JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

PIERRE DÈBES

Groupes de Galois sur $K(T)$

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 2, n° 2 (1990), p. 229-243

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_2_229_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **2** *(1990), 229–243*

Groupes de Galois sur $K(T)$

par PIERRE DÈBES

Soit K un corps de caractéristique 0. On dit qu'un groupe fini G a la propriété Gal_K, ce qu'on notera en abrégé $\mathrm{Gal}_K(G)$ s'il existe une extension galoisienne E/K de K de groupe de Galois $G(E/K) = G$. Le "problème inverse de la théorie de Galois" est l'étude de la conjecture suivante.

CONJECTURE 1. Tout groupe fini G a la propriété $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$.

Le cas des goupes abéliens est facile : on utilise des extensions cyclotomiques. Le cas résoluble, beaucoup plus difficile, a été traité par Shafarevitch [Sha]. Le groupe symétrique S_n et le groupe alterné A_n sont d'autres exemples classiques, dus à Hilbert [Hi].

[Le groupe symétrique S_n a une action naturelle sur le corps $\mathbb{Q}(Y_1,...,Y_n)$. Le sous-corps fixé par cette action est le corps $\mathbb{Q}(T_1,...,T_n)$ engendré par les fonctions symétriques élémentaires de $Y_1,...,Y_n$. C'est une extension transcendante pure de $\mathbb{Q}$. On peut donc spécialiser rationnellement les indéterminées $T_1,...,T_n$ de telle façon que l'extension résiduelle (de $\mathbb{Q}$) correspondante soit de même groupe de Galois que l'extension $\mathbb{Q}(Y_1,...,Y_n)/\mathbb{Q}(T_1,...,T_n)$, i.e., S_n.]

L'argument final de la construction s'appuie sur le théorème d'irréductibilité de Hilbert, qui, sous sa forme la plus simple énonce que, si $P(T,Y)$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}(T)[Y]$, alors, pour une infinité de nombres rationnels t, le polynôme $P(t,Y)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[Y]$.

En particulier, pour tout groupe G, on a :

$$\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}(T)}(G) \Rightarrow \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(G). \tag{1}$$

C'est par ce biais qu'on aborde le cas non résoluble. On transpose ainsi le problème sur le corps $\mathbb{Q}(T)$ où on trouve un angle d'attaque géométrique. On sait en effet qu'une extension de $\mathbb{Q}(T)$, si elle est régulière sur $\mathbb{Q}$, correspond à un revêtement, défini sur $\mathbb{Q}$, de la droite projective $\mathbf{P}_1$. Rappelons qu'une extension $E/K(T)$ est dite régulière sur K si le corps K est algébriquement fermé dans E, i.e., $E \cap \overline{K} = K$. On dira qu'un groupe fini G a la propriété RGal_K s'il existe une extension galoisienne de $K(T)$, régulière sur K et de groupe de Galois G.

Manuscrit reçu le 9 juillet 1990

CONJECTURE 2. Tout groupe fini G a la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbb{Q}}$.

Note. Le Conj.2 s'énonce de façon équivalente : tout groupe fini G a la propriété RGal_K pour tout corps K de caractéristique 0.

La Conj.2 entraîne la Conj.1. D'après [Hi], elle est vraie pour le groupe symétrique S_n et le groupe alterné A_n. Elle l'est également pour les groupes abéliens [Se3;Ch5]. Citons aussi le résultat de Shih ([Shi1],[Shi2]) : le groupe $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ a la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbb{Q}}$ si p est un nombre premier vérifiant l'une des conditions suivantes :

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = -1; \left(\frac{3}{p}\right) = -1; \left(\frac{7}{p}\right) = -1$$

[Shih utilise l'action de Galois sur les points de p-torsion d'une courbe elliptique. Si E désigne une courbe elliptique définie sur un corps K, considérons $E[p]$ le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel des points de p-torsion de E. L'action de $G(\overline{K}/K)$ sur $E[p]$ induit un homomorphisme

$$G(\overline{K}/K) \to PGL_2(\mathbb{F}_p)$$

Sous une certaine condition sur E et p, on peut "tordre" cette représentation de $G(\overline{K}/K)$ de façon à ce qu'elle prenne ses valeurs dans $PSL_2(\mathbb{F}_p)$. La donnée "courbe elliptique $+p$-torsion" est paramétrée par la courbe modulaire $X_0(p)$. A l'aide de cette description, on arrive à montrer que dans la précédente construction, on peut prendre $K = \mathbb{Q}(T)$ (voir [Se3;Ch6] pour des détails).]

Les travaux de Shih datent du milieu des années 70. C'est quelques années plus tard qu'apparaît la méthode dite "de rigidité". Cette méthode a permis une avancée importante du problème dans le cas des groupes simples non abéliens. Les résultats sont de deux types : une version forte où on montre qu'un groupe G a la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbb{Q}}$ et une seconde version plus faible où on démontre seulement la propriété RGal_K pour $K = \mathbb{Q}^{ab}$, la cloture abélienne de $\mathbb{Q}$. Pour cette seconde version, les résultats sont presque complets : il ne manque essentiellement que les deux familles de groupes simples ${}^2B_2$ et ${}^2F_4$. En revanche, ils sont beaucoup plus partiels pour la première : la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbb{Q}}$ a été démontrée pour

- Le groupe alterné A_n
- 23 des 24 groupes sporadiques (manque le groupe de Mathieu M_{24})
- Quelques unes des familles classiques de groupes simples comme $\mathrm{PSL}_2, \mathrm{PSL}_3, \mathrm{PSU}_3, \mathrm{PSp}_4$, quand le corps de base est $\mathbb{F}_p$ où p est un nombre premier devant vérifier de surcroît certaines conditions (du type (2))
- Quelques autres groupes épars : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{25}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^2})$ si $p = \pm 2$ [mod 5],...

On consultera [Ma1], [Ma2] et [Ma3] pour un point précis des résultats.

La rigidité impose diverses contraintes à la ramification des extensions cherchées. On commence par fixer les points de ramification de ces extensions. Soient $t_1, ..., t_r$ r points distincts dans $\mathbf{P}_1(\overline{K})$ et Ω l'extension algébrique maximale de $\overline{K}(T)$ non ramifiée en dehors de $t_1, ..., t_r$. L'extension $\Omega/K(T)$ est galoisienne ; son groupe de Galois se note Π^{alg} : c'est le groupe fondamental algébrique de $\mathbf{P}_1(\overline{K})\backslash\{t_1, ...t_r\}$.

Si le diviseur $(t_1) + ... + (t_r)$ de $\mathbf{P}^1$ est K-rationnel, l'extension $\Omega/K(T)$ est également galoisienne. On note Π_K son groupe de Galois. La théorie de Galois fournit la suite exacte :

$$(3) \qquad 1 \longrightarrow \Pi^{alg} \longrightarrow \Pi_K \longrightarrow \Lambda_K \longrightarrow 1$$

où $\Lambda_K = G(\overline{K}/K)$

Étant donné un groupe G, la propriété $\mathrm{Gal}_{K(T)}(G)$ équivaut à l'existence d'un homomorphisme $\Phi : \Pi_K \to G$ surjectif ; la propriété RGal_K est satisfaite si de plus la restriction de Φ à Π^{alg} reste surjective.

On fait ensuite les deux observations suivantes.

1- La construction d'un homomorphisme surjectif $\varphi : \Pi^{alg} \to G$ ne pose pas de problèmes. En effet, la structure du groupe Π^{alg} est bien connue. Notons Π le groupe libre à r générateurs $x_1, ..., x_r$ avec la relation $x_1...x_r = 1$; on reconnait le groupe fondamental topologique de $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})\backslash\{t_1, ..., t_r\}$. Le groupe Π^{alg} est isomorphe au complété profini $\hat{\Pi}$ du groupe Π, i.e., la limite projective des quotients de Π par des sous-groupes normaux d'indice fini. Plus précisément, il existe un isomorphisme entre ces deux groupes qui envoie chacun des x_i sur un générateur d'un groupe d'inertie au dessus de t_i de l'extension $\Omega/\overline{K}(T)$ ([Se3; Th.7.5 p. 69]).

On définit φ en posant $\varphi(x_i) = g_i, i = 1, ..., r$ où $g_1, ..., g_r$ sont des générateurs de G vérifiant $g_1...g_r = 1$. Il suffit donc de choisir r suffisamment grand.

[**Structure des groupes d'inertie.** Considérons une extension galoisienne finie $Y/\overline{K}(T)$ de groupe de Galois G, non ramifiée en dehors de $t_1, ..., t_r$. Les groupes d'inertie au dessus d'un point de ramification t_i sont cycliques et deux à deux conjugués dans G. Notons, pour $i = 1, ..., r$, e_i leur ordre. La théorie des corps locaux ou plus simplement l'utilisation de séries de Puiseux montre que, pour $i = 1, ..., r$ et pour chaque groupe d'inertie I au dessus de t_i, il y a un isomorphisme compatible avec l'action de Λ_K, entre I et le groupe μ_{e_i} des racines de l'unité d'ordre e_i. Choisissons un système $(z_n)_n$ cohérent de racines de l'unité (i.e., $(z_{nm})^m = z_n$ pour tous n, m) ; cela permet de munir chacun des groupes d'inertie d'un générateur "canonique". Alors on

peut demander à l'isomorphisme $\hat{\Pi} \to \Pi^{alg}$ d'envoyer x_i sur le générateur "canonique" d'un des groupes d'inertie au dessus de t_i.]

Il s'agit de voir maintenant à quelle condition l'homomorphisme φ se prolonge à Π_K.

2 - La suite exacte (3) est scindée,

[pour tout $t_0 \in \mathbb{P}_1(K)\{t_1, ..., t_r\}$, Ω se plonge dans $\overline{K}((T-t_0))$ où Λ_K opère naturellement. L'action induite sur Ω définit une section $\Lambda_K \to \Pi_K$ de l'homomorphisme $\Pi_K \to \Lambda_K$.]

de sorte que le groupe Π_K est isomorphe au produit semi-direct $\Pi^{alg} \times^s \Lambda_K$; l'action de $\tau \in \Lambda_K$ sur Π^{alg} sera notée $x \to x^\tau$. On vérifie sans peine qu'un homomorphisme de groupes $\varphi : \Pi^{alg} \to G$ se prolonge au produit semi-direct $\Pi^{alg} \times^s \Lambda_K$ si et seulement si il existe un morphisme $\tau \to \varphi_\tau$ de Λ_K dans G qui vérifie la condition de compatibilité suivante :

$$(4) \qquad \varphi(x^\tau) = \varphi_\tau \varphi(x)(\varphi_\tau)^{-1} \text{ pour tout } x \in \Pi^{alg} \text{ et tout } \tau \in \Lambda_K.$$

On obtient en définitive le critère suivant.

THÉORÈME 1. *Un groupe fini G a la propriété* RGal_K *ssi il existe*

- *un entier $r > 0$, un diviseur K-rationnel de $\mathbb{P}_1(\overline{K})$, $t_0 \in \mathbb{P}_1(K)\backslash\{t_1, ..., t_r\}$*
- *des éléments $g_1, ..., g_r$ de G engendrant G et de produit $g_1 ... g_r = 1$*
- *un morphisme de groupes* $\begin{cases} \Lambda_K \to G \\ \tau \to \varphi_\tau \end{cases}$

tels que le morphisme $\varphi : \Pi^{alg} \to G$ défini par $\varphi(x_i) = g_i, i = 1, ..., r$ vérifie :

$$(5) \qquad \varphi(x_i^\tau) = \varphi_\tau g_i (\varphi_\tau^{-1}) \text{ pour tout } i = 1, ..., r \text{ et tout } \tau \in \Lambda_K.$$

Note. Si $(\varphi_\tau)_\tau$ est une famille d'éléments de G vérifiant (5), la famille $((\varphi_{\tau\tau'}^{-1}(\varphi_\tau)(\varphi_{\tau'}))_{\tau,\tau'}$ définit un cocyle de Λ_K à valeurs dans le centre $Z(G)$ du groupe G. Donc, si le groupe $H^2(K, Z(G))$ est trivial (e.g., $Z(G) = 1$ ou $K = \mathbb{Q}^{ab}$), il n'est pas nécessaire de demander dans le Th.1 que l'application $\tau \to \varphi_\tau$ soit un morphisme du groupe.

Toute la question est de connaître les x_i^τ, i.e., l'action de Λ_K sur Π^{alg}. Voici ce qu'on peut dire sur les x_i^τ.

(i) $x_1^\tau, ..., x_r^\tau$ engendrent le groupe Π^{alg}
(ii) $x_1^\tau ... x_r^\tau = 1$

(iii) Pour $i = 1, ..., r$, x_i^τ est conjugué dans Π^{alg} à $(x_j)^{X_K(\tau)}$, où $t_j = t_i^\tau$ et X_K désigne le caractère cyclotomique $X_K : \Lambda_K \to \prod_N G(K(\mu_N)/K)$ du corps K.

[Seul (iii) demande quelques explications. Considérons une extension galoisienne finie $Y/\overline{K}(T)$ de groupe de Galois G, non ramifiée en dehors de $t_1, ..., t_r$. Sous l'action de $\tau \in \Lambda_K$, x_i est envoyé sur un générateur d'un des groupes d'inertie au dessus de $t_j = t_i^\tau$. Ces groupes sont cycliques et conjugués dans G ; leurs générateurs sont donc des conjugués d'une puissance a-ième de x_j, où a est premier avec e_j. Pour voir qu'on peut prendre $a = X_K(\tau)$, il faut utiliser que les x_i sont des générateurs "canoniques" et que les isomorphismes $I \to \mu_{e_i}$ sont compatibles avec l'action de Λ_K (voir "Structure des groupes d'inertie" plus haut).]

Nous montrons maintenant dans diverses situations comment utiliser le Théorème 1.

Situation 1 : Rigidité avec $K = \mathbb{Q}$ ou $K = \mathbb{Q}^{ab}$.

Le Th.2 ci-dessous est le résultat principal de la méthode. Il est dû indépendamment à Belyi, Fried, Matzat, Shih et Thompson. On se donne un groupe G et des éléments $g_1, ..., g_r$ de G engendrant G et de produit $g_1 ... g_r = 1$. Pour $i = 1, ..., r$, on note C_i la classe de conjugaison de g_i dans G. On rappelle que C_i est dite rationnelle si $g_i^a \in C_i$ pour tout entier a premier à l'ordre de g_i.

Considérons l'ensemble

$$(6) \qquad \sum(C_1, ... C_r) = \left\{ (g_1', ..., g_r') \in G^r \mid \begin{cases} g_1', ..., g_r' \text{ engendrent } G \\ g_1' ... g_r' = 1 \\ g_i' \in C_i \text{ pour } i = 1, ..., r \end{cases} \right\}$$

Il y a une action naturelle du groupe G sur l'ensemble $\sum(C_1, ..., C_r)$: on fait opérer chaque élément g de G par conjugaison sur chacune des composantes d'un élément de $\sum(C_1, ..., C_r)$.

THÉORÈME 2. *Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites,*

(H_1) $Z(G) = \{1\}$

(H_2) $C_1, ..., C_r$ *sont rationnelles*

(H_3) *L'action de* G *sur* $\sum(C_1, ..., C_r)$ *est transitive,*

alors le groupe G *a la propriété* $\mathrm{RGal}_{\mathbb{Q}}$ *avec* $t_1, ..., t_r$ *quelconques dans* $\mathbf{P}_1(\mathbb{Q})$.

Preuve. On choisit de façon quelconque $r + 1$ points $t_1, ..., t_r, t_0$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbb{Q})$. Soit $\tau \in \Lambda_{\mathbb{Q}}$. Il résulte des propriétés (i), (ii), (iii) des x_i^τ et de l'hypothèse (H_2) que

le r-uple $(\varphi(x_1^\tau),...,\varphi(x_r^\tau))$ est un élément de $\sum(C_1,...,C_r)$. D'après (H_3), il existe $\varphi_\tau \in G$ tel que

$$(\varphi(x_1^\tau),...,\varphi(x_r^\tau)) = \varphi_\tau(g_1,...,g_r)(\varphi_\tau)^{-1}.$$

Note. L'hypothèse (H_2) est nécessaire si on précise dans la conclusion du Th.2 que pour $i = 1,...,r$, C_i est la classe de conjugaison des générateurs "canoniques" des groupes d'inertie au dessus de t_i : en effet, la rationalité de C_i résulte alors de celle de t_i (utiliser (iii)).

Si $K = \mathbb{Q}^{ab}$, on a besoin ni de l'hypothèse (H_1) (voir note plus haut), ni de l'hypothèse (H_2).

THÉORÈME 3. *Si l'hypothèse* (H_3) *est satisfaite, alors le groupe* G *a la propriété* $\mathrm{RGal}_{\mathbb{Q}^{ab}}$ *avec* $t_1,...,t_r$ *quelconques dans* $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}^{ab})$.

[La démonstration est identique à celle du Th.1. Il faut juste remarquer que le caractère cyclotomique $X_{\mathbb{Q}^{ab}}$ est trivial. Par conséquent, si $t_1,...,t_r$ sont choisis dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}^{ab})$, pour tout $\tau \in \Lambda_K$ et $i = 1,...,r$, x_i^τ est conjugué dans Π^{alg} à x_i. On obtient donc que $\varphi(x_i^\tau)$ est automatiquement conjugué à g_i dans G, sans qu'il soit besoin de faire appel à l'hypothèse (H_2).]

C'est l'hypothèse (H_3) qu'on appelle plus spécifiquement hypothèse de rigidité. Il s'agit d'une hypothèse assez contraignante ; en particulier, pratiquement, elle impose $r \leq 3$. Elle est cependant satisfaite par de nombreux groupes simples : la plupart des résultats cités en introduction se déduisent en effet des Th.2 et Th.3 ou de variantes approchantes. On trouvera plus de détails sur ces applications précises dans [Se3] et [Ma2].

Situation 2 : $K = \mathbb{R}$.

On a $\Lambda_K = \{1, c\}$ où c désigne la conjugaison complexe. Il s'agit d'une situation assez particulière puisque l'action de c sur le groupe $\Pi^{alg} \simeq \hat{\Pi}$ provient d'une action sur le groupe Π, à savoir l'action naturelle de la conjugaison complexe sur le groupe fondamental topologique $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\backslash\{t_1,...,t_r\}, t_0) \simeq \Pi$.

(7)
$$\begin{array}{ccc} \Lambda_K = \{1,c\} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\Pi^{alg}) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \mathrm{Aut}(\Pi) \end{array}$$

De plus, l'action de c sur le groupe Π peut être explicitée. Si $t_1, ..., t_r, t_0$ sont dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ et apparaissent dans cet ordre sur la droite projective réelle, on peut choisir les classes d'homotopie $x_1, ..., x_r$ dans $\pi_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{C})\backslash\{t_1, ..., t_r\}, t_0)$ de telle façon qu'on ait les formules suivantes.

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1^c = (x_2...x_r)^{-1} x_1^{-1} (x_2...x_r) \\ x_2^c = (x_3...x_r)^{-1} x_2^{-1} (x_3...x_r) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ x_r^c = x_r^{-1} \end{cases}$$

Ces formules étaient connues d'Hurwitz [Hu ; p. 357] ; on les trouve aussi dans [KN]. Combinées au Th.1, elles conduisent au résultat suivant [DFr2].

THÉORÈME 4. *Un groupe G a la propriété* $\mathrm{RGal}_{\mathbf{R}}$ *avec points de ramification $t_1, ..., t_r$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ si et seulement si le groupe G est engendré par r éléments d'ordre ≤ 2.*

PREUVE: La condition (5) du Th.1 s'écrit

$$(9) \qquad \begin{cases} (g_2...g_r)^{-1} g_1^{-1} (g_2...g_r) = \varphi_c g_1 \varphi_c \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ g_r^{-1} g_{r-1}^{-1} g_r = \varphi_c g_{r-1} \varphi_c \\ g_r^{-1} = \varphi_c g_r \varphi_c \end{cases}$$

De la dernière ligne, on déduit que $\varphi_c g_r$ est d'ordre au plus 2, des deux dernières lignes que $\varphi_c g_{r-1} g_r$ est d'ordre au plus 2, etc...

Le Th.4 appelle deux commentaires. Rappelons en premier lieu qu'on sait montrer que tout groupe G a la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{R}}$. La méthode est analogue mais on choisit pour points de ramification $r/2$ paires de nombres complexes conjugués(voir [Se3; Ex. p. 107] et aussi [DFr2; Th.3.1]). Remarquons en second lieu que le Th.4 fournit une condition nécessaire pour qu'un groupe ait la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{Q}}$ avec points de ramification $t_1, ..., t_r$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$. En particulier, le Th.4 montre les limites du cas "rigide" : les groupes obtenus par le Th.1, par exemple le Monstre, sont engendrés par 3 éléments d'ordre ≤ 2.

[En fait, on peut vérifier directement que tout groupe G qui satisfait l'hypothèse (H_3) avec de plus $C_i = C_i^{-1}$ pour $i = 1, \ldots, r$, peut être engendré par r éléments d'ordre ≤ 2].

On peut se demander si inversement tout groupe engendré par 3 éléments d'ordre ≤ 2, de centre trivial a la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{Q}}$ avec $r = 3$. La réponse est non : pour le groupe diédral D_p d'ordre $2p$, qui est engendré par 2 éléments d'ordre 2, il en faut (beaucoup) plus que 3. Précisément, on a :

THÉORÈME 5. *Supposons p premier > 7. Si le groupe D_p a la propriété $RGal_{\mathbf{Q}}$ avec r points de ramification, alors $r \geq 6$.*

On trouvera une démonstration complète dans [DFr2]. Le cas essentiel est celui où $r = 4$ et où tous les groupes d'inertie sont d'ordre 2. On montre dans ce cas que la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{Q}}$ est l'équivalente à l'existence d'un point de p-torsion $\mathbf{Q}$-rationnel sur une courbe elliptique définie sur Q. Il faut donc recourir au Théorème de Mazur [Se1] pour conclure. Anticipons sur la suite de l'exposé pour dire que cet exemple est d'autant plus intéressant que l'espace de Hurwitz associé à cette situation est irréductible, défini sur $\mathbf{Q}$ et possède des points réels (et même ℓ-adiques pour tout nombre premier ℓ) (cf. Situation 4.(6).

Situation 3 : $K = \mathbf{Q}_p$.

Il est naturel de demander s'il existe des formules analogues à (8) dans la situation $K = \mathbf{Q}_p, t_1, \ldots, t_r$ choisis dans $\mathbf{Q}_p$ et avec c remplacé par le Frobenius $F_p \in \Lambda_{\mathbf{Q}_p}$. La réponse est non. De façon précise, l'action de F_p sur Π^{alg} ne provient pas d'une action sur Π telle que

(10) $x_i^{F_p}$ est conjugué dans Π à x_i^p, pour $i = 1, \ldots, r$.

[La raison est simple : si (10) était vrai, le groupe Π serait engendré par des conjugués de x_i^p, $i = 1, \ldots, r$; mais alors tout groupe engendré par des éléments d'ordre p serait trivial ! On peut donner une autre explication. Dans (10), l'exposant p remplace dans le contexte p-adique l'exposant $-1 = X_{\mathbf{R}}(c)$ de la situation 2. Or, p n'est pas la valeur du caractère cyclotomique $X_{\mathbf{Q}_p}$ en F_p : en effet, l'action de F_p sur μ_N n'est l'élévation à la puissance p-ième que si p ne divise pas N.]

Ce paragraphe est aussi l'occasion de rappeler ce résultat de Harbater [Ha].

THÉORÈME 6. *Tout groupe G a la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{Q}_p}$, pour tout nombre premier p.*

La méthode qu'il emploie est très différente de la nôtre. Il commence

par établir la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{Q}_p}$ pour les groupes cycliques. Il montre ensuite comment "coller ensemble" plusieurs revêtements cycliques, ou si l'on préfère, comment à partir de plusieurs extensions régulières $E_i/\mathbf{Q}_p(T)$ de groupes de Galois des sous-groupes cycliques $G_i, i = 1, \ldots, s$ d'un groupe G, on peut, sous certaines conditions, construire une extension régulière $E/\mathbf{Q}_p(T)$ de groupe de Galois $G_1 \ldots G_r$. Le résultat clé de cette seconde étape est le Théorème d'existence de Grothendieck, un analogue non archimédien des théorèmes GAGA de Serre.

Situation 4 : Espaces de Hurwitz.

Dans cette section, on fait varier les points de ramification $t_1, \ldots t_r$. La donnée $(t_1, ..., t_r)$ décrit la variété algébrique notée $\mathcal{U}^r$, obtenue en enlevant à $(\mathbf{P}_1)^r$ l'ensemble de tous les r-uplets $(t_1, \ldots, t_r)$ dont deux au moins des composantes sont égales. Nous noterons $\mathcal{U}_r$ la variété $\mathcal{U}^r/S_r$ quotient de $\mathcal{U}^r$ par l'action du groupe symétrique S_r ; la variété $\mathcal{U}_r$ paramètre les ensembles de r points distincts de $\mathbf{P}_1$.

Fixons un entier r, un groupe G et r classes de conjugaison $C_1, \ldots, C_r$ du groupe G. Et pour $\{t_1, \ldots, t_r\}$ variant dans $\mathcal{U}_r$, regardons l'ensemble de toutes

(11) les extensions galoisiennes de $\overline{K}(T)$ non ramifiées en dehors de $t_1, \ldots, t_r$, de groupe de Galois G et telles que, pour $i = 1, \ldots, r$, les générateurs canoniques (cf. "Structure des groupes d'inertie" plus haut) des groupes d'inertie au dessus de t_i soient dans C_{σ_i}, pour un certain $\sigma \in S_r$

ou, de façon équivalente, l'ensemble de tous

(12) les G-revêtements de $\mathbf{P}_1$ (i.e., revêtements galoisiens de $\mathbf{P}_1$ de groupe G donnés avec l'action de G) non ramifiés en dehors de $t_1, \ldots, t_r$ et tels que, pour $i = 1, \ldots, r$ et pour un certain $\sigma \in S_r$, C_{σ_i} soit, à l'intérieur du groupe de monodromie G, la classe de conjugaison des cycles de ramification correspondant à des lacets "tournant une fois autour de t_i".

D'après un résultat fondamental de M. Fried (e.g. [Fr1],[DFr1],[FrV]), sous certaines conditions, on peut mettre une structure algébrique sur l'ensemble des objets (11) (ou (12)). De façon plus précise, si G est un groupe de centre trivial, alors il existe une famille algébrique de revêtements de $\mathbf{P}_1$

$$\mathcal{T} \to \mathcal{H} \times \mathbf{P}_1$$

avec la propriété suivante :

(13) les membres ou fibres de cette famille $\mathcal{T}_{\mathbf{x}} \to \mathbf{P}_1$, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, correspondent de façon biunivoque aux classes d'équivalence des revêtements décrits

en (12).

L'espace $\mathcal{H}$ est appelé espace de Hurwitz associé à la donnée $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_r)$; on le note $\mathcal{H}(\boldsymbol{C})$ quand on veut indiquer cette dépendance. L'espace de Hurwitz est défini sur K si $\boldsymbol{C}$ est un r-uple K-rationnel de classes de conjugaisons de G, i.e., s'il est invariant, à l'ordre près, sous l'élévation à la puissance $X_K(\tau)$-ième, pour tout $\tau \in \Lambda_K$. Et dans ce cas on a

THÉORÈME 7. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

(a) $\mathcal{H}(K) \neq \emptyset$

(b) Il existe un G-revêtement comme en (12) qui est défini sur K.

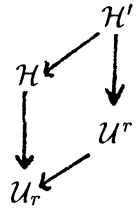
(c) Il existe une extension de $\overline{K}(T)$ comme en (11) qui provient, par extension des scalaires, d'une extension galoisienne et régulière de $K(T)$.

En particulier $\mathcal{H}(K) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{RGal}_K(G)$

Voici quelques points concernant les espaces de Hurwitz :

[1] *Les revêtements* $\mathcal{H} \to \mathcal{U}_r$ et $\mathcal{H}' \to \mathcal{U}^r$. Il existe une flèche naturelle $\mathcal{H} \to \mathcal{U}_r$ qui envoie $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$ sur l'ensemble des points de ramification du revêtement fibre $\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}} \to \mathbb{P}_1$; c'est un morphisme [DFr1;Lemma1.5]. Notons $\mathcal{H}'$ le pull-back de $\mathcal{H}$ au-dessus de l'application naturelle $\mathcal{U}^r \to \mathcal{U}_r$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

(14)



Les deux flèches verticales sont des revêtements finis non ramifiés. On peut décrire de façon explicite les actions de groupes associées à ces revêtements. Sans rentrer dans les détails, disons que les groupes fondamentaux des espaces $\mathcal{U}^r$ et $\mathcal{U}_r$ sont bien connus : ce sont les "groupes de tresses" d'Hurwitz, des quotients des groupes des tresses d'Artin. Qu'il existe une action naturelle de ces groupes de tresses sur les ensembles

$$\bigcup_{\sigma \in S_r} \Sigma(C_{\sigma_1}, \ldots, C_{\sigma_r}) \quad \text{et} \quad \Sigma(C_1, \ldots, C_r) \tag{15}$$

(L'ensemble $\Sigma(C_1, \ldots, C_r)$ est défini en (6))

Et qu'alors les deux revêtements verticaux de (14) sont les revêtements non ramifiés de $\mathcal{U}^r$ et $\mathcal{U}_r$ associés à l'action des groupes de tresses sur les ensembles quotients de (15) par l'action du groupe G. En particulier, les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont irréductibles si et seulement si ces actions sont transitives. On trouvera plus de détails dans [BFr],[Fr2] ou [FrV].

2 *Cas particulier: rigidité.* Le revêtement vertical de droite en (14) est un revêtement de degré $|\sum(C_1,...,C_r)/G|$. Sous l'hypothèse (H_3) de rigidité, c'est donc un isomorphisme. D'autre part, sous l'hypothèse (H_2), il est défini sur $\mathbf{Q}$. L'espace $\mathcal{H}'$ est donc dans ce cas un ouvert de $(\mathbf{P}_1)^r$: on retrouve le Th.2.

3 *Un autre cas de rationalité.* Supposons $\mathcal{H}'$ irréductible. On peut en privilégiant une des variables $t_1,...,t_r$, par exemple t_1, voir la flèche $\mathcal{H}' \to \mathcal{U}^r$ comme une famille de revêtements de $\mathbf{P}_1$ paramétrée par les $r-1$ autres variables. La ramification de ces revêtements est parfaitement connue : ils sont ramifiés aux points $t_2,...,t_r$ et les cycles de ramification associés sont donnés par des formules explicites dans un groupe de tresses approprié [BFr]. On peut donc calculer le genre $g(\boldsymbol{C})$ de ces revêtements grâce à la formule de Riemann-Hurwitz. Dans certaines situations, l'examen de la ramification permet également de conclure à l'existence générique d'un point rationnel au-dessus d'un des points de ramification $t_2,...,t_r$. Si c'est le cas et si le genre est nul, la variété $\mathcal{H}'$ est une variété K-rationnelle ; en particulier $\mathcal{H}'(K) \neq \emptyset$.

Cette méthode a été utilisée pour démontrer la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{Q}}$ pour plusieurs groupes simples, en particulier parmi les groupes simples sporadiques [Ma2]. Les calculs sont malheureusement très compliqués et nécessitent même parfois l'usage d'un ordinateur. Un programme adapté à ce genre de calculs a été conçu par Matzat.

La même méthode est utilisée dans [DFr2] pour étudier l'exemple suivant.

Exemple. Le groupe G est le groupe symétrique S_n et $r = 4$. On se donne 3 générateurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ d'ordre 2 de S_n et on définit $C_1,...,C_4$ comme les classes de conjugaison dans S_n des éléments $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3$. Noter que le 4-uplet $(\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3)$ est dans l'ensemble $\sum(C_1,...,C_4)$ et qu'il vérifie les formules (9) avec $\varphi_c = 1$. Dans le cas où $\mathcal{H}'$ est une variété $\mathbf{Q}$-rationnelle, cela permet de conclure à l'existence d'une extension galoisienne régulière $E/\mathbf{Q}(T)$ de groupe S_n ramifiée en $r = 4$ points rationnels et telle que les extensions résiduelles $E_t/\mathbf{Q}$ soient totalement réelles pour tout t dans un ouvert non vide de $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$. Serre a montré dans [Se2] que pour $r = 3$ à la place de $r = 4$, seul le groupe S_3 a cette propriété. Nous avons calculé le genre $g(\boldsymbol{C})$ pour divers choix des générateurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et obtenu la $\mathbf{Q}$-rationalité de $\mathcal{H}'$ dans les cas suivants : n=4,5,6,7,10.

[4] *Points réels sur $\mathcal{H}'$.* Les formules de type (8) fournissent des critères d'existence de points réels sur les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. On a ainsi

THÉORÈME 4 BIS. *$\mathcal{H}'(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ si et seulement s'il existe un r-uplet $(g_1, ..., g_r)$ et un élément κ dans G vérifiant*

(a) $(g_1, ..., g_r) \in \sum(C_{\sigma_1}, ..., C_{\sigma_r})$ *pour un certain* $\sigma \in S_r$

(b) Les éléments $\kappa, \kappa g_1, \kappa g_1 g_2, ..., \kappa g_1 g_2 ... g_{r-1}$ *sont d'ordre* ≤ 2.

[5] On connait de nombreux exemples où $\mathcal{H}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $\mathcal{H}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$ pour tout nombre premier p.

[La construction suivante a été inspirée par [Ha]. Soit G un groupe engendré par ρ éléments $h_1, ...h_\rho$ d'ordre 2 (par exemple un groupe simple non abélien). Pour tout nombre premier p et pour $i = 1, ..., \rho$, choisissons un polynôme irréductible f_i dans $\mathbb{F}_p[T]$ de degré $d_i = i$. Fixons également un relèvement F_i de f_i dans $\mathbb{Z}[T]$ de même degré que f_i.

Pour tout p, l'équation $Y^2 = F_i(T)(F_i(T) - p)$ définit un revêtement Φ_i : $Y_i \to \mathbb{P}_1$ cyclique de degré 2, défini sur $\mathbb{Q}_p$. Pour $i = 1, ..., r$, l'ensemble $R_{p,i}$ des points de ramification de Φ_i comporte 2i points, à savoir les zéros de $F_i(T) = 0$ et ceux de $F_i(T) = p$. Par construction, les ensembles $R_{p,i}, i = 1, ..., r$ sont deux à deux disjoints modulo p. D'autre part, modulo p, Y_i éclate en deux composantes qui s'envoient isomorphiquement sur $\mathbb{P}_1$ (avec la terminologie de [Ha], la réduction modulo p du revêtement Φ_i est un "mock cover"). D'après [Ha; Prop.2.2], on peut "coller ensemble" les revêtements $\Phi_i, i = 1, ..., \rho$. De façon précise, il existe un G-revêtement de $\mathbb{P}_1$, défini sur $\mathbb{Q}_p$, ramifié en chacun des points de $\bigcup_{1 \leq i \leq \rho} R_{p,i}$ et tel que

(16) Pour tout $i = 1, ..., \rho$, et tout $t \in R_{p,i}, h_i$ est un générateur "canonique" d'un groupe d'inertie au-dessus de t.

Notons pour tout $i = 1, ..., \rho, C_i$ la classe de conjugaison dans G de h_i, r l'entier $r = \rho(\rho + 1)$ et $\boldsymbol{C}$ le r-uplet de classes de conjugaison de G:

$$(17) \qquad \boldsymbol{C} = (C_1, C_1, C_2, C_2, C_2, C_2, ..., \overbrace{C_\rho, C_\rho, ..., C_\rho, C_\rho}^{2\rho})$$

Les classes $C_i, i = 1, ..., r$ étant rationnelles, l'espace $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{C})$ est défini sur $\mathbb{Q}$. La construction précédente montre que $\mathcal{H}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$ pour tout p. Quant à l'existence de points $\mathbb{R}$-rationnels sur $\mathcal{H}$, elle résulte du Th.4 bis.

Note. On a choisi $d_i = i$ pour $i = 1, ..., \rho$, par souci de simplicité. En fait, la construction marche de la même façon si les polynômes $f_i, i = 1, ..., \rho$ sont choisis irréductibles et distincts dans $\mathbb{F}_p$[T]. On peut alors, à $\rho \geq 2$ fixé, essayer de minimiser le nombre final $r = 2(d_1 + ... + d_\rho)$ de classes de conjugaison dans $\boldsymbol{C}$.

Notons $n_p(d)$ le nombre de polynômes irréductibles de degré d dans $\mathbf{F}_p[T]$. On montre sans trop de difficultés que, à d fixé, $n_p(d)$ croît avec p. On procède alors de la façon suivante. On choisit les $2 = n_2(1)$ premiers polynômes f_i de degré 1. On peut choisir les suivants de degré 2 si $n_2(1) + n_2(2) = 4 \geq \rho$; sinon on prend les 2 suivants de degré 2, puis les suivants jusqu'à concurrence de $n_2(3) = 7$, de degré 3 etc...]

6 Il y a des exemples où $\mathcal{H}(\mathbf{Q}) = \emptyset$.

[Reprenons l'exemple du Th.5: G est le groupe diédral $G = D_p$ d'ordre $2p$, $r = 4$ et les quatre classes $C_1, \ldots, C_4$ sont égales à la classe de conjugaison $\boldsymbol{C}$ de tous les éléments d'ordre 2 du groupe, i.e., $\boldsymbol{C} = \{(a, 1) | a \in \mathbf{Z}/p\}$. D'après le Th.5, on a $\mathcal{H}(\mathbf{Q}) = \emptyset$. On notera pourtant que $\mathcal{H}(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ et $\mathcal{H}(\mathbf{Q}_\ell) \neq \emptyset$ pour tout ℓ (cet exemple correspond au cas $\rho = 2$ de la construction donnée en 5) pour lequel, si on procède comme dans la note, on a $r = 4$). La démonstration du Th.5 éclaire cet exemple : on montre en fait qu'il existe un morphisme $\mathcal{H} \to X_0(p)$ de l'espace de Hurwitz sur la courbe modulaire (privée des pointes) ainsi qu'une section $X_0(p) \to \mathcal{H}$, tous deux définis sur $\mathbf{Q}$. En particulier, l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}$ est irréductible et pour tout corps K, $\mathcal{H}(K) \neq \emptyset$ si et seulement si $X_0(p)(K) \neq \emptyset$.]

Situation 5 : r grand.

Le paramètre r doit être choisi supérieur au rang $\mathrm{rg}(G)$ du groupe G. Mais il paraît raisonnable, au vu du Th.5 par exemple, de penser que, pour être sûr de trouver des points $\mathbf{Q}$-rationnels sur un espace de Hurwitz $\mathcal{H}$, il faille prendre r beaucoup plus grand que $\mathrm{rg}(G)$. Dans un article récent [FrV], M. Fried et H. Voelklein ont obtenu des résultats dans ce sens. Ils s'appuient sur le théorème suivant, dû à J.H. Conway et R.A. Parker [CP].

THÉORÈME 8. *Soit G un sous-groupe de S_n vérifiant les deux conditions*

(1) Le centralisateur $\mathrm{Cen}_{S_n}(G)$ est trivial (en particulier $Z(G) = \{1\}$).

(2) Le groupe des multiplicateurs de Schur de G est "engendré par les commutateurs".

Il existe un entier b avec la propriété suivante : si C est un r-uplet de classes de conjugaisons de G tel que

(3) chaque classe de conjugaison de G apparaît au moins b fois dans C.

Alors l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}(\boldsymbol{C})$ est irréductible.

De plus, si toutes les classes de conjugaison de G apparaissent le même nombre de fois, alors l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}(\boldsymbol{C})$ est défini sur $\mathbf{Q}$.

On trouvera dans [FrV] le sens précis de la condition (2). Les conditions (1) et (2) ne sont pas très restrictives : d'après [FrV; Lemma 2.2], tout

groupe fini est quotient d'un groupe qui les satisfait. En conséquence, à tout groupe fini G, on peut associer une famille infinie $\mathcal{F}$ de variétés $\mathcal{H}$, irréductibles et définies sur $\mathbb{Q}$, telles que

(18) Le groupe G a la propriété RGal_K s'il existe un point K-rationnel sur l'une des variétés $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$.

Un corps K est dit *Pseudo Algébriquement Clos* si toute variété algébrique définie sur K a des points K-rationnels. On a donc [FrV; Th.2].

COROLLAIRE 1. *Tout groupe fini G a la propriété RGal_K sur tout corps PAC K. Si de plus K est hilbertien, alors G a la propriété Gal_K.*

Les corps PAC sont étudiés par exemple dans [FrJ]. Sont PAC les corps algébriquement clos, les extensions algébriques de corps PAC, les extensions algébriques infinies de $\mathbf{F}_p$. De (18) ou même du corollaire 1 se déduit également le résultat suivant [FrV;§ 2.2].

COROLLAIRE 2. *Tout groupe fini G a la propriété $\mathrm{RGal}_{\mathbf{F}_p}$ pour tout p sauf un nombre fini.*

RÉFÉRENCES

[BFr] R. Biggers and M. Fried, *Moduli spaces of covers and the Hurwitz monodromy group*, J. für die reine und angew. Math. **335** (1982), 87–121.

[CP] J.H. Conway and R.A. Parker, *On the Hurwitz number of arrays of group elements*. Preprint

[DFr1] P. Dèbes and M. Fried, *Arithmetic variation of fibers*, J. für die reine und angew. Math **400** (1990), 106–137.

[DFr2] P. Dèbes and M. Fried, *Non rigid situations in constructive Galois theory*. Preprint

[Fr1] M. Fried, *Fields of definition of function fields and Hurwitz families*, Groups as Galois groups, Comm. in Alg.,5 **1** (1977), 17–82.

[Fr2] M. Fried, *Arithmetic of 3 and 4 branch point covers*, Séminaire de Théorie des Nombres Delange-Pisot-Poitou (1987–1988), Birkhauser.

[FrD] M. Fried and P. Dèbes, *Rigidity and real residue class fields*, Acta Arithmetica, **56** (1990).

[FrJ] M. Fried and M. Jarden, *Field Arithmetic*, Springer, Ergebnisse **11** (1986).

[FrV] M. Fried and H. Volklein, *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*,. Preprint.

[Ha] D. Harbater, *Galois covering of the arithmetic line*, Proc. of the NY Number Thy. Conf. of 1985, LNM 1240, Springer.

[Hi] D. Hilbert, *Uber die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzahligen Koeffizienten*, J. für die reine und angew. Math. 110 (1892), 104–129; (=Gesammelte Afhandlungen, Springer-Verlag (1983) [réimpression Chelsea,1965], **2 n°18**, 264–286.

[Hur] A. Hurwitz, *Riemann'sche Flächen mit gegebenen Veizweigungspunkten*, Mathematische Werke, Band I, 321–383.

[KN] A. Krull and J. Neukirch, *Die Struktur der absoluten Galois gruppe über dem Körper* $\mathbb{R}(T)$, Mathematische Annalen, 193 (1971), 197–209.

[Ma1] B.H. Matzat, *Konstruktive Galoistheorie, LNM 1284, Springer-Verlag.*

[Ma2] B.H. Matzat, *Uber das Umkehrproblem der Galoisschen Theorie*, Jber.d.Dt. Math.-Verein,90 (1988), 155–183.

[Ma3] B.H. Mazat, *Zöpfe und Galoissche Gruppen,*. Preprint.

[Se1] J.P. Serre, *Points rationnels des courbes modulaires*, Séminaire Bourbaki, 30ème année, 1977/78 n°511.

[Se2] J.P. Serre, *Groupe de Galois sur* $\mathbb{Q}$, Séminaire Bourbaki, 1987/88 n°689.

[Se3] J.P. Serre, *Topics in Galois theory*, Course at Harvard University (Fall 1988), Notes written by Henri Darmon, preprint.

[Sha] I.R. Shafarevich, *Constructions of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group.* Izv. Akad. Nauk SSSR 18 (1954), 525-578(=Amer. Math. Transl.4(1956),185-237;=C.P. 139-191)

[Shi1] K.y. Shih, *On the construction of Galois extensions of function fields and number fields*, Math. Ann. 207 (1974), 99–120.

[Shi1] K.y. Shih, *p-division points on certain elliptic curves*, Comp. Math. 36 (1978), 113–129.

"Problèmes diophantiens"
Institut Henri Poincaré
75231 PARIS cedex 05