JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Axel THUE, traduit et commenté par Fabien PAZUKI

Om en generel i store hele tal uløsbar ligning (Sur une équation générale insoluble en grands nombres entiers)

Tome 27, n° 2 (2015), p. 339-352.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2015__27_2_339_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **27** (2015), 339–352

Om en generel i store hele tal uløsbar ligning (Sur une équation générale insoluble en grands nombres entiers)

par Axel THUE, traduit et commenté par Fabien PAZUKI

À l'occasion du 150ᵉ anniversaire d'Axel Thue.

Résumé. Nous traduisons l'article de Thue [Thue1908], accessible aussi dans [Thue1977] pages 219–231, du norvégien vers le français. (Le texte original est écrit en norvégien *riksmål*, littéralement la « langue du royaume », qui deviendra à partir de 1929 le *bokmål*, la « langue des livres ».) Nous avons choisi de rester au plus près du texte, c'est ainsi que l'ordre, la structure et la tournure des phrases sont essentiellement d'origine. S'il nous a semblé utile d'opter pour un vocabulaire plus moderne à certains endroits, nous avons alors intégré une note en bas de page pour l'indiquer au lecteur. Toutes les notes figurant dans ce texte, qu'elles concernent le contenu linguistique ou mathématique, sont des notes du traducteur.

Abstract. *On a general equation with no solution in large integers.*
We give a translation of Axel Thue's article [Thue1908], also available in [Thue1977] pages 219–231, from Norwegian to French. (The original article is written in *riksmål*, literally the "language of the realm", which in 1929 was renamed *bokmål*, the "language of the books".) We chose to keep as close to the original style, structure and phrasing as possible. If a change has been introduced to modernize the presentation, a footnote indicates this change. All the notes in this translation, both linguistic as well as mathematical, have been made by the translator.

Manuscrit reçu le 6 janvier 2014, accepté le 23 mai 2014.
L'année 2013 est l'année du 150ᵉ anniversaire d'Axel Thue et du 105ᵉ anniversaire de cet article précurseur.
Mots clefs. Thue-Mahler equations, Diophantine equations.
Mathematics Subject Classification. 11D59, 14G05.

Remerciements du traducteur : L'idée d'effectuer cette traduction a germé lors d'un séjour de recherche au Département de Mathématiques de l'Université de Copenhague. Merci aux collègues scandinaves pour leur accueil et merci au CNRS pour son soutien. Merci à Rachel Guesmi, Cyril Mauvillain de la bibliothèque de l'IMB, à Ole Jørgensen et Jesper Lützen de l'Université de Copenhague et à Marte Stapnes de Universitetsforlaget à Oslo. Merci à Gaël Rémond pour ses précieuses contributions. Merci enfin à David Masser pour son intérêt pour ce travail.

*
* *

Théorème. *Si $F(x)$ est un polynôme* [1] *en x irréductible* [2] *quelconque à coefficients entiers et de degré $r > 2$, alors l'équation* [3]

$$q^r F\left(\frac{p}{q}\right) = c, \tag{0.1}$$

où c est un nombre entier arbitraire donné, a seulement un nombre fini de solutions en nombres entiers p et q.

Si c est différent de zéro, alors l'équation n'a qu'un nombre fini de solutions entières, si $F(x)$ n'est pas une puissance d'un polynôme du premier ou du second degré à coefficients entiers. [4]

1.

Si l'on pose [5]

$$(x - \rho)^m = A_1^m(x)\rho^{r-1} + A_2^m(x)\rho^{r-2} + \cdots + A_{r-1}^m(x)\rho + A_r^m(x)$$

où m est un nombre entier positif arbitraire [6], tandis que $F(\rho) = 0$, alors on peut trouver une quantité positive t dépendant seulement des coefficients de $F(x)$ — et donc indépendante de m — telle que chaque coefficient dans chacun des polynômes [7] A_i^m, où $i \in \{1, ..., r\}$, est en valeur absolue inférieur à t^m.

En effet si on écrit

$$\rho^r = a_1\rho^{r-1} + a_2\rho^{r-2} + \cdots + a_{r-1}\rho + a_r \tag{1.1}$$

1. Dans tout le texte, Thue emploie le terme *hel funktion* pour désigner un polynôme.
2. Irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Le nombre q est non nul dans cette notation, mais les dénominateurs sont en fait tous chassés par q^r. L'équation étudiée ici est alors équivalente à $f(p, q) = c$ où f dépend de deux variables.
4. Le polynôme F étant supposé irréductible sur $\mathbb{Q}$ et de degré $r > 2$, le cas $c = 0$ ne fournit aucune solution avec $q \neq 0$. L'unique solution est alors $(p, q) = (0, 0)$.
5. Il n'y a pas de titre de paragraphe dans la version originale. Un titre possible pour ce premier paragraphe est « Fonctions auxiliaires et paramètres ».
6. L'entier m est un paramètre qui sera fixé en toute fin de preuve.
7. Thue ne met pas d'indice en bas ici mais parle des « polynômes A^m ».

alors on obtient :

$$(x-\rho)^{m+1} = (xA_1^m - a_1A_1^m - A_2^m)\rho^{r-1} + (xA_2^m - a_2A_1^m - A_3^m)\rho^{r-2} + \cdots + (xA_{r-1}^m - a_1A_1^m - A_r^m)\rho + (xA_r^m - a_rA_1^m).$$

Si l'on pose de manière analogue [8]

(1.2)

$$\begin{cases} (x-\rho)^n = B_1^0(x)\rho^{r-1} + B_2^0(x)\rho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^0(x)\rho + B_r^0(x) \\ \rho(x-\rho)^n = B_1^1(x)\rho^{r-1} + B_2^1(x)\rho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^1(x)\rho + B_r^1(x) \\ \rho^2(x-\rho)^n = B_1^2(x)\rho^{r-1} + B_2^2(x)\rho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^2(x)\rho + B_r^2(x) \\ \cdots \\ \rho^{r-1}(x-\rho)^n = B_1^{r-1}(x)\rho^{r-1} + B_2^{r-1}(x)\rho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{r-1}(x)\rho + B_r^{r-1}(x) \end{cases}$$

alors on peut de la même façon trouver une quantité positive T indépendante de n telle que chaque coefficient de chacun des polynômes [9] B_j^i, où $i \in \{0, ..., r-1\}$ et $j \in \{1, ..., r\}$, est plus petit que T^n.

Nous remarquons que les coefficients de tous les polynômes B_j^i sont des nombres entiers et que le degré de chaque polynôme B_j^i n'excède pas n. Si nous posons maintenant [10]

$$U(x) = D_1(x)\rho^{r-1} + D_2(x)\rho^{r-2} + \cdots + D_{r-1}(x)\rho + D_r(x), \tag{1.3}$$

où chaque [11] D_j, où $j \in \{1, ..., r\}$, est un polynôme en x, alors il y a en tout $(2k+1)^{(m+1)r} = M$ polynômes U différents — associés aux coefficients des polynômes D_j — lorsque le degré de chaque polynôme D_j n'excède pas m, tandis que chaque coefficient de celui-ci est un nombre entier positif ou négatif qui, en valeur absolue, n'est pas plus grand que l'entier positif k choisi arbitrairement. De (1.2) et (1.3) on tire :

8. Pour un entier n, paramètre qui sera fixé en toute fin de preuve.

9. Thue ne met pas d'indice ici mais parle des « polynômes B ». Notons de plus qu'on a gardé les doubles indices B_j^i comme dans le système d'équations précédent, nulle quantité autre que ρ n'étant élevée à une quelconque puissance.

10. Voici une première fonction auxiliaire.

11. Thue ne met pas d'indice ici mais parle des « polynômes D ».

(1.4)

$$\begin{aligned}(x-\rho)^n U(x) = & \quad [B_1^0 D_r + B_1^1 D_{r-1} + \cdots + B_1^{r-1} D_1]\rho^{r-1} \\ + & \quad [B_2^0 D_r + B_2^1 D_{r-1} + \cdots + B_2^{r-1} D_1]\rho^{r-2} \\ + & \quad \cdots \\ + & \quad [B_{r-1}^0 D_r + B_{r-1}^1 D_{r-1} + \cdots + B_{r-1}^{r-1} D_1]\rho \\ + & \quad [B_r^0 D_r + B_r^1 D_{r-1} + \cdots + B_r^{r-1} D_1] \\ = & \quad G_1(x)\rho^{r-1} + G_2(x)\rho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}(x)\rho + G_r(x)\end{aligned}$$

où [12] pour tout $v \in \{1, ..., r\}$ on a posé $G_v = B_v^0 D_r + B_v^1 D_{r-1} + \cdots + B_v^{r-1} D_1$.

Chaque $G_v(x)$, où $v \in \{1, ..., r\}$, est un polynôme dont le degré n'excède pas $n+m$. De plus aucun coefficient des polynômes G_v n'excède en valeur absolue le plus petit des nombres $r(m+1)kT^n$ ou $r(n+1)kT^n$. Prenons par exemple comme borne le nombre $r(n+1)kT^n = N$. Pour des raisons de commodité nous pouvons volontiers supposer que T^n est irrationnel pour tout n. À chacun des M polynômes U correspondent maintenant des polynômes G bien définis. Si μ est un nombre entier positif qui n'excède pas $n+m$ alors correspondent ainsi aux M polynômes U un même nombre de valeurs égales ou différentes pour le coefficient devant x^μ dans l'un quelconque des polynômes $G_1, G_2, ..., G_{r-2}$, disons G_α.

Tous ces M coefficients se trouvent maintenant entre $-N$ et N. Lorsque h est un entier choisi arbitrairement, nous nous représentons l'intervalle entre $-N$ et N comme coupé en h parties égales, dont la grandeur est donc égale à $\frac{2N}{h}$. Dans l'un de ces intervalles doivent se trouver au moins $\frac{M}{h}$ desdits coefficients [13]. Parmi les M polynômes U, on peut par suite en sélectionner u, où $u \geq \frac{M}{h}$, de sorte que si $E(x)$ est la différence entre deux quelconques de ces u polynômes U, alors dans l'équation

$$(x-\rho)^n E(x) = H_1(x)\rho^{r-1} + \cdots + H_r(x)$$

le coefficient devant x^μ dans H_α est en valeur absolue plus petit que $\frac{2N}{h}$.

Si ensuite x^ν est un monôme différent du susdit x^μ dans l'un quelconque des polynômes $G_1, ..., G_{r-2}$, disons G_β, où β n'est pas nécessairement différent de α, alors correspondent aux u polynômes U choisis autant de valeurs égales ou différentes du coefficient devant ledit monôme x^ν. Dans l'un des

12. Cette précision est rajoutée. On introduit de plus dans la suite l'indice v pour les polynômes G.

13. Par le principe des tiroirs.

susdits h intervalles doivent par suite [14] se trouver au moins $\frac{u}{h}$ soit au moins $\frac{M}{h^2}$ de ces coefficients.

Parmi les u polynômes [15] U choisis, on peut donc en sélectionner à nouveau $\frac{M}{h^2}$, de sorte que si $K(x)$ est la différence entre deux quelconques de ces choix, alors dans l'équation

$$(x-\rho)^n K(x) = L_1(x)\rho^{r-1} + \cdots + L_r(x)$$

le coefficient devant x^ν dans $L_\beta(x)$ est en valeur absolue plus petit que $\frac{2N}{h}$. En appliquant successivement le même procédé à tous les $(m+n+1)(r-2)$ monômes dans les fonctions $G_1, G_2, ..., G_{r-2}$ on arrive au résultat suivant : lorsque $M > h^{(m+n+1)(r-2)}$ on peut, parmi les U choisis, en sélectionner au moins

$$\frac{M}{h^{(m+n+1)(r-2)}}$$

de sorte que, si $U_1(x)$ et $U_2(x)$ sont deux de ces choix avec

$$(x-\rho)^n U_1(x) = G_1^1(x)\rho^{r-1} + G_2^1(x)\rho^{r-2} + \cdots + G_{r-2}^1(x)\rho^2 + G_{r-1}^1(x)\rho + G_r^1(x)$$

$$(x-\rho)^n U_2(x) = G_1^2(x)\rho^{r-1} + G_2^2(x)\rho^{r-2} + \cdots + G_{r-2}^2(x)\rho^2 + G_{r-1}^2(x)\rho + G_r^2(x),$$

alors dans l'équation

$$(x-\rho)^n [U_1(x) - U_2(x)] = (x-\rho)^n R(x) =$$

$$[G_1^1 - G_1^2]\rho^{r-1} + [G_2^1 - G_2^2]\rho^{r-2} + \cdots + [G_{r-2}^1 - G_{r-2}^2]\rho^2 + [G_{r-1}^1 - G_{r-1}^2]\rho$$

$$+[G_r^1 - G_r^2] = C_1(x)\rho^{r-1} + C_2(x)\rho^{r-2} + \cdots + C_{r-2}(x)\rho^2 + C_{r-1}(x)\rho + C_r(x)$$

chaque coefficient dans chacun des polynômes $C_1, ..., C_{r-2}$ sera en valeur absolue plus petit que $\frac{2N}{h}$.

Si ici $h > 2N$, tous les coefficients doivent par suite être nuls s'ils ne sont pas des fractions [16]. On a alors $(x-\rho)^n R(x) = C_{r-1}(x)\rho + C_r(x)$. Si, par suite, pour n donné les nombres m, k et h sont choisis tels que

$$2r(n+1)kT^n < h < (2k+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}}$$

avec k suffisamment grand pour que

$$(2k+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}} > (2r)(n+1)kT^n + 1 \tag{1.5}$$

et donc pour qu'il existe un h de l'espèce susdite, alors on obtient de la manière précédente une équation

$$\rho Q(x) - P(x) = (x-\rho)^n R_m(x) \tag{1.6}$$

14. Par le principe des tiroirs.
15. Ce mot est rajouté ici.
16. Les coefficients sont nuls ou non entiers.

$$= (x-\rho)^n[f_1(x)\rho^{r-1} + f_2(x)\rho^{r-2} + \cdots + f_{r-1}(x)\rho + f_r(x)]$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes à coefficients entiers, tous de valeur absolue $< 2r(n+1)kT^n$, dont le degré n'excède pas $n+m$, tandis que les $(f_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}$ sont des polynômes [17] dont le degré n'est pas plus grand que m et dont chaque coefficient en valeur absolue n'est pas plus grand que $2k$.

L'équation [18] (1.5) peut se résoudre, si l'on peut satisfaire la condition

$$k^{\frac{(m+1)r}{(n+m+1)(r-2)}} > kW^n,$$

c'est-à-dire

$$k > W^{n\frac{1+\frac{n}{m+1}}{\frac{2}{r-2}-\frac{n}{m+1}}} \tag{1.7}$$

où W est une quantité positive [19] fixée $> T$ indépendante de n, tandis que

$$m > \frac{r-2}{2}n - 1.$$

2.

Les polynômes [20] $P(x)$ et $Q(x)$ ne peuvent être tous deux nuls pour toutes les valeurs de x. En effet, les deux polynômes U_1 et U_2 nommés ci-dessus seraient alors identiques. De (1.6) on tire

$$\rho Q(x) - P(x) = (x-\rho)^n R_m(x)$$

$$\rho Q'(x) - P'(x) = (x-\rho)^{n-1}[(x-\rho)R_m'(x) + nR_m(x)]$$

ou encore

$$P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) = (x-\rho)^{n-1}[-Q'(x-\rho)R_m + Q((x-\rho)R_m' + nR_m)]$$

$$= (x-\rho)^{n-1}[nQR_m + (x-\rho)(QR_m' - Q'R_m)].$$

Comme $F(x)$ est irréductible, on a donc

$$P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) = F(x)^{n-1}S(x) \tag{2.1}$$

où $S(x)$ est un polynôme, dont le degré n'excède pas

$$2(n+m-1) - r(n-1) = 2m - (r-2)(n-1).$$

17. On a rajouté les indices ici.
18. Ce mot est rajouté ici.
19. Concrètement, on pourra par exemple poser $W = 5rT$.
20. Il n'y a pas de titre dans la version originale, on peut penser à « Lemme de zéros et fin de la preuve ». On ne trouvera pas de « lemme de zéros » clairement délimité dans cette section, mais la stratégie est bien celle-ci : on mène une étude sur les polynômes auxiliaires, dont on estime le nombre de zéros pour trouver des conditions sur les paramètres du problème, conditions qui permettront de conclure la preuve du théorème par un raisonnement par l'absurde.

Si

$$m < (r-1)n \tag{2.2}$$

alors $S(x)$ ne peut pas être nul pour toute valeur de x. En effet, dans ce cas on aurait, lorsque PQ n'est pas identiquement nul

$$\frac{P'}{P} = \frac{Q'}{Q}$$

donc $P(x) = d_0 Q(x)$ où d_0 est une constante rationnelle[21]. D'après (1.6) on trouverait alors

$$(\rho - d_0)Q(x) = (x-\rho)^n R_m(x)$$

et $Q(x)$ serait aussi divisible par $F(x)^n$ donc $n + m \geq rn$ ce qui contredit la condition posée sur m.

Lorsque $m < (r-1)n$, aucun des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ ne peut être nul pour toutes les valeurs de x car, dans le cas contraire, l'autre polynôme serait d'après (1.6) divisible par $F(x)^n$. Désignons le degré de $S(x)$ par γ. Nous avons alors

$$\gamma \leq 2m - (r-2)(n-1). \tag{2.3}$$

Si p et q désignent maintenant deux nombres entiers arbitraires, alors on ne peut pas toujours avoir

$$\frac{d^a}{dx^a}P\Big(\frac{p}{q}\Big)\frac{d^b}{dx^b}Q\Big(\frac{p}{q}\Big) - \frac{d^b}{dx^b}P\Big(\frac{p}{q}\Big)\frac{d^a}{dx^a}Q\Big(\frac{p}{q}\Big) = 0$$

lorsque a est l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, 3, ..., \gamma, \gamma+1$ et de même pour b. En effet on aurait dans ce cas

$$\frac{d^\delta}{dx^\delta}\Big[P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x)\Big]_{x=\frac{p}{q}} = \frac{d^\delta}{dx^\delta}\Big[F^{n-1}(x)S(x)\Big]_{x=\frac{p}{q}} = 0$$

lorsque δ est égal à une quelconque des valeurs $0, 1, 2, 3, ..., \gamma$et $F(x)^{n-1}S(x)$, donc par là même $S(x)$, aurait ainsi $\gamma + 1$ racines égales $\frac{p}{q}$.

Il existe donc dans chaque cas deux nombres entiers a et b plus petits[22] que $\gamma + 2$ et donc plus petits que $(2m+1) - (r-2)(n-1)$, de sorte que dans les équations

$$\rho\frac{d^a}{dx^a}Q(x) - \frac{d^a}{dx^a}P(x) = \frac{d^a}{dx^a}[(x-\rho)^n R_m(x)],$$

$$\rho\frac{d^b}{dx^b}Q(x) - \frac{d^b}{dx^b}P(x) = \frac{d^b}{dx^b}[(x-\rho)^n R_m(x)],$$

21. La notation d de la version originale a évolué en d_0 pour différencier ce nombre du symbole de dérivation utilisé peu après.

22. Thue sera plus précis sur ces inégalités tour à tour strictes ou larges dans la suite de l'argument.

on ait [23]

$$P^a\Big(\frac{p}{q}\Big)Q^b\Big(\frac{p}{q}\Big) - P^b\Big(\frac{p}{q}\Big)Q^b\Big(\frac{p}{q}\Big) \neq 0.$$

Nous allons examiner de plus près les deux valeurs d'approximations différentes que l'on obtient pour ρ lorsque l'on pose ici $x = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une valeur d'approximation pour ρ choisie indépendamment du n choisi. Nous voyons tout d'abord que tous les coefficients dans $Q^a(x)$ et $P^a(x)$ sont divisibles par $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot a$ et que tous les coefficients dans $Q^b(x)$, $P^b(x)$ sont divisibles par $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot b$. Lorsque nous posons

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot a}\frac{d^a}{dx^a}[(x-\rho)^n R_m(x)] = (x-\rho)^{n-a}A(x)$$

et

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot b}\frac{d^b}{dx^b}[(x-\rho)^n R_m(x)] = (x-\rho)^{n-b}B(x),$$

où le degré de $A(x)$ et $B(x)$ n'excède pas m, il s'agit maintenant de trouver les bornes pour les valeurs absolues de $A(x)$ et $B(x)$.

Lorsque δ est l'un quelconque des nombres a et b, nous obtenons

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot \delta}\Big[\rho\frac{d^\delta}{dx^\delta}Q(x) - \frac{d^\delta}{dx^\delta}P(x)\Big] = \tag{2.4}$$

$$\frac{(x-\rho)^{n-\delta}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot \delta}\Big[n(n-1)...(n-\delta+1)R_m(x) + \cdots$$

$$\frac{\delta(\delta-1)...(\delta-h+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot h}n(n-1)...(n-[\delta-n]+1)(x-\rho)^h R_m^h(x) + \cdots$$

$$+(x-\rho)^\delta R_m^\delta(x)\Big] = (x-\rho)^{n-\delta}\Big[\frac{n(n-1)...(n-\delta+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot \delta}R_m(x) + \cdots$$

$$+\frac{n(n-1)...(n-[\delta-n]+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (\delta-h)}\frac{R_m^h(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot h}(x-\rho)^h + \cdots$$

$$+\frac{R_m^\delta(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot \delta}(x-\rho)^\delta\Big] = \rho X_\delta(x) - Y_\delta(x)$$

où $X_\delta(x)$ et $Y_\delta(x)$ désignent deux polynômes de degré $(n+m-\delta)$ en x et à coefficients entiers, dont chacun en valeur absolue est plus petit que

$$\frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot ... \cdot \frac{m+n-\delta+1}{\delta} \cdot 2r(n+1)kT^n < 2^{m+n+1}r(n+1)kT^n.$$

23. À cet endroit l'auteur opère un changement de notation, on lira donc $P^a(x) = \frac{d^a}{dx^a}P(x)$ et $P^b(x) = \frac{d^b}{dx^b}P(x)$.

Si (0.1) a une infinité de solutions en nombres entiers p et q, alors $F(x)$ a une racine réelle ρ. Nous pouvons volontiers supposer, sans que la généralité en soit diminuée, que $\rho > 1$. En effet si $F(x)$ n'avait aucune telle racine alors ce serait le cas avec le polynôme $x^r F(\frac{\pm 1}{x}) = F_1(x)$ ou avec $F(-x) = F_2(x)$ où F_1 et F_2 sont aussi des polynômes de même degré que $F(x)$. Soient alors $\frac{p}{q}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ deux fractions satisfaisant (0.1), *i.e.* :

$$q^r F\Big(\frac{p}{q}\Big) = c, \qquad q_1^r F\Big(\frac{p_1}{q_1}\Big) = c. \tag{2.5}$$

Nous posons maintenant $x = \frac{p}{q}$ dans (2.4) et obtenons alors

$$\begin{aligned}\rho X_\delta - Y_\delta = (p - q\rho)^{n-\delta}\Big[&\frac{n(n-1)...(n-\delta+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot \delta} q^m R_m\Big(\frac{p}{q}\Big) + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)...(n-[\delta-h]+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot(\delta-h)}\frac{R_m^h(\frac{p}{q})q^{m-h}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot h}(p-q\rho)^h + \\ &\cdots + \frac{R^\delta(\frac{p}{q})q^{m-\delta}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot \delta}(p-q\rho)^\delta\Big]\end{aligned} \tag{2.6}$$

où $X_\delta = q^{n+m-\delta} X_\delta(\frac{p}{q})$ et $Y_\delta = q^{n+m-\delta} Y_\delta(\frac{p}{q})$. Les quantités[24] X_δ et Y_δ sont donc deux nombres entiers. Puisque $F(x)$ n'a pas de racines multiples, on tire de (2.5)

$$p - q\rho = \frac{\varepsilon_0}{q^{r-1}}, \tag{2.7}$$

$$p_1 - q_1\rho = \frac{\varepsilon_1}{q_1^{r-1}} \tag{2.8}$$

où ε_0 et ε_1 sont deux quantités qui en valeur absolue sont majorées par une borne fixée, déterminée par c et les coefficients de $F(x)$, qui ne varie donc pas avec le choix des nombres p, q, p_1 et q_1. Lorsque q dépasse une certaine petite valeur, il vient

$$|(p - q\rho)^h| < 1.$$

Il vient ensuite

$$\Big|\frac{R_m^h(\frac{p}{q})q^{m-h}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot h}\Big|$$

$$< \frac{m(m-1)...(m-h+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot h}\cdot 2k\rho^{r-1}\cdot r\Big[p^{m-h} + p^{m-h-1}q + \cdots + q^{m-h}\Big].$$

Ici on a

$$\frac{m(m+1)...(m-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot h} < (1+1)^m = 2^m.$$

24. Ce mot est rajouté ici.

En outre lorsque p et q sont suffisamment grands pour que $\frac{p}{q} < \rho+1$, on a

$$p^{m-h} + p^{m-h-1}q + \cdots + q^{m-h}$$
$$= q^{m-h}\left[1 + \left(\frac{p}{q}\right) + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{p}{q}\right)^{m-h}\right] < q^{m-h}(\rho+2)^{m-h}$$

d'où

$$\left|\frac{R_m^h(\frac{p}{q})q^{m-h}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot h}\right| < k[2r\rho^{r-1}2^m(\rho+2)^m]q^m < k\zeta^m q^m,$$

où ζ est une quantité fixe indépendante de m et h. Nous obtenons donc

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\delta+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \delta} q^m R_m\left(\frac{p}{q}\right) + \cdots +$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-[\delta-h]+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (\delta-h)}\frac{R_m^h(\frac{p}{q})q^{m-h}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot h}(p-q\rho)^h + \cdots + \frac{R^\delta(\frac{p}{q})q^{m-\delta}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \delta}(p-q\rho)^\delta$$
$$< k\zeta^m q^m\Big[1 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-[\delta-h]+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (\delta-h)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-\delta+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \delta}\Big] < k\zeta^m q^m 2^n.$$

Si, comme nous l'avons supposé, $m < (r-1)n$ tandis que p et q satisfont (0.1) et la condition $|p - q\rho| < 1$ alors nous obtenons l'équation

$$\rho X_\delta - Y_\delta = (p-q\rho)^{n-\delta}C^n k q^m, \tag{2.9}$$

où C est une quantité qui en valeur absolue est majorée par une borne fixe, indépendante de n et δ.

De la même manière, nous voyons que chacun des nombres entiers positifs ou négatifs X_δ et Y_δ est en valeur absolue plus petit que

$$2^{m+n+1}r(n+1)T^n k(\rho+2)^{n+m-\delta}q^{n+m-\delta},$$

donc plus petit que

$$D_0^n k q^{n+m-\delta},$$

où D_0 est une quantité positive[25], qui ne varie pas avec n, m et δ.

De (2.9), (2.7) et (2.8) on tire

$$\Big[\frac{p_1}{q_1} - \frac{\varepsilon_1}{q_1^r}\Big]X_\delta - Y_\delta = \frac{\varepsilon_0^{n-\delta}C_0^n k q^m}{q^{(r-1)(n-\delta)}},$$

donc

$$p_1 X_\delta - q_1 Y_\delta = \frac{D_1^n k q^{n+m-\delta}}{q_1^{r-1}} + \frac{C_1^n k q_1}{q^{(r-1)(n-\delta)-m}},$$

où D_1 et C_1 sont en valeur absolue plus petits que respectivement deux quantités positives fixées D et C.

25. On a changé la notation $D_{\prime\prime}$ en D_0, et plus tard $C_{\prime\prime}$ en C_0 ainsi que $D_\prime$ en D_1 et $C_\prime$ en C_1.

Il s'agit maintenant de décider si n et m peuvent être choisis tels que l'on ait simultanément

$$\frac{D^n k q^{n+m-\delta}}{q_1^{r-1}} < \frac{1}{2}, \tag{2.10}$$

$$\frac{C^n k q_1}{q^{(r-1)(n-\delta)}} < \frac{1}{2}$$

pour toutes les valeurs entières non négatives de $\delta < \gamma + 2$. Dans ce cas on aurait en effet

$$|p_1 X_\delta - q_1 Y_\delta| < 1$$

donc, puisque X_δ et Y_δ sont des nombres entiers, on obtient [26]

$$\frac{X_\delta}{Y_\delta} = \frac{p_1}{q_1}$$

c'est-à-dire $X_a Y_b - X_b Y_a = 0$, ce qui est impossible [27]. Nous remarquons que, comme

$$\delta \leq \gamma + 1 \leq 2m + 1 - (r-2)(n-1),$$

les inégalités (2.10) sont satisfaites, si l'on peut satisfaire les nouvelles inégalités

$$\frac{D^n k q^{n+m}}{q_1^{r-1}} < \frac{1}{2}, \tag{2.11}$$

$$\frac{C^n k q_1}{q^{(r-1)(n+(r-2)(n-1)-2m-1)-m}} < \frac{1}{2}$$

pourvu que $(r-1)[(n-1)(r-1)-2m] > m$. Si les inégalités (2.11) peuvent être satisfaites lorsque l'on écrit partout dans (2.11) à la place de m la quantité

$$(r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta}$$

où θ est un nombre arbitraire $> 4 - \frac{2}{r}$ alors elles seront aussi satisfaites lorsque l'on pose pour m dans (2.11) la partie entière de [28]

$$(r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta}.$$

Si nous remplaçons m par la valeur ci-dessus dans (2.11), nous obtenons les inégalités

26. On a raccourci la phrase.

27. C'est ici la conclusion de la preuve du théorème. Le reste du texte présente des calculs permettant de faire ces bons choix de paramètres n et m.

28. Thue utilise la formulation « le plus grand nombre entier qui est contenu dans » pour désigner la partie entière.

$$\frac{D^n k q^{[(n-1)(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta})+1]}}{q_1^{r-1}} < \frac{1}{2}, \tag{2.12}$$

$$\frac{C^n k q_1}{q^{(n-1)(\frac{r}{2}-\frac{2r-1}{\theta})}} < \frac{1}{2}.$$

Pour θ donné, on tire de (1.7) une borne pour k. La condition que $m < (r-1)n$ est remplie lorsque

$$1 < n\Big(\frac{r}{2} - \frac{1}{\theta}\Big) + \Big(\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}\Big).$$

Nous avons maintenant

$$m + 1 > (r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta} = (n-1)\Big[\frac{r-2}{2} + \frac{1}{\theta}\Big].$$

C'est pourquoi, si nous choisissons

$$k > W^{n\frac{1+\frac{n}{(r-2)\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{\theta}}}{\frac{2}{r-2}-\frac{n}{(r-2)\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{\theta}}}}$$

c'est-à-dire

$$k > W^{n\frac{1+\frac{\theta}{2}r+\frac{\theta}{n-1}}{\frac{2}{r-2}-\frac{\theta}{n-1}}},$$

alors (1.7) sera également satisfaite lorsque l'on choisit pour m la partie entière[29] de $(n-1)[\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}]$. Si maintenant θ est une quantité quelconque donnée aussi grande soit-elle, alors nous devons nous restreindre aux n tels que $\frac{\theta}{n-1}$ soit strictement inférieur[30] à $\frac{2}{r-2}$. Nous pouvons alors satisfaire (1.7) en choisissant $k = Z^{n\theta}$ où Z est une quantité fixée, qui ne varie pas avec n, lorsque n dépasse une certaine valeur minimale déterminée par θ.

Il s'agit maintenant seulement de trouver un n tel que l'on ait simultanément

$$q_1^{r-1} > 2D^n Z^{n\theta} q^{[(n-1)(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta})+1]},$$

$$q^{(n-1)(\frac{r}{2}-\frac{2r-1}{\theta})} > 2C^n Z^{n\theta} q_1.$$

Ici on doit avoir

29. Là encore, Thue écrit « le plus grand nombre entier qui est contenu dans » pour désigner la partie entière.

30. Thue écrit « une fraction de » pour signifier « strictement inférieur à ».

$$(2.13)\quad \frac{\log q_1 + \log 2C + \theta \log Z}{[\frac{r}{2} - \frac{2r-1}{\theta}] \log q - \log C - \theta \log Z} < n-1 < \frac{(r-1)\log q_1 - \log 2D - \theta \log Z - \log q}{[\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}] \log q + \theta \log Z + \log D}.$$

Si maintenant $r > 2$, on peut choisir un θ positif assez grand pour que

$$\frac{\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}}{\frac{r}{2} - \frac{2r-1}{\theta}} < r - 1.$$

Mais, si (0.1) avait une infinité de solutions en nombres entiers, alors on pourrait en déterminer deux couples[31] (p, q) et (p_1, q_1) de sorte que la différence

$$\frac{(r-1)\log q_1 - \log q - \log 2D - \theta \log Z}{[\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}] \log q + \theta \log Z + \log D} - \frac{\log q_1 + \log 2C + \theta \log Z}{[\frac{r}{2} - \frac{2r-1}{\theta}] \log q - \log C - \theta \log Z}$$

soit plus grande que 1 et que simultanément le second terme soit plus grand qu'une quantité positive arbitraire. Mais il y a un nombre entier $n-1$, plus grand qu'une quantité donnée, entre les deux bornes de (2.13). Puisque les conditions de (2.10) sont ainsi satisfaites, notre théorème est donc démontré[32].

Nordstrand[33], le 2 janvier 1908

Axel Thue

Note complémentaire

Ci-dessus[34] nous avons donc démontré le théorème suivant :

Si θ est une quantité positive arbitrairement choisie, disons > 4, tandis que $r > 2$, alors on peut pour tout n au-delà d'une certaine borne déterminer des polynômes $P_n(x)$, $Q_n(x)$ et $R_n(x)$ de telle sorte que $\rho Q_n(x) - P_n(x) = (x-\rho)^{2n+1} R_n(x)$ où les coefficients de P_n et Q_n sont des nombres entiers,

31. On a rajouté ce mot.

32. L'argumentation générale repose donc sur le fait très classique qu'il n'existe pas d'entier non nul de valeur absolue strictement inférieure à 1.

33. Nom propre signifiant, littéralement, la plage du nord.

34. Cette note figure sous forme de post-scriptum dans l'article original.

le degré de R_n est égal à la partie entière de [35]

$$n\Big[r - 2 + \frac{2}{\theta}\Big]$$

et chaque coefficient dans les trois polynômes est en valeur absolue plus petit que H^n, où H est une quantité positive, qui est déterminée seulement par θ et les coefficients de $F(x)$.

Nous montrerons dans un nouveau mémoire [36] comment nous pouvons généraliser significativement notre énoncé principal grâce à ce théorème avec le raisonnement ci-dessus et en déduire une borne pour les numérateurs dans le développement en fractions continues de ρ.

A. T.

Imprimé le 12 décembre 1908.

Bibliographie

[Thue1908] A. Thue, *Om en generel i store hele tal uløsbar ligning*, Videnskabs-Selskabets Skrifter, I. Math.-Naturv. Klasse **7** (1908). Udgivet for Fridtjof Nansens Fond., Christiania [37]. I komission hos Jacob Dybwad, 1908.

[Thue1909] A. Thue, *Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **135** (1909), 284–305.

[Thue1977] A. Thue, *Selected mathematical papers*, with an introduction by Carl Ludwig Siegel and a biography by Viggo Brun. Edited by Trygve Nagell, Atle Selberg, Sigmund Selberg, and Knut Thalberg. Universitetsforlaget [38], Oslo, (1977).

Fabien Pazuki
Institut de Mathématiques de Bordeaux
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex

et

Université de Copenhague
Universitetsparken 5
1311 Copenhague
Danemark
E-mail : `fabien.pazuki@math.u-bordeaux.fr`
URL : `http://www.math.u-bordeaux.fr/~fpazuki/`

35. Thue écrit littéralement « le plus grand nombre entier qui se trouve dans (...). »

36. Voici l'annonce du célèbre article [Thue1909]. On remarquera qu'il y a presque un an entre la rédaction du texte de cet article et l'impression finale. La note est vraisemblablement rajoutée au moment de l'impression.

37. Christiania a été le nom de la ville d'Oslo entre 1624 et 1924.

38. Presse universitaire.