tilde{q}_M) = \frac{t}{M} \tilde{q}_M; \partial_2(t) = t, \partial_2(\tilde{q}_M) = 0.$$

Proposition 5.2. [6, Prop. 2.4] *Si $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$ et $1 \leq j \leq k - 1$, alors l'application*

$$f(q_M) \mapsto t e_1^{k-2} f(\tilde{q}_M)$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{K}_{M,n}^+$ sur $(\tilde{\mathcal{K}}_{M,n+j-1}^+ \otimes V_{k,j})/(\partial_1, \partial_2 - 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Les $\{e_1^i e_2^{k-2-i} t^{l+2-j} q_M^v : 0 \leq i \leq k - 2, v, l \geq 0, v + l \leq n - 1\}$ forment une F_M -base de $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}$. Rappelons que l'action de P_m sur $V_{k,j}$ est donnée par la formule : $e_1 * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2$ et $e_2 * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c e_1 + d e_2$, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in P_m$. On a donc les formules suivantes pour l'opérateur ∂_1 :

$$\partial_1(e_1) = p^{-m} \lim_{n \rightarrow +\infty} e_1 * \frac{u_m^n - 1}{p^n} = e_2; \partial_1(e_2) = p^{-m} \lim_{n \rightarrow +\infty} e_2 * \frac{u_m^n - 1}{p^n} = 0.$$

On en déduit que

$$(5.1) \quad \partial_1(e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v) = i e_1^{i-1} e_2^{k-1-i} t^l \tilde{q}_M^v + e_1^i e_2^{k-2-i} t^l v \tilde{q}_M^v \frac{t}{M}.$$

Ceci nous fournit la relation suivante dans $(\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j})/\partial_1$:

$$\begin{aligned} e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v &= \frac{-1}{i+1} e_1^{i+1} e_2^{k-3-i} t^{l+1} \tilde{q}_M^v \frac{v}{M} \\ &= \frac{(-1)^{k-2-i} i!}{(k-2)!} e_1^{k-2} t^{l+k-2-i} \tilde{q}_M^v \left(\frac{v}{M}\right)^{k-2-i}. \end{aligned}$$

Par conséquent, chaque élément de $(\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j})/\partial_1$ peut être représenté par un élément de $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes (e_1^{k-2} t^{2-j}))$. Ceci implique que le morphisme naturel de F_M -espaces

$$\phi : \tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes (e_1^{k-2} t^{2-j})) \rightarrow (\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j})/\partial_1$$

est surjectif. La formule (5.1) montre qu'il n'existe pas d'élément non-nul x dans $(\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j})$ tel que $\partial_1 x$ appartient à $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes (e_1^{k-2} t^{2-j}))$. En conséquence, ϕ est un isomorphisme.

Par ailleurs, on a les formules suivantes pour l'opérateur $\partial_2 - 1$ sur $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}$:

$$\partial_2(e_1) = p^{-m} \lim_{n \rightarrow +\infty} e_1 * \frac{\gamma_m^{p^n} - 1}{p^n} = 0, \partial_2(e_2) = p^{-m} \lim_{n \rightarrow +\infty} e_2 * \frac{\gamma_m^{p^n} - 1}{p^n} = e_2.$$

On en déduit que :

$$(5.2) \quad (\partial_2 - 1)(e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v) = (k - 3 - i + l) e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v.$$

On tire la commutativité de ∂_1 et $\partial_2 - 1$ sur $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$ des formules (5.1) et (5.2). On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (e_1^{k-2} t^{2-j} \otimes \tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+) & \xrightarrow{\cong} & (\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}) / \partial_1 \\ \downarrow \partial_2 - 1 & & \downarrow \partial_2 - 1 \\ (e_1^{k-2} t^{2-j} \otimes \tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+) & \xrightarrow{\cong} & (\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j})_n / \partial_1 \end{array}$$

On déduit de la formule (5.2) que, $e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v$ est un vecteur propre de $\partial_2 - 1$ avec la valeur propre $(k - 3 - i + l)$. Donc $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes e_1^{k-2} t^{2-j})$ est dans l'image de $\partial_2 - 1$ si $l - 1 \neq 0$ et donc on obtient $(\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}) / (\partial_1, \partial_2 - 1) \cong \mathcal{K}_{M,n+1-j}^+ t e_1^{k-2}$, ce qui permet de conclure. \square

En composant les applications obtenues dans les paragraphes précédents, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_M}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \otimes V_{k,j}) & & \\ \uparrow (1) & & \\ H^2(P_{\mathfrak{R}_M}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+) \otimes V_{k,j}) & \xrightarrow{(2)} & H^2(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{\mathfrak{R}}_M^+ \otimes V_{k,j}) \\ \vdots \text{exp}_{\text{Kato}}^* \downarrow & & \downarrow (3) \\ & & \varprojlim_n H^2(P_{\mathfrak{R}_M}, \tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}) \\ & & \downarrow (4) \\ \mathcal{K}_M^+ & \xleftarrow{(5) \cong} & \varprojlim_n (\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}) / (\partial_1, \partial_2 - 1), \end{array}$$

où

- l'application (1), d'inflation, est injective car $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_{Mp^\infty}}} = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{R}_{Mp^\infty}^+)$ et $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_{Mp^\infty}}$ agit trivialement sur $V_{k,j}$;
- (2) est l'isomorphisme induit par "la trace de Tate normalisée" \mathbf{R}_M (c.f

prop. 4.19) ;

- (3) est l'application naturelle induit par la projection

$$\tilde{\mathcal{R}}_M^+ \otimes V_{k,j} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j};$$

- (4) est l'isomorphisme du corollaire 4.9 car $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+ \otimes V_{k,j}$ est analytique pour tout n ;

• Comme $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$ est une représentation analytique pour tout n , l'application (4) se calcule grâce à la prop 4.10 . Plus précisément, cela se fait comme suit :

Recette 5.3. On définit une application $\text{res}_{k,j}^{(n)} : \tilde{\mathcal{K}}_{M,n+j-1}^+ \otimes V_{k,j} \rightarrow \mathcal{K}_{M,n}^+$ en composant la projection $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n+j-1}^+ \otimes V_{k,j} \rightarrow (\tilde{\mathcal{K}}_{M,n+j-1}^+ \otimes V_{k,j})/(\partial_1, \partial_2 - 1)$ avec l'inverse de l'isomorphisme dans la proposition 5.2. En prenant la limite projective, on obtient un morphisme $\text{res}_{k,j} : \tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j} \rightarrow \mathcal{K}_M^+$. Si $c = (c^{(n)}) \in \varprojlim H^2(P_{\mathcal{R}_M}, \tilde{\mathcal{K}}_{M,n+j-1}^+ \otimes V_{k,j})$ est représenté par une limite de 2-cocycle analytique $(\sigma, \tau) \mapsto c_{\sigma, \tau}^{(n)}$ sur $P_{\mathcal{R}_M}$ à valeurs dans $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n+j-1}^+ \otimes V_{k,j}$, alors l'image de c sous l'application (5) est $\text{res}_{k,j}(\delta^{(2)}(c))$, où $\delta^{(2)}$ est l'application définie dans la proposition 4.10.

On définit l'application $\text{exp}_{\mathbf{Kato}}^*$ en composant les applications (2),(3), (4), (5).

5.2. Application au système d'Euler de Kato. Ce paragraphe correspond au paragraphe [6, §2.4]. Il y a deux modifications, qui permettent de donner un bon sens pour les calculs :

- (1) Colmez a donné une construction d'un 2-cocycle pour l'élément de Kato $z_{\mathbf{Kato}}$ dans [6, §2.4.2], qui est une distribution (cf. [6, footnote 68]). Donc on ne peut pas faire la technique "la torsion à la Soulé". Par contre, on donne une construction d'un 2-cocycle pour l'élément de Kato $z_{\mathbf{Kato},c,d}$, qui est une mesure.
- (2) Colmez a déjà indiqué un problème (cf. [6, footnote 70]) dans sa construction : son anneau \mathbb{B}_{dR}^+ est trop petit pour la construction. On utilise notre anneau $\mathbb{B}_{\text{log}}^+$ (cf. §3.3 et lemme 5.6) pour résoudre ce problème.

5.2.1. Esquisse de la preuve du Théorème (1.4). Soient $M \geq 1$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, \dots, M\}$ et $\det A \in \mathbb{Z}_p^*$. On note $\psi_{M,A} = 1_{A+MM_2(\hat{\mathbb{Z}})}$ la fonction caractéristique de $A + MM_2(\hat{\mathbb{Z}})$. C'est une fonction invariante sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_M}$. Par ailleurs, la distribution $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$ appartient à $H^2(\mathcal{G}_{\mathcal{R}_M}, \mathcal{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, V_{k,j}))$. Alors, on a

$$\int \psi_{M,A} z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j) \in H^2(\mathcal{G}_{\mathcal{R}_M}, V_{k,j})$$

et on note son image dans $H^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_M}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+ \otimes V_{k,j})$ par $z_{M,A}$. En outre, on note $z_{\mathbf{Eis},c,d}^{(p)}(k,j)$ la distribution sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$ à valeurs dans \mathfrak{K}_∞^+ obtenue en restreignant la distribution

$$z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j) \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}), \mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}))$$

à $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$, et en utilisant l'injection de $\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}})$ dans \mathfrak{K}_∞^+ .

Lemme 5.4. *Soit k un entier ≥ 2 et soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq j \leq k - 1$. La distribution $z_{\mathbf{Eis},c,d}^{(p)}(k,j)$ est invariante sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$.*

Démonstration. Le groupe $\mathcal{G}_{\mathfrak{R}}$ agit sur $\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}})$ à travers son quotient $P_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cycl}}$ vu comme sous-groupe de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. D'après le théorème (2.13), on a :

$$\text{si } \gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}), z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j)|_k \gamma = |\det \gamma|^{j-1} z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j).$$

En particulier, si $\gamma \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, alors on a $|\det \gamma| = 1$. Donc la distribution $z_{\mathbf{Eis},c,d}^{(p)}(k,j)$ est invariante sous l'action de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. □

Pour montrer le théorème (1.4), il suffit de prouver :

Proposition 5.5. [6, Prop. 2.5] *Pour toute paire (M,A) ci-dessus et $v_p(M) \geq v_p(2p)$, $\det A \in \mathbb{Z}_p^*$, on a*

$$\text{exp}_{\mathbf{Kato}}^*(z_{M,A}) = \frac{1}{(j-1)!} M^{k-2-2j} F_{c,\alpha/M,\beta/M}^{(k-j)} E_{d,\gamma/M,\delta/M}^{(j)}.$$

Pour démontrer ceci, nous aurons besoin d'écrire un 2-cocycle explicite représentant $z_{M,A}$ et le suivre à travers les étapes de la construction de l'application $\text{exp}_{\mathbf{Kato}}^*$.

5.2.2. Construction d'un 2-cocycle. Soient $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \{1, \dots, p^n M\}$ vérifiant : $a_0 \equiv \alpha, b_0 \equiv \beta, c_0 \equiv \gamma, d_0 \equiv \delta \pmod{M}$. On note les fonctions caractéristiques $1_{(a_0+Mp^n\mathbb{Z}_p) \times (b_0+Mp^n\mathbb{Z}_p)}, 1_{(c_0+Mp^n\mathbb{Z}_p) \times (d_0+Mp^n\mathbb{Z}_p)}$, et

$$1_{\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} + Mp^n \mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_p)} \text{ par } \psi_{a_0,b_0}^{(n)}, \psi_{c_0,d_0}^{(n)}, \text{ et } \psi_{a_0,b_0,c_0,d_0}^{(n)} \text{ respectivement.}$$

Notons U_1 et U_2 respectivement les ouverts $(\alpha + M\mathbb{Z}_p) \times (\beta + M\mathbb{Z}_p)$ et $(\gamma + M\mathbb{Z}_p) \times (\delta + M\mathbb{Z}_p)$ de \mathbb{Z}_p^2 , et $U = U_1 \times U_2$ que l'on voit comme un ouvert de $\mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ et même de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ puisque $\det A \in \mathbb{Z}_p^*$ et $p|M$.

On définit les mesures algébriques $\mu_i \in H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{R}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, \mathbb{Z}_p(1)))$, pour $i = 1, 2$, par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \int \psi_{a_0,b_0}^{(n)} \mu_1 &= \int_{(a_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}}) \times (b_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})} r_c(z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}), \\ \int \psi_{c_0,d_0}^{(n)} \mu_2 &= \int_{(c_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}}) \times (d_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})} r_d(z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)}). \end{aligned}$$

On note $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$ l'élément de $H^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, \mathbb{Z}_p(2)))$. Comme on a $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j) = (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p z_{\mathbf{Kato},c,d}$, on a

$$(5.3) \quad z_{M,A} = \int \psi_{M,A} z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j) = \int_U (e_1^{k-2}t^{-j}) * x\nu.$$

Considérons le q -développement d'une unité modulaire, on a une décomposition du groupe des unités modulaires $\mathcal{U}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$:

$$\mathcal{U}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}) = (\mathbb{Q}^{\text{cycl}})^* \times q^{\mathbb{Q}} \times \mathcal{U}_1^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}}),$$

où $\mathcal{U}_1^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$ est l'ensemble d'éléments $x \in \mathcal{U}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$ vérifiant $v_q(x - 1) > 0$. Alors on a une inclusion de $\mathcal{U}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$ dans $(\mathfrak{K}_{\infty}^+[q^{-1}])^*$.

Rappelons que, l'expression explicite de $g_c(q, q_N^a \zeta_N^b) \in \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$, pour N un entier ≥ 1 , $0 \leq a, b \leq N - 1$, et c un entier tel que $(c, 6) = 1$ et $(ca, cb) \notin N\mathbb{Z}^2$, est comme suit :

$$(5.4) \quad q^{\frac{c^2-1}{12}} (-q_N^a \zeta_N^b)^{\frac{c-c^2}{2}} \frac{\prod_{n \geq 0} (1 - q^n q_N^a \zeta_N^b)^{c^2} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n (q_N^a \zeta_N^b)^{-1})^{c^2}}{\prod_{n \geq 0} (1 - q^n (q_N^a \zeta_N^b)^c) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n (q_N^a \zeta_N^b)^{-c})}.$$

Soit $g \in \overline{\mathfrak{K}}$; on note $\bar{g} = (g, g^{\frac{1}{p}}, \dots)$, un relèvement de g dans $\overline{\mathbb{R}(\overline{\mathfrak{K}})}$ et $[\bar{g}]$ son représentant de Teichmüller dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}})$. Alors l'élément $g_c(q, q_N^a \zeta_N^b)$ est bien défini et appartient à $(U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)[\bar{q}^{-1}])^*$, à multiplication par un élément de $(1, \zeta_p, \dots)^{\mathbb{Q}}$ près.

Lemme 5.6. *Soit c un entier tel que $(c, 6) = 1$ et $c \equiv 1 \pmod{N}$. L'élément $\log[\bar{g}_{c, \frac{a}{N}, \frac{b}{N}}]$ est un élément bien défini dans \mathbb{B}_{\log}^+ , à addition près d'un élément de $\mathbb{Q}_p t$ près.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$), $[1 - q^n q_N^a \zeta_N^b]$ (resp. $[1 - q^n q_N^{-a} \zeta_N^{-b}]$) est un élément inversible de $\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$. Comme q est de valuation 1 pour la valuation p -adique sur $\overline{\mathfrak{K}}^+$, on a $\prod_{n \geq 0} (1 - q^n q_N^a \zeta_N^b)$ converge dans $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Ceci implique $\prod_{n \geq 0} [1 - q^n q_N^a \zeta_N^b]$ converge dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$. De la même manière, on obtient que

$$O = \frac{\prod_{n \geq 0} [(1 - q^n q_N^a \zeta_N^b)]^{c^2} \prod_{n \geq 1} [(1 - q^n (q_N^a \zeta_N^b))^{-1}]^{c^2}}{\prod_{n \geq 0} [(1 - q^n (q_N^a \zeta_N^b))^c] \prod_{n \geq 1} [(1 - q^n (q_N^a \zeta_N^b))^{-c}]}$$

converge dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$. Donc l'élément $[g_c(q, q_N^a, q_N^b)] \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}})$ est donné par la formule explicite suivante :

$$[g_c(q, q_N^a, q_N^b)] = \bar{q}^{\frac{c^2-1}{12}} (-\tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)^{\frac{c-c^2}{2}} \times O;$$

8. on note $g_c(q, q_N^a \zeta_N^b)$, ce qui est noté $g_{c, \frac{a}{N}, \frac{b}{N}}$ dans la section §2.2, même chose pour la fonction θ et les séries d'Eisenstein.

ceci implique qu'il est dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**} \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}}$. En appliquant l'application \log (c.f §3.3) à $[\bar{g}_{i, \frac{a}{N}, \frac{b}{N}}]$, on conclut la démonstration du lemme. \square

Si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on définit $\log[\bar{g}_{c, \frac{a}{N}, \frac{b}{N}}]$ comme un élément de \mathbb{B}_{\log}^+ , à addition d'un élément de $\mathbb{Q}_p t$ près, par la formule :

$$\log[\bar{g}_{c, \frac{a}{N}, \frac{b}{N}}] = \frac{c^2 - c_1^2}{e^2 - 1} \log[\bar{g}_{e, \frac{a}{N}, \frac{b}{N}}] + \log[\bar{g}_{c_1, \frac{a}{N}, \frac{b}{N}}],$$

où e est un entier tel que $(e, 6) = 1$ et $e \equiv 1 \pmod{N}$, et c_1 est un entier tel que $v_p(\frac{c-c_1}{e^2-1}) \geq 0$, $c \equiv c_1 \pmod{N}$ et $(c_1, 6) = 1$; ceci ne depend pas du choix de e et c_1 à addition d'un élément de $\mathbb{Q}_p t$ près .

Si $i = 1, 2$, soit Ψ_i une base du \mathbb{Z} -module des fonctions localement constantes sur U_i constituée de fonctions du type $\psi_{a_0, b_0}^{(n)}$ (resp. $\psi_{c_0, d_0}^{(n)}$), avec $n \in \mathbb{N}$ et a_0, b_0 (resp. c_0, d_0) comme ci-dessus. On définit une distribution algébrique μ_{1, Ψ_1} (resp. μ_{2, Ψ_2}) sur U_1 (resp. U_2) à valeurs dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}^+)[u_q]$ par la formule : si $\psi_{a_0, b_0}^{(n)} \in \Psi_1$ (resp. $\psi_{c_0, d_0}^{(n)} \in \Psi_2$),

$$\int \psi_{a_0, b_0}^{(n)} \mu_{1, \Psi_1} = \log[\overline{g_c(q, q_{M^{p^n}}^{a_0} \zeta_{M^{p^n}}^{b_0})}]$$

(resp. $\int \psi_{c_0, d_0}^{(n)} \mu_{2, \Psi_2} = \log[\overline{g_d(q, q_{M^{p^n}}^{c_0} \zeta_{M^{p^n}}^{d_0})}]$).

On identifie $\mathbb{Z}_p(1)$ au sous-module de \mathbb{B}_{dR}^+ via l'isomorphisme de $\mathbb{Z}_p[\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{R}}}]$ -modules

$$\log \circ [\cdot] : \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \mathbb{Z}_p t.$$

Lemme 5.7. [6, Lemme 2.6] *Si $i = 1, 2$, alors μ_i est l'image du 1-cocycle $\sigma \mapsto \mu_{i, \Psi_i} * (\sigma - 1)$ dans $H^1(\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{R}}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, \mathbb{Z}_p(1)))$ pour tout choix de Ψ_i et des valeurs de l'intégration de μ_{i, Ψ_i} .*

Démonstration. La démonstration est la même pour $i = 1, 2$. On peut donc supposer que $i = 1$ et $\psi_{a_0, b_0} \in \Psi_1$. Rappelons que $\log[\bar{g}_{c, \frac{a_0}{M^{p^n}}, \frac{b_0}{M^{p^n}}}]$ est bien défini à $\mathbb{Q}_p t$ près. Comme $\sigma \mapsto t*(\sigma - 1)$ est un cobord dans $H^1(\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{R}}_M}, \mathbb{Z}_p(1))$, μ_{i, Ψ_i} ne dépend du choix de $\log[\bar{g}_{c, \frac{a_0}{M^{p^n}}, \frac{b_0}{M^{p^n}}}]$.

Si $\psi_{a_0, b_0}^{(n)} \in \Psi_1$, on a $\int \psi_{a_0, b_0}^{(n)} \mu_1 = \int \psi_{a_0, b_0}^{(n)} r_c z_{\text{Siegel}}^{(p)}$. D'après la théorie de Kummer p -adique (cf. §2.3), μ_1 est représenté par le 1-cocycle $\sigma \mapsto \mu * (\sigma - 1)$ de $H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, \mathbb{Z}_p(1)))$ avec $\mu \in H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(X_1, Z^0))$ vérifiant : $\int \psi_{a_0, b_0}^{(n)} \mu = r_c \bar{g}_{\frac{a_0}{M^{p^n}}, \frac{b_0}{M^{p^n}}}$.

Appliquons l'isomorphisme $\log \circ [\cdot] : \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \mathbb{Z}_p t$ à $\mu * (\sigma - 1)$; on déduit le lemme de la formule $\log[\sigma x] = \sigma \log[x]$. \square

5.2.3. Descente de $\overline{\mathfrak{K}}$ à \mathfrak{K}_{Mp^∞} .

Lemme 5.8. *Si $pN|M$, alors les produits infinis $\prod_{n \geq 0} (1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)$ et $\prod_{n \geq 1} (1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^{-a} \tilde{\zeta}_N^{-b})$ convergent dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**} \cap \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$.*

Démonstration. La démonstration pour

$$\prod_{n \geq 0} (1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b) \text{ et } \prod_{n \geq 1} (1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^{-a} \tilde{\zeta}_N^{-b})$$

est la même; on montre le lemme pour le produit $\prod_{n \geq 0} (1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)$.

Comme q est de valuation 1 pour la valuation p -adique dans $\overline{\mathfrak{K}}^+$, on a $\tilde{q} = p\alpha(1 + \omega\beta) \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$, et $v_p(\tilde{q}) \geq 1$. Donc on a

$$\prod_{n \geq 0} (1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \tilde{q}_N^{ak} \tilde{\zeta}_N^{bk} c_k,$$

où $c_k = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} \tilde{q}^{\sum_{1 \leq j \leq k} i_j}$ converge dans \mathbb{A}_{inf} pour la topologie p -adique. D'autre part, on a

$$v_p(c_k) \geq k(k-1)/2 \text{ et } v_p(\tilde{q}_N^{ak} \tilde{\zeta}_N^{bk} c_k) \geq \frac{ak}{N} + \frac{k(k-1)}{2} > 0;$$

ceci implique que le produit converge pour la topologie p -adique dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**}$. Il est évident que le produit est un élément de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$. \square

Si $c \in \mathbb{Z}$ est tel que $(c, 6) = 1$, alors l'élément $g_c(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)$ appartient à $(\mathbb{A}_{\text{inf}}^{**} \cap \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)) \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}}$. On peut appliquer l'application \log à $g_c(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)$. Si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on définit

$$\log g_c(q, \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b) = \frac{c^2 - c_1^2}{e^2 - 1} \log g_i(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b) + \log g_{c_1}(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b),$$

à addition d'un élément de $\mathbb{Q}_p t$ près, où e est un entier tel que $(e, 6) = 1$ et $e \equiv 1 \pmod{N}$, et c_1 est un entier tel que $(c_1, 6) = 1$ et $v_p(c - c_1)$ soit assez grand.

Lemme 5.9. *Si $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$), $1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b$ (resp. $1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^{-a} \tilde{\zeta}_N^{-b}$) est inversible dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. De plus, on a que $\frac{[1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b]}{1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b}$ (resp. $\frac{[1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^{-a} \tilde{\zeta}_N^{-b}]}{1 - \tilde{q}^n \tilde{q}_N^{-a} \tilde{\zeta}_N^{-b}}$) est un élément dans $1 + \omega \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$.*

Démonstration. On montre le lemme pour le cas $n \geq 0$ et l'autre cas se déduit de la même manière. Comme q est de valuation 1 pour la valuation p -adique dans $\overline{\mathfrak{K}}^+$, \tilde{q} peut s'écrire sous la forme $p\beta + \omega\alpha$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Donc on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (\tilde{q}^n \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)^m = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \sum_{mn \geq k, m \geq 1} \binom{mn}{k} \alpha^k (p\beta)^{mn-k} \tilde{q}_N^{ma} \tilde{\zeta}_N^{mb}.$$

La série $\sum_{mn \geq k, m \geq 1} \binom{mn}{k} \alpha^k (p\beta)^{mn-k} \tilde{q}_N^{ma} \tilde{\zeta}_N^{mb}$ converge dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et donc $1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)^m$ converge dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ pour la topologie faible. Ceci donne l'inverse de $1 - \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b$ dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et implique que $\frac{[1 - q_N^a \zeta_N^b]}{1 - \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b}$ est un élément dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Par ailleurs, $\theta\left(\frac{[1 - q_N^a \zeta_N^b]}{1 - \tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b}\right)$ a pour image 1 dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, ce qui permet de conclure. \square

Si $i = 1, 2$ et si $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, on définit une distribution algébrique $\tilde{\mu}_i, \Psi_i$ sur U_i par la formule : pour $\psi_{a_0, b_0}^{(n)} \in \Psi_1$ (resp. $\psi_{c_0, d_0}^{(n)} \in \Psi_2$),

$$\int \psi_{a_0, b_0}^{(n)} \tilde{\mu}_{1, \Psi_1} = \log g_c(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{a_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0})$$

(resp. $\int \psi_{c_0, d_0}^{(n)} \tilde{\mu}_{2, \Psi_2} = \log g_d(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{c_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{d_0})$).

De la formule explicite (5.4) de $g_c(q, q_N^a \zeta_N^b)$, on obtient que $g_c(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{a_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0})$ appartient à $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \oplus \mathbb{Q}_p \tilde{q}$, et son image par θ dans $\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \oplus \mathbb{Q}_p q$ est $g_c(q, q_{Mp^n}^{a_0} \zeta_{Mp^n}^{b_0})$. On en tire que $\log g_c(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{a_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0})$ et $\log g_d(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{c_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{d_0})$ appartiennent à $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \oplus \mathbb{Q}_p u_q$.

Lemme 5.10. [6, Lemme 2.7] *Si $i = 1, 2$, alors :*

- (1) $\tilde{\mu}_i, \Psi_i - \mu_i, \Psi_i$ est une mesure à valeurs dans $t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$;
- (2) Considérons l'application :

$$H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, \mathbb{Z}_p(1))) \rightarrow H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)).$$

L'image de μ_i est représenté par le cocycle

$$\sigma \mapsto \tilde{\mu}_i, \Psi_i * (\sigma - 1),$$

qui est l'inflation d'un cocycle sur $P_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U_i, t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+))$.

Démonstration. Le (1) se déduit du lemme 5.9. Le (2) est une conséquence immédiate du (1). En effet, comme $(\tilde{\mu}_i, \Psi_i - \mu_i, \Psi_i)$ est une mesure à valeurs dans $t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$, on obtient que $(\tilde{\mu}_i, \Psi_i - \mu_i, \Psi_i) * (\sigma - 1)$ est un cobord dans $H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+))$. D'autre part, on a $\tilde{\mu}_i, \Psi_i * (\sigma - 1) = \mu_i, \Psi_i * (\sigma - 1) + (\tilde{\mu}_i, \Psi_i - \mu_i, \Psi_i) * (\sigma - 1)$, et donc $\sigma \mapsto \tilde{\mu}_i, \Psi_i * (\sigma - 1)$ est un 1-cocycle à valeurs dans $t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ qui représente $\mu_i \in H^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+))$. \square

Soient Λ_1, Λ_2 deux G -modules à droite. Si $x_1 \in \Lambda_1, x_2 \in \Lambda_2$ et $\sigma, \tau \in G$, on définit un élément $\{x_1 \otimes x_2\}_{\sigma, \tau} := (x_1 * (\tau\sigma - \sigma) \otimes (x_2 * (\sigma - 1))) \in \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$.

Corollaire 5.11. [6, Coro. 2.8] *Considérons l'application :*

$$H^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, \mathbb{Z}_p(2))) \rightarrow H^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+))).$$

L'image de $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$ peut être représenté par le 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto \{\tilde{\mu}_{1, \Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{1, \Psi_2}\}_{\sigma, \tau},$$

qui est l'inflation du 2-cocycle sur $P_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+))$.

Démonstration. Ce corollaire résulte du lemme précédent et de la formule du cup-produit. La formule du cup-produit de deux cocycles est : soient G un groupe, A, B deux G -module à droite. Si $f_1 \in H^i(G, A)$ et $f_2 \in H^j(G, B)$, on a $f_1 \cup f_2 \in H^{i+j}(G, A \otimes B)$ où

$$\begin{aligned} & f_1 \cup f_2(\sigma_{i+j}, \dots, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \dots, \sigma_1) \\ &= (f_1(\sigma_i, \dots, \sigma_1) * \sigma_{i+1} * \dots * \sigma_{i+j}) \otimes f_2(\sigma_{i+j}, \dots, \sigma_{i+1}). \end{aligned}$$

On applique cette formule à $f_1 = \tilde{\mu}_{1, \Psi_1} * (\sigma - 1)$ et $f_2 = \tilde{\mu}_{2, \Psi_2} * (\sigma - 1)$ et on obtient un 2-cocycle $(\sigma, \tau) \mapsto \{\tilde{\mu}_{1, \Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{1, \Psi_2}\}_{\sigma, \tau}$, qui représente ν et à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+))$. Donc il est l'inflation du 2-cocycle sur $P_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+))$. \square

5.2.4. Descente de \mathfrak{K}_{Mp^∞} à \mathfrak{K}_M .

Définition 5.12. Si $v_p(M) \geq v_p(2p)$, on pose

$$\mathbb{B}_{\log}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)[u_q],$$

où $u_q = \log \tilde{q}$. On définit une application $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+[u_q]$ -linéaire :

$$\mathbf{R}_{M, \log} : \mathbb{B}_{\log}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_M^+[u_q]; \sum_k x_k u_q^k \mapsto \sum_k \mathbf{R}_M(x_k) u_q^k,$$

où \mathbf{R}_M est la trace de Tate normalisée sur $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$.

Comme $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+[u_q]$ est stable sous l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$ et \mathbf{R}_M commute avec l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$, on déduit que $\mathbf{R}_{M, \log}$ commute avec l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$. Notons $\mathbf{R}_{M, \log}$ encore par \mathbf{R}_M .

D'après ce qui précède et de la relation (5.3), $z_{M, A}$ est la classe du 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto \int_U ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g) \{\tilde{\mu}_{1, \Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{2, \Psi_2}\}_{\sigma, \tau},$$

qui est aussi la classe du 2-cocycle par "la trace de Tate normalisée "

$$(\sigma, \tau) \mapsto \mathbf{R}_M \left(\int_U ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g) \{\tilde{\mu}_{1, \Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{2, \Psi_2}\}_{\sigma, \tau} \right).$$

Lemme 5.13. [6, Lemme 2.9] Si $ad - bc \in \mathbb{Z}_p^*$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M(\log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b) \log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^c \tilde{\zeta}_{Mp^n}^d)) = \\ p^{-2n} \log \theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b) \log \theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^c \tilde{\zeta}_M^d). \end{aligned}$$

Démonstration. On a la formule explicite pour $\log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)$:

$$\begin{aligned} \log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b) &= \left(\frac{1}{12} + \frac{a}{2Mp^n}\right)u_q + \frac{b}{2Mp^n}t \\ &+ \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \log(1 - \tilde{q}^m \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)\right) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \log(1 - \tilde{q}^m \tilde{q}_{Mp^n}^{-a} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{-b}). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{R}_M(u_q) = u_q = p^{-n}u_q^{p^n}$ et $\mathbf{R}_M(t) = t = p^{-n} \log \tilde{\zeta}^{p^n}$, il suffit de vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M(\log(1 - \tilde{q}^m \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)) &= p^{-n} \log(1 - \tilde{q}^{p^n m} \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b), \\ \mathbf{R}_M(\log(1 - \tilde{q}^{m_1} \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b) \log(1 - \tilde{q}^{m_2} \tilde{q}_{Mp^n}^c \tilde{\zeta}_{Mp^n}^d)) \\ &= p^{-2n} \log(1 - \tilde{q}^{p^n m_1} \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b) \log(1 - \tilde{q}^{p^n m_2} \tilde{q}_M^c \tilde{\zeta}_M^d) \end{aligned}$$

Comme $ad - bc \in \mathbb{Z}_p^*$, a et b ne sont pas divisibles par p^n simultanément. Donc pour $p^n \nmid i$, on obtient $\mathbf{R}_M((\tilde{q}^m \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)^i) = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M(\log(1 - \tilde{q}^m \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)) &= \mathbf{R}_M\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\tilde{q}^m \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)^i}{i}\right) \\ &= p^{-n} \log(1 - (\tilde{q}^{p^n})^m \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b). \end{aligned}$$

Pour le terme

$$\log(1 - \tilde{q}^{m_1} \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b) \cdot \log(1 - \tilde{q}^{m_2} \tilde{q}_{Mp^n}^c \tilde{\zeta}_{Mp^n}^d),$$

on développe le produit :

$$\begin{aligned} &\log(1 - \tilde{q}^{m_1} \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b) \cdot \log(1 - \tilde{q}^{m_2} \tilde{q}_{Mp^n}^c \tilde{\zeta}_{Mp^n}^d) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} -\frac{(\tilde{q}^{m_1} \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)^i}{i}\right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} -\frac{(\tilde{q}^{m_2} \tilde{q}_{Mp^n}^c \tilde{\zeta}_{Mp^n}^d)^j}{j}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{(\tilde{q}^{m_1} \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b)^i (\tilde{q}^{m_2} \tilde{q}_{Mp^n}^c \tilde{\zeta}_{Mp^n}^d)^j}{ij} \end{aligned}$$

Comme $ad - bc \in \mathbb{Z}_p^*$, cela équivaut à dire que " $p^n \mid ai + cj$ et " $p^n \mid bi + dj$ sont équivalents à " $p^n \mid i$ et " $p^n \mid j$ ". Donc en appliquant \mathbf{R}_M à la formule ci-dessus,

on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_M (\log(1 - \tilde{q}^{m_1} \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b) \cdot \log(1 - \tilde{q}^{m_2} \tilde{q}_{Mp^n}^c \tilde{\zeta}_{Mp^n}^d)) \\ &= p^{-2n} \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{(\tilde{q}^{p^n m_1} \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b)^i (\tilde{q}^{p^n m_2} \tilde{q}_M^c \tilde{\zeta}_M^d)^j}{ij} \\ &= p^{-2n} \log(1 - \tilde{q}^{p^n m_1} \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b) \cdot \log(1 - \tilde{q}^{p^n m_2} \tilde{q}_M^c \tilde{\zeta}_M^d) \end{aligned}$$

En composant les résultats ci-dessus, on obtient la formule voulue dans le lemme. \square

Corollaire 5.14. Si on note $\log^{(\sigma, \tau)} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ l'élément

$$\left\{ \log \left((c^2 - \langle c \rangle) \theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^{a_0} \tilde{\zeta}_M^{b_0}) \right) \otimes \log \left((d^2 - \langle d \rangle) \theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^{c_0} \tilde{\zeta}_M^{d_0}) \right) \right\}_{\sigma, \tau},$$

$z_{M,A}$ peut se représenter par le 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-2n} \sum \frac{(a_0 e_1 + b_0 e_2)^{k-2}}{(a_0 d_0 - b_0 c_0)^{j t j}} \log^{(\sigma, \tau)} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix},$$

la somme portant sur l'ensemble $U^{(n)}$ comme ci-dessous

$$\{(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \{1, \dots, Mp^n\}^4 \mid a_0 \equiv \alpha, b_0 \equiv \beta, c_0 \equiv \gamma, d_0 \equiv \delta \pmod{M}\}.$$

Démonstration. $z_{M,A}$ peut se représenter par le 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto \mathbf{R}_M \left(\int_U ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g) \{ \tilde{\mu}_{1, \Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{2, \Psi_2} \}_{\sigma, \tau} \right).$$

Par la définition de l'intégration sur U , on a

(5.5)

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_M \left(\int_U ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g) \{ \tilde{\mu}_{1, \Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{2, \Psi_2} \}_{\sigma, \tau} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{g = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in U^{(n)}} \\ & \quad \mathbf{R}_M \left(\int \psi_{a_0, b_0}^{(n)} \otimes \psi_{c_0, d_0}^{(n)} ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g) \{ \tilde{\mu}_{1, \Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{2, \Psi_2} \}_{\sigma, \tau} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{g = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in U^{(n)}} ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g) \cdot \\ & \quad \cdot r_{c,d} \left(\mathbf{R}_M \left(\{ \log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{a_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0}) \otimes \log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{c_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{d_0}) \}_{\sigma, \tau} \right) \right) \end{aligned}$$

Comme la trace de Tate normalisée commute avec l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_M \{ \log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{a_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0}) \otimes \log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{c_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{d_0}) \}_{\sigma, \tau} \\ &= \{ \mathbf{R}_M (\log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{a_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0}) \otimes \log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^{c_0} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^{d_0})) \}_{\sigma, \tau}. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}
 (5.5) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{g = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in U^{(n)}} ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g) \cdot \\
 &\quad \cdot r_{c,d} \left(p^{-2n} \{ \log \theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^{a_0} \tilde{\zeta}_M^{b_0}) \otimes \log \theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^{c_0} \tilde{\zeta}_M^{d_0}) \}_{\sigma, \tau} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-2n} \sum_{g = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in U^{(n)}} \frac{(a_0 e_1 + b_0 e_2)^{k-2}}{(a_0 d_0 - b_0 c_0)^j t^j} \cdot \log \begin{pmatrix} \sigma, \tau \\ a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

5.2.5. Passage à l'algèbre de Lie. Comme le 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-2n} \sum \frac{(a_0 e_1 + b_0 e_2)^{k-2}}{(a_0 d_0 - b_0 c_0)^j t^j} \log \begin{pmatrix} \sigma, \tau \\ a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$$

obtenu dans la section précédente est la limite de 2-cocycles analytiques à valeurs dans $\mathcal{K}_M^+ \otimes V_{k,j}$, on peut utiliser les techniques différentielles dans la section (4.1) pour calculer son image dans \mathcal{K}_M^+ par l'application $\exp_{\mathbf{Kato}}^*$.

Si $f(x_1, x_2)$ est une fonction en deux variables, on note D_1 (resp. D_2) l'opérateur $x_1 \frac{d}{dx_1}$ (resp. $x_2 \frac{d}{dx_2}$). Si $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b)$.

Lemme 5.15. *On note*

$$\delta_{a_0, b_0, c_0, d_0}^{(2)} = \delta^{(2)} \left(\left\{ \log \left(r_c \theta_{a_0, b_0}^{(n)} \right) \otimes \log \left(r_d \theta_{c_0, d_0}^{(n)} \right) \right\}_{\sigma, \tau} \right).$$

On a

$$\delta_{a_0, b_0, c_0, d_0}^{(2)} = \frac{(a_0 d_0 - b_0 c_0) t^2}{M^2} \cdot D_2 \log \left(r_c \theta_{a_0, b_0}^{(n)} \right) \cdot D_2 \log \left(r_d \theta_{c_0, d_0}^{(n)} \right).$$

Démonstration. Soit $f_{a,b}^{(n)}$ définie comme ci-dessus. Alors l'action habituelle de $(u, v) \in P_m$ sur $f_{a,b}^{(n)}$ est :

$$(u, v) f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^{au+be^v}).$$

Du développement limité du terme de droite en u et v , on déduit

$$f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^{au+be^v}) = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b) + u \left(\frac{at}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)} \right) + v \left(\frac{bt}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)} \right) + O((u, v)^2)$$

et donc l'action de $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix} - 1$ sur $f_{a,b}^{(n)}$ est donnée par la formule :

$$(5.6) \quad f_{a,b}^{(n)} * \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix} - 1 \right) = \frac{au + bv}{M} t D_2 f_{a,b}^{(n)} + O((u, v)^2).$$

On note $\Delta = \left\{ \log \left(r_c \theta_{a_0, b_0}^{(n)} \right) \otimes \log \left(r_d \theta_{c_0, d_0}^{(n)} \right) \right\}_{\sigma, \tau}$.

Soient $\sigma = (u, v), \tau = (x, y) \in \mathbb{P}_m$. Par un calcul explicite de

$$f_{a_0, b_0}^{(n)} * \left(\begin{pmatrix} 1 & ue^{y+x} \\ 0 & e^{v+y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \right) \otimes g_{c_0, d_0}^{(n)} * \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & e^y \end{pmatrix} - 1 \right)$$

à $O((u, v, x, y)^3)$ près, en utilisant la formule que l'on vient juste d'établir, on obtient :

$$\Delta = \frac{(a_0u + b_0v)(c_0x + d_0y)}{M^2} t^2 D_2 \log \left(r_c \theta_{a_0, b_0}^{(n)} \right) \cdot D_2 \log \left(r_d \theta_{c_0, d_0}^{(n)} \right).$$

Alors, par la définition de l'application $\delta^{(2)}$, on obtient

$$\delta_{a_0, b_0, c_0, d_0}^{(2)} = \frac{(a_0d_0 - b_0c_0)t^2}{M^2} \cdot D_2 \log \left(r_c \theta_{a_0, b_0}^{(n)} \right) \cdot D_2 \log \left(r_d \theta_{c_0, d_0}^{(n)} \right)$$

□

Lemme 5.16. *Si $s \geq 2 - j$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, alors on a*

$$(ae_1 + be_2)^{k-2} t^s f_{a,b}^{(n)} \cdot g_{c,d}^{(n)} = \frac{(ae_1 + be_2)^{k-2}}{a(1-s)} \cdot (ad - bc) \cdot \frac{t}{M} f_{a,b}^{(n)} \cdot D_2 g_{c,d}^{(n)},$$

dans $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})/(\partial_1, 1 - \partial_2)$.

Démonstration. Pour $(u, v) \in \mathbb{P}_m$, on a :

$$f_{a,b}^{(n)} * ((u, v) - 1) = u\partial_1 f_{a,b}^{(n)} + v\partial_2 f_{a,b}^{(n)} + O((u, v)^2).$$

En comparant avec la formule (5.6), on obtient que $\partial_1 f_{a,b}^{(n)} = \frac{at}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)}$ et $\partial_2 f_{a,b}^{(n)} = \frac{bt}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)}$. En composant les formules dans la démonstration de la proposition (5.2), on obtient :

$$\begin{aligned} & (a(1 - \partial_2) + b\partial_1) \left((ae_1 + be_2)^{k-2} t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} \right) \\ &= a(1 - s)(ae_1 + be_2)^{k-2} t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} \\ &+ \frac{(bc - ad)t}{M} (ae_1 + be_2)^{k-2} t^s f_{a,b}^{(n)} D_2 g_{c,d}^{(n)}, \end{aligned}$$

qui est nul dans $(\tilde{\mathcal{K}} \otimes V_{k,j})/(\partial_1, 1 - \partial_2)$ pour $s \geq 2 - j$. Donc :

$$(ae_1 + be_2)^{k-2} t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} = \frac{(ad - bc)}{a(1 - s)} \frac{t}{M} (ae_1 + be_2)^{k-2} t^s f_{a,b}^{(n)} D_2 g_{c,d}^{(n)}.$$

□

On a défini une application $\text{res}_{k,j} : \tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j} \rightarrow \mathcal{K}_M^+$ dans la recette 5.3. Elle permet de calculer l'image de $z_{M,A}$ dans \mathcal{K}_M^+ .

Corollaire 5.17. *On a*

$$\begin{aligned} \text{res}_{k,j} \left(\frac{(a_0e_1 + b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0 - b_0c_0)^j t^j} \cdot \delta_{a_0,b_0,c_0,d_0}^{(2)} \right) \\ = M^{-1-j} \cdot \frac{a_0^{k-1-j}}{(j-1)!} \cdot D_2 \log(r_c \theta_{a_0,b_0}^{(n)}) \cdot D_2^j \log(r_d \theta_{c_0,d_0}^{(n)}). \end{aligned}$$

Démonstration. D'après les lemmes (5.15) et (5.16), on obtient la formule suivante,

$$\begin{aligned} \frac{(a_0e_1 + b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0 - b_0c_0)^j t^j} \cdot \delta_{a_0,b_0,c_0,d_0}^{(2)} \\ = \frac{(a_0e_1 + b_0e_2)^{k-2} t^{2-j}}{(a_0d_0 - b_0c_0)^{j-1} M^2} \cdot D_2 \log(r_c \theta_{a_0,b_0}^{(n)}) \cdot D_2 \log(r_d \theta_{c_0,d_0}^{(n)}) \\ = M^{-1-j} \frac{(a_0e_1 + b_0e_2)^{k-2} t}{a_0^{j-1} (j-1)!} \cdot D_2 \log(r_c \theta_{a_0,b_0}^{(n)}) \cdot D_2^j \log(r_d \theta_{c_0,d_0}^{(n)}). \end{aligned}$$

Par définition de $\text{res}_{k,j}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{res}_{k,j} \left(\frac{(a_0e_1 + b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0 - b_0c_0)^j t^j} \cdot \delta_{a_0,b_0,c_0,d_0}^{(2)} \right) \\ = \frac{M^{-1-j} a_0^{k-1-j}}{(j-1)!} \cdot D_2 \log(r_c \theta_{a_0,b_0}^{(n)}) \cdot D_2^j \log(r_d \theta_{c_0,d_0}^{(n)}). \end{aligned}$$

□

Comme $\partial_z E_{c,\alpha,\beta}^{(k)} = E_{c,\alpha,\beta}^{(k+1)}$, pour $k \geq 0$, on a

$$D_r^2 \log r_c \theta(x_1, x_2) = c^2 E_r(x_1, x_2) - c^r E_r(x_1, x_2^c).$$

On note $E_{c,r}(x_1, x_2) = c^2 E_r(x_1, x_2) - c^r E_r(x_1, x_2^c)$. Si $b \equiv \beta \pmod M$ et $d \equiv \delta \pmod M$, on a $\zeta_M^b = \zeta_M^\beta$, $\zeta_M^d = \zeta_M^\delta$. Donc par le corollaire (5.14) et le calcul que nous avons fait, on obtient :

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbf{Kato}}^*(z_{M,A}) \\ = \frac{M^{-1-j}}{(j-1)!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ c_0 \equiv \gamma [M] \\ 1 \leq a_0, c_0 \leq Mp^n}} a_0^{k-1-j} E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0} \zeta_M^\beta) E_{d,j}(q^{p^n}, q_M^{c_0} \zeta_M^\delta). \end{aligned}$$

Enfin, on utilise le lemme suivant pour terminer le calcul :

Lemme 5.18. [6, Lemme 2.14] *Si $1 \leq r \in \mathbb{N}$, et si $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, on a :*

(1)

$$\sum_{\substack{c_0 \equiv \gamma [M] \\ 1 \leq c_0 \leq Mp^n}} E_j(q^{p^n}, q_M^{c_0} \zeta_M^\delta) = E_{\gamma/M, \delta/M}^{(j)} \text{ et}$$

$$\sum_{\substack{c_0 \equiv \gamma [M] \\ 1 \leq c_0 \leq Mp^n}} E_{d,j}(q^{p^n}, q_M^{c_0} \zeta_M^\delta) = E_{d,\gamma/M,\delta/M}^{(j)}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0} \zeta_M^\beta) = M^r F_{c,\alpha/M,\beta/M}^{(r+1)}$$

Démonstration. (1) La deuxième assertion découle de la première, et la première est un calcul direct par définition.

(2) On démontre l’assertion en prouvant que ces deux formes modulaires p -adiques ont le même q -développement. D’après la proposition (2.10), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0} \zeta_M^\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r F_{c,a_0/Mp^n,\beta/M}^{(1)}(q^{p^n}).$$

Notons la limite à gauche par (\star) .

D’abord, on montre l’égalité pour le terme constant. D’après la proposition (2.10), le terme constant de (\star) et $M^r F_{c,\alpha/M,\beta/M}^{(r+1)}$ sont

$$A_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r (c^2 \zeta(\frac{a_0}{Mp^n}, 0) - c \zeta(\frac{\langle c \rangle a_0}{Mp^n}, 0))$$

et $B_0 = M^r (c^2 \zeta(\frac{\alpha}{M}, -r) - c^{1-r} \zeta(\frac{\langle c \rangle \alpha}{M}, -r))$ respectivement.

On note μ_c la mesure sur \mathbb{Z}_p dont sa transformée d’Amice est

$$\frac{c^2}{T} - \frac{c}{(1+T)^{c-1} - 1}.$$

Un calcul simple montre que,

$$(5.7) \quad \int_{\mathbb{Z}_p} (\frac{\alpha}{M} + x)^k \mu_c(x) = (c^2 \zeta(\frac{\alpha}{M}, -k) - c^{1-k} \zeta(\frac{\langle c \rangle \alpha}{M}, -k));$$

$$\int_{p^n \mathbb{Z}_p} (\frac{\alpha}{M} + x)^k \mu_c(x) = (c^2 \zeta(\frac{\alpha}{p^n M}, -k) - c^{1-k} \zeta(\frac{\langle c \rangle \alpha}{p^n M}, -k)).$$

On constate que A_0 est la somme de Riemann

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r (c^2 \zeta(\frac{a_0}{Mp^n}, 0) - c \zeta(\frac{\langle c \rangle a_0}{Mp^n}, 0)),$$

et donc il coïncide avec l’intégration p -adique $M^r \int_{\mathbb{Z}_p} (\alpha/M + x)^r \mu_c$, qui est exactement B_0 .

Ensuite, on se ramène à montrer l'égalité suivante :

$$(5.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r E_1(q^{p^n}, q_M^{a_0} \zeta_M^\beta) = M^r F_{\alpha/M, \beta/M}^{(r+1)}.$$

On note la limite à gauche par (\star') . En effet, si (5.8) est vrai, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0} \zeta_M^\beta) \\ = M^r c^2 F_{\alpha/M, \beta/M}^{(r+1)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r c E_1(q^{p^n}, q_M^{ca_0} \zeta_M^\beta) \end{aligned}$$

Comme $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on conclut en appliquant le (5.8) à

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r c E_1(q^{p^n}, q_M^{ca_0} \zeta_M^\beta) \\ = c^{-r} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} (ca_0)^r c E_1(q^{p^n}, q_M^{ca_0} \zeta_M^\beta). \end{aligned}$$

Revenons à la démonstration de l'égalité (5.8). Il ne reste qu'à comparer les séries de Dirichlet formelles associées aux q -développements de (\star') et de $M^r F_{\alpha/M, \beta/M}^{(r+1)}$

Soit $F_{a_0/Mp^n, \beta/M}^{(1)}(q) = \sum_{m \in \mathbb{Q}^+} b_m q^m$. D'après la proposition (2.10), la série de Dirichlet formelle à coefficients dans \mathbb{Q}^{cycl} associée à $F_{a_0/Mp^n, \beta/M}^{(1)}(q^{p^n})$ vérifie :

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Q}^+} \frac{b_m}{(p^n m)^s} \\ = p^{-ns} (\zeta(a_0/Mp^n, s) \zeta^*(\beta/M, s) - \zeta(-a_0/Mp^n, s) \zeta^*(-\beta/M, s)). \end{aligned}$$

Soit $\sum_{m \in \mathbb{Q}^+} b_{m,n} m^{-s}$ la série de Dirichlet formelle à coefficients dans \mathbb{Q}^{cycl} associée au q -développement de $\sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r F_{a_0/Mp^n, \beta/M}^{(1)}(q^{p^n})$.

Alors, de la formule (5.9), on a :

$$\begin{aligned}
 (5.10) \quad & \sum_{m \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{b_{m,n}}{m^s} \\
 &= \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r p^{-ns} \left(\zeta\left(\frac{a_0}{Mp^n}, s\right) \zeta^*\left(\frac{\beta}{M}, s\right) - \zeta\left(-\frac{a_0}{Mp^n}, s\right) \zeta^*\left(-\frac{\beta}{M}, s\right) \right) \\
 &= \sum_{\substack{a_0 \equiv \alpha [M] \\ 1 \leq a_0 \leq Mp^n}} a_0^r p^{-ns} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\zeta^*\left(\frac{\beta}{M}, s\right)}{\left(k + \frac{a_0}{Mp^n}\right)^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta^*\left(-\frac{\beta}{M}, s\right)}{\left(k - \frac{a_0}{Mp^n}\right)^s} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{p^n-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha + iM)^r}{\left(kp^n + \frac{\alpha}{M} + i\right)^s} \zeta^*\left(\frac{\beta}{M}, s\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha + iM)^r}{\left(kp^n - \frac{\alpha}{M} - k\right)^s} \zeta^*\left(-\frac{\beta}{M}, s\right) \right).
 \end{aligned}$$

Considérons l’injection de $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$ dans $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}})$. Alors la série de Dirichlet formelle, à coefficients dans $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$, associée au q -développement de (\star) , est la limite p -adique $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{b_{m,n}}{m^s}$ et on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{b_{m,n}}{m^s} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p^n-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha + iM)^r}{\left(kp^n + \frac{\alpha}{M} + i\right)^s} \zeta^*(\beta/M, s) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha + iM)^r}{\left(kp^n - \frac{\alpha}{M} - k\right)^s} \zeta^*(-\beta/M, s) \right) \\
 &= M^r \sum_{i=0}^{p^\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{M} + i\right)^r}{\left(\frac{\alpha}{M} + i + kp^\infty\right)^s} \zeta^*(\beta/M, s) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{M} + i\right)^r}{\left(kp^\infty - \frac{\alpha}{M} - i\right)^s} \zeta^*(-\beta/M, s) \right) \\
 &= M^r \left(\sum_{j \equiv \frac{\alpha}{M} \pmod{\mathbb{Z}}} \frac{1}{j^{s-r}} \zeta^*(\beta/M, s) \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{r+1} \sum_{j \equiv -\frac{\alpha}{M} \pmod{\mathbb{Z}}} \frac{1}{j^{s-r}} \zeta^*(-\beta/M, s) \right) \\
 &= M^r \left(\zeta(\alpha/M, s-r) \zeta^*(\beta/M, s) \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{r+1} \zeta(-\alpha/M, s-r) \zeta^*(-\beta/M, s) \right).
 \end{aligned}$$

C’est la même série de Dirichlet à coefficients dans $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ associée au q -développement de $M^r F_{\alpha/M, \beta/M}^{(r+1)}$.

□

Bibliographie

- [1] Y. AMICE, J. VÉLU, *Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke*. (French) Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), 119–131. Astérisque, Nos. **24-25**, Soc. Math. France, Paris, 1975.
- [2] F. ANDREATTA, *Generalized ring of norms and generalized (φ, Γ) -modules*. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) **39** (2006), 599–647.
- [3] F. ANDREATTA, O. BRINON, *Surconvergence des représentations p -adiques : le cas relatif*. Astérisque **319** (2008), 39–116.
- [4] F. ANDREATTA, A. IOVITA, *Comparison Isomorphisms for smooth formal schemes*. Journal of Math. Inst. of Jussieu (à paraître).
- [5] F. CHERBONNIER, P. COLMEZ, *Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques d'un corps local*. J.A.M.S vol. **12** Number 1 (1999), 241–268.
- [6] P. COLMEZ, *La Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p -adique*. Astérisque **294** (2004).
- [7] P. COLMEZ, *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local*. Annals of Mathematics, vol **148** (1998), 485–571.
- [8] P. COLMEZ, *Zéros supplémentaires de fonctions L p -adiques de formes modulaires*. Algebra and Number Theory, edited by R. Tandon, Hindustan book agency, 2005, 193–210.
- [9] P. DELIGNE, *Formes modularies et représentations l -adiques*. Sémin. Bourbaki, 1968/69, exp. 343, SLN **179** (1971), 139–172.
- [10] G. FALTINGS, *Almost étale extensions*. Astérisque **279** (2002), 185–270.
- [11] K. KATO, *p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*. Astérisque **295** (2004).
- [12] D. KUBERT, S. LANG, *Units in the modular function fields II*. Math. Ann. **218** (1975), 175–189.
- [13] S. LANG, *Elliptic functions*. With an appendix by J. Tate. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1973, xii+326 pp.
- [14] Y. MANIN, *Periods of cusp forms, and p -adic Hecke series*. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **92(134)** (1973), 378–401, 503.
- [15] B. MAZUR, P. SWINNERTON-DYER, *Arithmetic of Weil curves*. Invent. Math. **25** (1974), 1–61.
- [16] B. MAZUR, J. TATE, J. TEITELBAUM, *On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*. Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 1–48.
- [17] T. MIYAKE, *Modular forms*. Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda. Reprint of the first 1989 English edition. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006, x+335
- [18] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT, K. WINGBERG, *Cohomology of number fields*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [19] B. PERRIN-RIOU, *Fonctions L p -adiques des représentations p -adiques*. Astérisque **229** (1995).
- [20] A. ROBERT, *A course in p -adic analysis*. Graduate Texts in Math. **198**, Springer-Verlag, 2000.
- [21] G. ROBERT, *Concernant la relation de distribution satisfaite par la fonction φ associée à un réseau complexe*. Inventiones Math. **100** (1990), 231–257.
- [22] K. RUBIN, *Euler systems*. Annals of Mathematics Studies **147**, Princeton University Press, 2000.
- [23] A. J. SCHOLL, *An introduction to Kato's Euler systems*. In : Galois representations in arithmetic algebraic geometry, ed. A. J. Scholl and R. L. Taylor. Cambridge University Press, 1998, 379–460.
- [24] S. SEN, *Lie algebras of Galois group arising from Hodge-Tate modules*. Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.
- [25] G. SHIMURA, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Reprint of the 1971 original. Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kanô Memorial Lectures, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994, xiv+271.

- [26] J. TATE, *p-divisible groups*. Proc. of a conference on local field, Nuffic summer school at Driebergen, Springer, Berlin, 1967,158–183.
- [27] M. VISHIK, *A non-Archimedean analogue of perturbation theory*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **249** (1979), no. 2, 267–271.
- [28] A. WEIL , *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Reprint of the 1976 original. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999, viii+93 pp.

Shanwen WANG
Université Pierre et Marie Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu
4, Place Jussieu
75005 PARIS, France
E-mail: wetiron1984@gmail.com