JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MICHEL WALDSCHMIDT

# Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 3, n° 1 (1991), p. 129-185

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_129_0>

*Séminaire de Théorie des Nombres,*
*Bordeaux* **3** *(1991), 129-185*

# Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques

par MICHEL WALDSCHMIDT(1)

**Résumé** — Depuis un peu plus de vingt ans, la recherche de minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques avec des coefficients algébriques a fait l'objet de nombreux travaux. Dès que le nombre de logarithmes dépasse 2, toutes les démonstrations utilisées jusqu'à présent reposaient sur la méthode de Baker. Nous proposons ici d'autres méthodes.

**Abstract** — *Up to now Baker's method was the only one to yield lower bounds for linear forms in logarithms of algebraic numbers, at least when the number of logarithms is bigger than 2. We propose here other methods. While Baker's work is a generalization of Gel'fond's solution of Hilbert's problem, our approach is based on Schneider's solution of this problem. This first paper is devoted to the "dual" of a proof due to N. Hirata of a lower bound for linear forms in a commutative algebraic group (here we consider only the usual logarithms). In a subsequent paper we shall develop the "dual" of Baker's method.*

## 1. Introduction

Le théorème de Baker [B] sur l'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques s'énonce :

*Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des nombres algébriques non nuls, $\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_m$ des déterminations non nulles de leurs logarithmes et $\beta_0, \dots, \beta_m$ des nombres algébriques. Si*

$$\beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \cdots + \beta_m \log\alpha_m = 0,$$

*Mots clefs* : Formes linéaires de logarithmes, transcendance, approximation diophantienne, méthodes de Schneider, Gel'fond, Baker.

Manuscrit reçu le 23 janvier 1991 .

(1) Recherche partiellement financée par la Fondation Nationale Hongroise pour la Recherche Scientifique, contact n° 1811 et par le C.N.R.S. SDI 5614 et PRC Mathématiques-Informatique.

*alors $\beta_0 = 0$ et les nombres $\beta_1, \dots, \beta_m$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$.*

On en déduit (par un argument simple d'algèbre linéaire) que, si $\beta_1, \dots, \beta_m$ ne sont pas tous nuls, alors les nombres $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_m$ sont aussi $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants. On peut étendre ce théorème en un énoncé général sur les groupes algébriques commutatifs [W3]. Voici le cas particulier des groupes linéaires :

*Notons $\mathbb{L}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des logarithmes de nombres algébriques, c'est-à-dire l'image inverse de $\bar{\mathbb{Q}}^*$ par l'application $z \mapsto e^z$ :*

$$\mathbb{L} = \{\ell \in \mathbb{C}; e^\ell \in \bar{\mathbb{Q}}^*\}.$$

*Soient $d_0$ et $d_1$ deux entiers $\geq 0$, avec $d = d_0 + d_1 > 0$. On pose $\Lambda_{d_0 d_1} = \bar{\mathbb{Q}}^{d_0} \times \mathbb{L}^{d_1}$. Soient $V$ et $W$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^d = \mathbb{C}^{d_0} \times \mathbb{C}^{d_1}$, de dimensions respectives $n$ et $t$, avec $n < d$ et $W \subset V$. On suppose $W$ rationnel sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Alors il existe un sous-espace vectoriel $T_0$ de $\mathbb{C}^{d_0}$, rationnel sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et un sous-espace vectoriel $T_1$ de $\mathbb{C}^{d_1}$, rationnel sur $\mathbb{Q}$, tels que, si on note*

$$\delta_0 = d_0 - \dim_{\mathbb{C}} T_0, \quad \delta_1 = d_1 - \dim_{\mathbb{C}} T_1,$$

$$T = T_0 \times T_1, \quad \delta = \delta_0 + \delta_1 = d - \dim_{\mathbb{C}} T,$$

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} W / W \cap T, \quad \lambda = \dim_{\mathbb{Q}} \Lambda_{d_0 d_1} \cap V / \Lambda_{d_0 d_1} \cap V \cap T,$$

*on ait $\delta > \tau$ et*

$$(\lambda + \delta_1)(d - n) \leq d_1(\delta - \tau).$$

Ce dernier théorème contient l'énoncé de Baker d'au moins 4 manières différentes ; pour simplifier considérons le cas homogène $\beta_0 = 0$ :

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m = 0.$$

$\boxed{1}$ Prenons $d_0$=0, $d = d_1 = m$, $t = n = d - 1$ ; on choisit pour $V = W$ l'hyperplan $\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_m z_m = 0$ de $\mathbb{C}^m$. La condition $\delta > \tau$ signifie (quand $W$ est un hyperplan) que $W$ contient $T$. Si on avait $T = 0$, comme

$$(0, \dots, 0) \neq (\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_m) \in \Lambda_{d_0 d_1} \cap V,$$

on aurait $\lambda \geq 1$, $\delta = d$, $\tau = d-1$, ce qui n'est pas compatible avec la conclusion $\lambda + \delta \leq (\delta - \tau)d$. Donc $T \neq 0$ et $T$ est rationnel sur $\mathbb{Q}$. Soit $b = (b_1, \dots, b_m) \neq 0$ un point de $T \cap \mathbb{Q}^m$ ; en écrivant que $b$ appartient à $W$, on trouve $b_1\beta_1 + \cdots + b_m\beta_m = 0$. $\square$

$\boxed{2}$ Prenons $d_0=1$, $d_1 = m$, donc $d = m+1$, puis $t = n = d-1$ ; on choisit pour $V = W$ l'hyperplan $z_0 = \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_m z_m$ de $\mathbb{C}^d$. Ici encore $W$ contient $T$. Comme

$$(0, \dots, 0) \neq (0, \log\alpha_1, \dots, \log\alpha_m) \in \Lambda_{d_0 d_1} \cap V,$$

on a $T \neq 0$. De plus $\mathbb{C} \times \{0\} \not\subset W$, donc $T_0 = 0$. Soit $(b_1, \dots, b_m) \neq 0$ un point de $T_1 \cap \mathbb{Q}^m$ : en écrivant que $(0, b_1, \dots, b_m)$ appartient à $W$, on trouve encore $b_1\beta_1 + \cdots + b_m\beta_m = 0$. $\square$

$\boxed{3}$ On choisit maintenant $d_0 = m-1$, $d_1 = 1$, donc $d = m$, puis $t = 0$, c'est-à-dire $W = 0$. On suppose (ce n'est pas restrictif) $\beta_m = -1$ et on prend pour $V$ l'hyperplan $z_m = z_1\log\alpha_1 + \cdots + z_{m-1}\log\alpha_{m-1}$. La conclusion s'écrit $\lambda + \delta_1 \leq \delta$, c'est-à-dire $\lambda \leq \delta_0$. Il existe donc un sous-espace vectoriel $T_0$ de $\mathbb{C}^{m-1}$, tel que le rang sur $\mathbb{Z}$ de la projection du sous-groupe $\mathbb{Z}^{m-1} + \mathbb{Z}(\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$ sur $\mathbb{C}^{m-1}/T_0$ soit $\leq \delta_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{m-1}/T_0$. De plus $\delta_0 > 0$, car $\delta > 0$ et $T \neq \mathbb{C}^{m-1} \times \{0\}$ (on utilise l'hypothèse que $\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_m$ ne sont pas tous nuls). On en déduit que $1, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$. $\square$

$\boxed{4}$ On prend enfin $d_0 = m$, $d_1 = 1$, $d = m+1$, $t = 1$, $n = m$. Le sous-espace $V$ est l'hyperplan $z_{m+1} = z_1\log\alpha_1 + \cdots + z_m\log\alpha_m$, et $W$ est la droite contenant $(\beta_1, \dots, \beta_m, 0)$. Ainsi $V \cap \Lambda_{d_0 d_1}$ contient tous les points

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_1\log\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\log\alpha_m),$$

pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Q}^m$. La conclusion s'écrit maintenant $\lambda + \tau \leq \delta_0$. Or on a facilement $\lambda \geq \delta_0$, donc $\tau = 0$, c'est-à-dire $W \subset T$. Alors $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in T_0$. On a $T_0 \neq \mathbb{C}^m$ : sinon $\delta_0 = 0$, $\delta = \delta_1 = 1$, $T = \mathbb{C}^m \times \{0\}$ et $\lambda = 1$ (car les $\log\alpha_i$ ne sont pas tous nuls), ce qui n'est pas compatible avec l'inégalité $\lambda + \tau \leq \delta_0$. Enfin $T_0$ est rationnel sur $\mathbb{Q}$, parce que l'image de $\mathbb{Z}^m$ dans $\mathbb{C}^m/T_0$ a un rang $\lambda \leq \delta_0 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m/T_0)$ (voir ci-dessous, lemme 2.6). $\square$

La première démonstration correspond à la méthode de Baker, telle qu'elle a été développée depuis plus de vingt ans par tous les auteurs ayant donné des minorations de combinaisons linéaires de logarithmes (tout au moins quand le nombre de logarithmes est supérieur à 2) ; voir par exemple [B], ainsi que [W2], [PW2], [BGMMS], [Wü] pour des travaux plus récents. La seconde a été introduite par Noriko Hirata (pour traiter le cas elliptique) dans [H] ; c'est une variante de la première, mais elle s'en distingue sensiblement par le choix des paramètres. La troisième méthode est *duale* (au sens de [W4]) de la première ; quand on s'y restreint à deux logarithmes, il s'agit de la méthode de Schneider, qui a été développée dans [MW1–3] pour donner des minorations explicites. Pour $n$ logarithmes, cette méthode a été esquissée dans [W1] Chap.9 (voir aussi [Y1] pour le cas elliptique). Enfin la quatrième est duale de la seconde (nous explicitons cette dualité un peu plus loin).

On peut aussi décrire le principe de base sous-jacent à chacune de ces quatre méthodes en écrivant les fonctions qui interviennent et les points (éventuellement aussi les dérivées) que l'on considère. On écrit pour cela une équation de l'hyperplan $V$ de $\mathbb{C}^d$ sous la forme $z_d = x_1 z_1 + \cdots + x_{d-1} z_{d-1}$ pour les méthodes 1,3 et 4, sous la forme $z_1 = x_2 z_2 + \cdots + x_d z_d$ pour la méthode 2. Les restrictions à $V$ des $d$ fonctions

$$z_1, \ldots, z_{d_0}, e^{z_{d_0+1}}, \ldots, e^{z_d}$$

produisent $d$ fonctions $f_1, \ldots, f_d$ de $d-1$ variables. Le fait que $V$ contienne un sous-espace $W$ rationnel sur $\bar{\mathbb{Q}}$ se traduit par l'existence de $t$ équations différentielles à coefficients algébriques satisfaites par $f_1, \ldots, f_d$.

$\boxed{1}$ Prenons $\beta_m = -1$ (ce qui n'est pas restrictif) ; on travaille avec $m$ fonctions de $m-1$ variables complexes :

$$e^{z_1}, \ldots, e^{z_{m-1}}, e^{\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_{m-1} z_{m-1}},$$

on dérive par rapport aux $m-1$ variables $z_1, \ldots, z_{m-1}$ et on prend les points du sous-groupe $\mathbb{Z}(\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_{m-1})$ qui est de rang 1. Le fait que ces points soient tous sur une droite complexe a été abondamment exploité dans tous les travaux antérieurs. Cela permet d'ailleurs de présenter la méthode de Baker en ne parlant que de fonctions d'une seule variable.

$\boxed{2}$ On a ici $m+1$ fonctions de $m$ variables, à savoir

$$\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_m z_m, \; e^{z_1}, \ldots, e^{z_m},$$

que l'on dérive encore dans les $m$ directions et dont on prend les valeurs aux points de $\mathbb{Z}(\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m)$.

$\boxed{3}$ De nouveau on suppose $\beta_m = -1$ et on a $m$ fonctions de $m-1$ variables :

$$z_1, \ldots, z_{m-1},\ \alpha_1^{z_1} \cdots \alpha_{m-1}^{z_{m-1}},$$

on ne prend pas de dérivée (c'est pourquoi on parle de *méthode de Schneider*) et on considère les valeurs de ces fonctions aux points du sous-groupe $\mathbb{Z}^{m-1} + \mathbb{Z}(\beta_1, \ldots, \beta_{m-1})$ de $\mathbb{C}^{m-1}$.

$\boxed{4}$ On travaille avec $m+1$ fonctions de $m$ variables :

$$z_1, \ldots, z_m,\ \alpha_1^{z_1} \cdots \alpha_m^{z_m},$$

une dérivation $D = \beta_1 \partial/\partial z_1 + \cdots + \beta_m \partial/\partial z_m$ et on prend les points dans $\mathbb{Z}^m$.

La dualité entre les méthodes 2 et 4 peut être explicitée de la manière suivante : quand on calcule la valeur au point $(h \log \alpha_1, \ldots, h \log \alpha_m)$, de

$$D^\sigma\big((\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_m z_m)^t e^{\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_m z_m}\big) =$$
$$\sum_{\|\tau\|=t} \frac{t!}{\tau_0!}(\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_m z_m)^{\tau_0} \prod_{i=1}^m \binom{\sigma_i}{\tau_i} \beta_i^{\tau_i} \lambda_i^{\sigma_i - \tau_i} e^{\lambda_i z_i},$$

on trouve

$$\sum_{\|\tau\|=t} \frac{t!}{\tau_0!} h^{\tau_0} (\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m)^{\tau_0} \prod_{i=1}^m \binom{\sigma_i}{\tau_i} \beta_i^{\tau_i} \lambda_i^{\sigma_i - \tau_i} \alpha_i^{\lambda_i h};$$

on obtient la même chose quand on calcule la valeur au point $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de

$$\left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \beta_m \frac{\partial}{\partial z_m}\right)^t \big(z_1^{\sigma_1} \cdots z_m^{\sigma_m} (\alpha_1^{z_1} \cdots \alpha_m^{z_m})^h\big) =$$
$$\sum_{\|\tau\|=t} \frac{t!}{\tau_0!} h^{\tau_0} (\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m)^{\tau_0} \prod_{i=1}^m \binom{\sigma_i}{\tau_i} \beta_i^{\tau_i} z_i^{\sigma_i - \tau_i} \alpha_i^{z_i h}.$$

La coïncidence entre ces deux valeurs est expliquée par la transformée de Fourier-Borel dans [W4] §5 et §7.

Une fois les fonctions, les dérivées et les points choisis, on peut dérouler chacune des quatre méthodes de manière analogue. En particulier dans les deux premières, on n'utilisera pas de formule d'interpolation en une variable, bien que les points considérés engendrent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 : cette propriété n'interviendra que dans la construction de la fonction auxiliaire [W4], de manière *duale* du fait que, dans les deux dernières méthodes, une seule des fonctions considérées n'est pas linéaire.

On commence par écrire la fonction auxiliaire de [W4] avec des paramètres convenables, puis on l'utilise pour résoudre un système d'équations (grâce à l'inégalité de Liouville) et enfin on exploite ce système grâce à un lemme de zéros [P].

Pour démontrer un énoncé qualitatif de transcendance, ce schéma de démonstration est suffisant. Pour obtenir des résultats quantitatifs, il faut encore travailler un peu. Quand on veut minorer une combinaison linéaire non nulle $\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$, en raisonnant par l'absurde, le schéma de démonstration précédent conduit à l'existence de relations linéaires à coefficients rationnels entre les $\beta_i$ (correspondant à un sous-groupe du groupe algébrique de départ). On est amené à reprendre la démonstration avec moins de variables, en tenant compte de ces relations rationnelles.

Dans ce premier texte, nous montrons comment la méthode 4 permet de donner des minorations explicites. Dans un second texte, nous utiliserons la méthode 3 (qui généralise en plusieurs variables celle de Schneider).

Quand on utilise exactement le schéma proposé ci-dessus pour les méthodes 1 et 3, on trouve un facteur $(\log B)^2$ pour la dépendance en la hauteur des $\beta_i$. Il est bien connu que pour obtenir $\log B$ comme on le désire, on doit introduire un facteur $\mathbb{G}_a$. Voici comment se décrit la méthode 1 (resp. 3) ainsi modifiée, en terme de fonctions. On suppose à chaque fois $\beta_m = -1$.

$\boxed{1'}$ On travaille avec $m+1$ fonctions de $m$ variables complexes :

$$z_0, e^{z_1}, \ldots, e^{z_{m-1}}, e^{\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_{m-1} z_{m-1}},$$

on dérive par rapport aux $m$ variables $z_0, \ldots, z_{m-1}$ et on prend les points du sous-groupe (de rang 1) $\mathbb{Z}(1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_{m-1})$.

$\boxed{3'}$ On a encore $m+1$ fonctions de $m$ variables :

$$z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}, e^{z_0} \alpha_1^{z_1} \cdots \alpha_{m-1}^{z_{m-1}},$$

on prend une dérivée $\partial/\partial z_0$ et on considère les valeurs de ces fonctions aux points du sous-groupe $0 \times \mathbb{Z}^{m-1} + \mathbb{Z}(0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1})$ de $\mathbb{C}^m$.

Enfin, pour obtenir vraiment $\log B$ et non $\log B \log\log B$ dans le résultat final, on utilise les polynômes de Fel'dman (c'est simplement une manière d'écrire différemment le système d'équations pour avoir des estimations meilleures).

Voici la minoration que nous obtenons. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls et $b_1, \ldots, b_n$ des entiers rationnels non tous nuls. Pour $1 \leq i \leq n$, on choisit une détermination $\log \alpha_i$ du logarithme complexe de $\alpha_i$ et on suppose que le nombre

$$\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n$$

n'est pas nul. On désigne par $D$ le degré du corps $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sur $\mathbb{Q}$. Pour $1 \leq i \leq n$, soit $A_i$ un nombre réel vérifiant

$$\log A_i \geq \max\left\{\frac{1}{D}, h(\alpha_i), \frac{e}{D}|\log \alpha_i|\right\};$$

on pose $A = \max\{A_i; 1 \leq i \leq n\}$ ; d'autre part soit $B$ un nombre réel vérifiant

$$B \geq \max\{|b_i|; 1 \leq i \leq n\}.$$

THÉORÈME 1.1. — *On choisit un nombre réel $E \geq e$ tel que, pour $1 \leq i \leq n$, on ait*

$$E \leq \min\left\{\frac{D \log A_i}{|\log \alpha_i|}, A_i^D\right\}.$$

*On pose*

$$Z = 4n \log n + 6n + \log(DE) + (n-1) \log\left(\frac{D \log A}{\log E}\right)$$

*et*

$$G = \max\left\{20n, \log B, \frac{Z}{n}, 20n\frac{\log E}{D}\right\}.$$

*Alors*

$$|\Lambda| \geq \exp\left\{-C(n) D^{n+2} G Z \log A_1 \cdots \log A_n (\log E)^{-n-1}\right\},$$

*avec $C(n) \leq 2^{2n+21} n^{4n}$ pour $n \geq 2$ et*

| $n =$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $C(n) \leq$ | $3.01 \cdot 10^8$ | $9.9 \cdot 10^{12}$ | $7.4 \cdot 10^{17}$ | $1.11 \cdot 10^{23}$ |

Nous déduirons (au paragraphe 9) du théorème 1.1 le corollaire suivant, qui correspond au cas particulier $E = e$.

COROLLAIRE 1.2. *Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des nombres réels vérifiant*

$$\log \tilde{A} \geq \max\{D, D\log A, 666n^4\} \quad \text{et} \quad \log \tilde{B} \geq \max\{\log B, 20n\}.$$

*Alors*

$$|\Lambda| \geq \exp\left\{-2nC(n)D^{n+2}(\log \tilde{B} + \log\log \tilde{A})(\log\log \tilde{A})\log A_1 \cdots \log A_n\right\},$$

*où la constante $C(n)$ est donnée par le théorème 1.1.*

*Remarques.* Les minorations les plus précises étaient jusqu'à présent celles de [BGMMS] ; les résultats de ces auteurs sont énoncés de manière légèrement différente, mais on peut cependant comparer les valeurs numériques. Par exemple, dans [BGMMS], sous une hypothèse d'indépendance des racines des $\alpha_i$, apparaît la constante

$$2^{21}(24e^2)^n \frac{n^{2n+1}}{n!}$$

qui est de l'ordre de grandeur de $1.05 \cdot 10^{12}$ pour $n = 2$ et de $4.26 \cdot 10^{15}$ pour $n = 3$ ; pour ces deux valeurs notre résultat est donc plus précis (nous gagnons un facteur 3500 pour $n = 2$ et 430 pour $n = 3$ et nous n'avons pas de condition d'indépendance des racines des $\alpha_i$). Pour $n = 4$ et $n = 5$ notre gain est plus faible (le facteur est 30 et 1.3 respectivement). Nous montrerons (au paragraphe 7) qu'il est raisonnable d'espérer une constante de l'ordre de grandeur de $2^{3n+9}n^{2n+5}$ par la méthode présentée ici. Notons aussi que les résultats de [MW2] et [MW3] sont numériquement plus efficaces pour $n = 2$ quand $B$ n'est pas trop grand, essentiellement quand $\log B < 10^6$ (mais l'hypothèse

$$\frac{Da_1}{|\log \alpha_1|} = \frac{Da_2}{|\log \alpha_2|}$$

du corollaire 1.1 de [MW3] nécessite des précautions).

Nous n'avons traité que le cas où les coefficients $b_i$ sont entiers rationnels, parce que c'est le plus important pour les applications, mais la méthode permet aussi de minorer des combinaisons linéaires de logarithmes à coefficients algébriques.

Dans le présent texte, après quelques lemmes préliminaires (paragraphe 2), nous construisons (paragraphe 3) la fonction auxiliaire, qui repose sur les constructions générales de [W4]. En la combinant avec l'inégalité de Liouville, cette fonction nous permet (paragraphe 5) de résoudre non trivialement un système d'équations. Alors le lemme de zéros de Philippon (paragraphe 4) complète la mise en place de la "machine" transcendante. Après avoir explicité les conditions que doivent satisfaire nos paramètres (paragraphe 6), nous utilisons cette machine deux fois (paragraphes 7 et 8) avant de pouvoir conclure la démonstration (paragraphe 9).

Pour obtenir un résultat entièrement explicite, il faut choisir des valeurs numériques pour certains paramètres qui interviennent dans la démonstration de transcendance. Effectuer ces choix au début de la démonstration (comme dans [B]) permet une plus grande concision. Ici au contraire, comme dans [BGMMS], [W2] et [Y2] par exemple, nous avons délibérèment poursuivi la plus grande partie de la preuve en ne choisissant pas de valeur numérique pour ces paramètres, mais en explicitant les contraintes qu'ils doivent satisfaire. L'avantage de cette présentation est une plus grande facilité pour comprendre et vérifier les détails de la preuve. De plus si des raffinements sont apportés ultérieurement à certaines estimations (par exemple au lemme de zéros), il ne sera pas nécessaire de refaire entièrement la démonstration. Nous expliquons aussi comment nous avons choisi ces paramètres en effectuant préalablement des calculs approximatifs (paragraphe 7).

Le résultat final auquel nous arrivons est de même qualité que les meilleurs que l'on sache obtenir par la méthode de Baker, bien que la méthode de Baker ait fait l'objet (cf [B]) depuis bientôt un quart de siècle de contributions de nombreux auteurs (sans parler des travaux antérieurs de Gel'fond). Evidemment le présent travail bénéficie de cette longue expérience. D'un autre côté les nouvelles méthodes que nous proposons n'utilisent ni extrapolation, ni théorie de Kummer et les fonctions auxiliaires sont tout-à-fait différentes de celle de Baker.

Comme cela est souligné dans [Wü], les derniers progrès substantiels concernant à la fois la méthode de Baker et les résultats (minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques) datent du milieu des années 70. On peut espérer que les arguments nouveaux qui sont présentés ici permettront de nouveaux développements de ce sujet.

## 2. Lemmes préliminaires

Dans cette section nous fixons les notations et nous donnons quelques lemmes auxiliaires qui nous seront utiles plus loin.

Quand $n$ est un entier positif et $L_1, \ldots, L_n$ des nombres réels positifs, nous désignons par $\mathbb{Z}^n(L)$ l'ensemble des éléments $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $|\lambda_i| < L_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Si $\Phi$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, on écrit $\Phi(L)$ pour $\Phi \cap \mathbb{Z}^n(L)$.

On considérera des fonctions analytiques de $d$ variables complexes. On définit, pour $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, $|z| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_d|\}$. Soit $R = (R_1, \ldots, R_d) \in \mathbb{R}^d$ avec $R_i \geq 0$, $(1 \leq i \leq d)$ ; on désigne par $\mathcal{D}_d(0, R)$ le polydisque $\{z \in \mathbb{C}^d; |z_i| \leq R_i, (1 \leq i \leq d)\}$. Quand $F$ est une fonction analytique dans un voisinage de ce polydisque, $|F|_R$ désigne le nombre $\sup\{|F(z)|; z \in \mathcal{D}_d(0, R)\}$.

Pour $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $\|\tau\|$ pour $\tau_1 + \cdots + \tau_d$. On écrit aussi $\tau!$ pour le produit $\tau_1! \cdots \tau_d!$.

Soient $S_1$, $S_2$ des entiers positifs ; $\mathcal{S}_d(S_1, S_2) = \mathcal{S}$ désignera l'ensemble des $(\sigma, s) \in \mathbb{N}^{2d}$ vérifiant $0 \leq \sigma_i < S_1$, $s_i \geq 1$, $(1 \leq i \leq d)$ et $\|s\| \leq S_2$. Ainsi $\operatorname{Card} \mathcal{S} = S_1^d \binom{S_2}{d}$.

Nous utiliserons les polynômes de Fel'dman, qui sont définis par

$$\Delta(z; s) = (z+1) \cdots (z+s)/s!$$

pour $s$ entier positif, tandis que $\Delta(z; 0) = 1$. Par récurrence sur S on vérifie que $\binom{S}{s} \leq 2^{S-1}$ pour tout entier $S \geq 1$ et $0 \leq s \leq S$. On en déduit

$$|\Delta(z; s)| \leq \binom{[|z|] + s + 1}{s} \leq 2^{|z| + s}.$$

C'est essentiellement cette majoration qu'utilise Baker dans [B]. Nous aurons besoin d'estimations plus fines : en majorant $s^s/s!$ par $e^s$ (du fait que la série exponentielle est à coefficients positifs) et en utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto t \log(1 + 1/t)$, on trouve

$$|\Delta(z, s)| \leq \left(\frac{|z|}{S} + 1\right)^S e^s$$

pour $0 \leq s \leq S$.

LEMME 2.1. *Soient $S_1$, $S_2$ deux entiers positifs, $R$ un nombre réel positif et $z_1, \ldots, z_d$ des nombres complexes. On note $S = S_1 S_2$ et on suppose*

$$\max_{1 \leq i \leq d} |z_i| \leq R.$$

*Alors pour tout $(\sigma, s) \in \mathcal{S}_d(S_1, S_2)$ on a*

$$\prod_{i=1}^{d} |\Delta(z_i + \sigma_i; S_1)^{s_i}| \leq \left(\frac{R}{S_1} + 2\right)^S e^S.$$

*Démonstration.* Pour $1 \leq i \leq d$ on a

$$|\Delta(z_i + \sigma_i; S_1)| \leq \left(\frac{R + \sigma_i}{S_1} + 1\right)^{S_1} e^{S_1}.$$

D'autre part pour $(\sigma, s) \in \mathcal{S}_d(S_1, S_2)$ on a $S_1||s|| \leq S$, d'où le résultat. □

Quand $k$, $\ell$ et $m$ sont des entiers $\geq 0$, on note

$$\Delta(z; k, l, m) = \frac{1}{m!}\left(\frac{d}{dz}\right)^m (\Delta(z; k))^\ell.$$

LEMME 2.2. *Pour $\ell, m$ entiers $\geq 0$, $k$ entier positif, et $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$|\Delta(z; k, \ell, m)| \leq \left(\frac{|z|}{k} + 1\right)^{k\ell} (2e)^{k\ell},$$

*De plus, si on désigne par $\nu(k)$ le p.p.c.m. de $1, 2, \ldots, k$, on a*

$$\log \nu(k) \leq \left(1 + \frac{4}{103}\right) k$$

*et, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, le nombre*

$$\nu(k)^m \Delta(a; k, \ell, m)$$

*est entier. Enfin, si $k, R, L$ sont des entiers positifs avec $k \geq R$, les $RL$ polynômes*

$$\Delta(z + r; k)^\ell, \qquad (0 \leq r < R,\ 1 \leq \ell \leq L)$$

*sont linéairement indépendants. Par conséquent les polynômes en $d$ variables*

$$\prod_{i=1}^{d} \Delta(z_i + \sigma_i; S_1)^{s_i}, \qquad ((\sigma, s) \in \mathcal{S}),$$

*sont linéairement indépendants.*

*Démonstration.* Voir par exemple [Y2], lemma 2.3 p.127. La majoration de $\nu(k)$ provient de [RS], formule (3.35). □

*Remarque.* On pourrait remplacer 4/103 par une constante plus petite en supposant $k$ suffisamment grand (dans l'application qui suit, ce n'est pas restrictif). D'autre part on pourrait améliorer les constantes numériques en remplaçant les polynômes de Fel'dman par ceux qui sont utilisés dans [MW2,3].

Rappelons maintenant l'inégalité de Liouville. On utilise la notion habituelle de hauteur logarithmique absolue d'un nombre algébrique :

$$h(\alpha) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]} \sum_v d_v \log \max\{1, |\alpha|_v\}$$

avec $\sum_{v|v_0} d_v = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ pour chaque place $v_0$ de $\mathbb{Q}$ et (formule du produit) $\sum_v d_v \log|\alpha|_v = 0$ si $\alpha \neq 0$.

LEMME 2.3. *Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$ un polynôme en $q$ variables, de degré au plus $N_j$ en $X_j$, $(1 \leq j \leq q)$, et de longueur $L(P)$. Soient $\alpha_j$, $(1 \leq j \leq q)$ des nombres algébriques. Enfin soit $D$ le degré d'un corps de nombres contenant $\alpha_j$. Si le nombre $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ n'est pas nul, alors*

$$\log|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)| \geq -(D-1)\log L(P) - D\sum_{j=1}^{q} N_j h(\alpha_j).$$

*Démonstration.* C'est le lemme 3 de [MW1]. □

Voici un exemple d'application de cette inégalité de Liouville :

LEMME 2.4. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls dans un corps de degré $D$, $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ des déterminations de leurs logarithmes, et $b_1, \ldots, b_n$ des entiers rationnels, tels que le nombre $\Lambda = b_1 \log\alpha_1 + \cdots + b_n \log\alpha_n$ ne soit pas nul. Alors*

$$|\Lambda| \geq 2^{-D} \exp\left\{-D\sum_{i=1}^{n} |b_i| h(\alpha_i)\right\}.$$

*Démonstration.* Voir [MW2] lemma 2.2. □

Nous utiliserons un lemme de zéros qui nous fournira l'existence d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$. Pour travailler avec ce sous-espace il faudra en choisir une base et pour cela nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 2.5. *Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de dimension $d$ et soient $L_1, \ldots, L_n$ des nombres réels positifs. Il existe un sous-ensemble $J$ de $\{1, \ldots, n\}$, ayant $n-d$ éléments, tel que $\mathcal{V}$ soit l'intersection de $n-d$ hyperplans*

$$z_j = \sum_{i \notin J} u_i^{(j)} z_i, \qquad (j \in J),$$

*avec des nombres complexes $u_i^{(j)}$ satisfaisant*

$$|u_i^{(j)}| \leq L_j / L_i, \qquad (j \in J, 1 \leq i \leq n, i \notin J).$$

Autrement dit une base $(v_i)_{i \notin J}$ de $\mathcal{V}$ est donnée par

$$v_i = (v_i^{(j)})_{1 \leq j \leq n}, \qquad \text{avec} \qquad v_i^{(j)} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{pour } j \notin J, \\ u_i^{(j)} & \text{pour } j \in J. \end{cases}$$

*Démonstration.* Si $d = n$ on prend pour $J$ l'ensemble vide. Supposons $d < n$. On écrit $\mathcal{V}$ comme intersection de $n-d$ hyperplans

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\ell} z_i = 0, \qquad (1 \leq \ell \leq n-d).$$

Pour chaque sous-ensemble $J$ de $\{1, \ldots, n\}$ ayant $n-d$ éléments, on définit $\Delta_J$ comme la valeur absolue du déterminant de la matrice

$$\left| a_{j\ell} \right|_{j \in J, 1 \leq \ell \leq n-d}.$$

On choisit $J$ de telle sorte que la quantité $\Delta_J \prod_{j \in J} L_j$ soit maximale et on utilise les formules de Cramer pour résoudre le système

$$\sum_{j \in J} a_{j\ell} z_j = -\sum_{i \notin J} a_{i\ell} z_i, \qquad (1 \leq \ell \leq n-d).$$

On trouve

$$z_j = \sum_{i \notin J} u_i^{(j)} z_i, \qquad (j \in J),$$

où $\pm \Delta_J u_i^{(j)}$ est un déterminant $\left| a_{s\ell} \right|$, $s$ décrivant $\{i\} \cup (J - \{j\})$. Donc

$$\Delta_J |u_i^{(j)}| L_i \prod_{s \in J, s \neq j} L_s \leq \Delta_J \prod_{s \in J} L_s,$$

ce qui donne la majoration annoncée. $\square$

Le lemme 2.6 que nous allons donner maintenant est une version effective de l'énoncé suivant :

Si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de dimension $d < n$ et si $s_{\mathcal{V}}$ désigne la surjection canonique $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/\mathcal{V}$, alors $s_{\mathcal{V}}(\mathbb{Z}^n)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^n/\mathcal{V}$ de rang $\geq n-d$ ; de plus, le rang de $s_{\mathcal{V}}(\mathbb{Z}^n)$ est $n-d$ si et seulement si $\mathcal{V}$ est rationnel sur $\mathbb{Q}$.

LEMME 2.6. *Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, de dimension $d < n$. On désigne par $s_{\mathcal{V}}$ la surjection canonique $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/\mathcal{V}$, par $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on suppose que $s_{\mathcal{V}}(e_{d+1}), \ldots, s_{\mathcal{V}}(e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n/\mathcal{V}$. Soient $L_1, \ldots, L_n$ des nombres réels positifs.*
*1. On a*

$$\mathit{Card}\, s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(L)\big) \geq \prod_{j=d+1}^{n} (2L_j - 1).$$

*2. Si*

$$\mathit{Card}\, s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(L)\big) < (2L_{d+1} - 1)\cdots(2L_n - 1) \min_{1\leq i\leq d}(2L_i - 1),$$

*alors $\mathcal{V}$ est intersection de $n-d$ hyperplans d'équations*

$$z_j = \sum_{i=1}^{d} \frac{\mu_i^{(j)}}{\mu_i} z_i, \quad d < j \leq n,$$

*avec $\mu_i \in \mathbb{Z}$, $\mu_i^{(j)} \in \mathbb{Z}$ et*

$$0 < \mu_i < 2L_i, \quad |\mu_i^{(j)}| < 2L_j, \qquad (1 \leq i \leq d,\, d < j \leq n).$$

*Démonstration.*
1. Les éléments $\sum_{j=d+1}^{n} \lambda_j s_{\mathcal{V}}(e_j)$, $(\lambda_j \in \mathbb{Z},\ |\lambda_j| < L_j,\ d < j \leq n)$ sont deux-à-deux distincts et appartiennent à $s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(L)\big)$.
2. Nous avons supposé $e_{d+1}, \ldots, e_n$ linéairement indépendants modulo $\mathcal{V}$. Ecrivons $s_{\mathcal{V}}(e_i) \in \mathbb{C}s_{\mathcal{V}}(e_{d+1}) + \cdots + \mathbb{C}s_{\mathcal{V}}(e_n)$ :

$$e_i + \sum_{j=d+1}^{n} u_i^{(j)} e_j \in \mathcal{V}, \qquad (1 \leq i \leq d).$$

Ainsi

$$\mathcal{V} = \left\{ (z_1, \dots, z_d, \sum_{i=1}^{d} u_i^{(d+1)} z_i, \dots, \sum_{i=1}^{d} u_i^{(n)} z_i) \ ; \ (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \right\},$$

ce qui signifie que $\mathcal{V}$ est intersection des $d - n$ hyperplans d'équations

$$z_j = \sum_{i=1}^{d} u_i^{(j)} z_i, \qquad (d+1 \leq j \leq n).$$

On peut donc identifier $\mathbb{C}^n/\mathcal{V}$ à $\mathbb{C}^{n-d}$ en écrivant

$$s_V(z) = \left( z_j - \sum_{i=1}^{d} u_i^{(j)} z_i \right)_{d<j\leq n}.$$

Soit $i$ un entier, $1 \leq i \leq d$. Prenons $\lambda \in \mathbb{Z}^n(L)$ avec

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_d = 0;$$

on voit que $s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(L)\big)$ contient les points

$$\big(\lambda_j - u_i^{(j)} \lambda_i\big)_{d<j\leq n},$$

pour $(\lambda_i, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n-d+1}$, $|\lambda_i| < L_i$, $|\lambda_j| < L_j$, $(d < j \leq n)$. Le principe des tiroirs montre qu'il existe $(\mu_i, \mu_i^{(d+1)}, \dots, \mu_i^{(n)}) \in \mathbb{Z}^{n-d+1}$, $0 < \mu_i < 2L_i$, $|\mu_i^{(j)}| < 2L_j$, $(d < j \leq n)$, tel que $\mu_i u_i^{(j)} = \mu_i^{(j)}$, $(d < j \leq n)$. Ceci termine la démonstration. $\square$

Nous allons enfin donner une version quantitative de la formule d'algèbre linéaire :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

quand $f : V \longrightarrow V'$ est une application linéaire.

LEMME 2.7. *Soient $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules et $\mathcal{C}$ un sous-ensemble fini de $G_1$ ; on note $\underline{\mathcal{C}}$ l'ensemble des $\lambda - \lambda'$, $(\lambda \in \mathcal{C},\ \lambda' \in \mathcal{C})$. Alors*

$$\mathrm{Card}\,\psi(\mathcal{C}) \cdot \mathrm{Card}\,(\underline{\mathcal{C}} \cap \ker\psi) \geq \mathrm{Card}\,\mathcal{C}.$$

*Démonstration.* Sur $\mathcal{C}$, l'application $\psi$ induit une relation d'équivalence ayant $\mathrm{Card}\,\psi(\mathcal{C})$ classes. Si $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(s)}$ sont des éléments distincts d'une même classe, alors $\lambda^{(\sigma)} - \lambda^{(1)}$, $(1 \leq \sigma \leq s)$ sont $s$ éléments distincts de $\underline{\mathcal{C}} \cap \ker\psi$. $\square$

COROLLAIRE 2.8. *Soient $\Phi$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes non nuls, $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ des déterminations de leurs logarithmes, et $L_1, \ldots, L_n$ des nombres réels positifs. On suppose que les nombres $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors*

$$\mathit{Card}\left\{\alpha_1^{\lambda_1}\cdots\alpha_n^{\lambda_n}\,;\,\lambda\in\Phi(L)\right\}\geq\ \mathit{Card}\,\Phi(L)/\max_{1\leq i\leq n}\{4L_i+1\}.$$

*Démonstration.* Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont multiplicativement indépendants, la minoration annoncée est banale (et il n'est pas nécessaire de diviser par $\max_{1\leq i\leq n}\{4L_i+1\}$). Supposons, au contraire, que les nombres $2i\pi, \log\alpha_1$, $\ldots, \log\alpha_n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$ : comme $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ sont linéairement indépendants, il existe une unique relation

$$2i\pi h_0+h_1\log\alpha_1+\cdots+h_n\log\alpha_n=0,$$

avec $h_i\in\mathbb{Z}$, $(0\leq i\leq n)$, premiers entre eux dans leur ensemble, et $h_0>0$. Le noyau de l'application $\psi:\mathbb{Z}^n\longrightarrow\mathbb{C}^*$ :

$$\psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\alpha_1^{\lambda_1}\cdots\alpha_n^{\lambda_n}$$

est $\mathbb{Z}(h_1, \ldots, h_n)$. On utilise le lemme 2.7 avec $G_1=\mathbb{Z}^n$, $G_2=\mathbb{C}^*$ et $\mathcal{C}=\Phi(L)$. Supposons pour commencer les $L_i$ entiers. Alors $\underline{\mathcal{C}}=\Phi(2L-1)$ (où $2L-1$ représente le $n$-uplet $(2L_1-1, \ldots, 2L_n-1)$). Soit $i$ un indice dans l'intervalle $\{1, \ldots, n\}$ tel que $h_i\neq 0$. Alors

$$\mathrm{Card}\left(\Phi(2L-1)\cap\mathbb{Z}(h_1, \ldots, h_n)\right)\leq 2\frac{2L_i-1}{|h_i|}-1\leq 4L_i-3,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Card}\left(\underline{\mathcal{C}}\cap\ker\psi\right)\leq\max_{1\leq i\leq n}\{4L_i-3\}$$

et le lemme 2.7 donne

$$\mathrm{Card}\,\psi(\mathcal{C})\geq\ \mathrm{Card}\,\Phi(L)/\max_{1\leq i\leq n}\{4L_i-3\},$$

ce qui fournit la conclusion avec $\max_{1\leq i\leq n}\{4L_i+1\}$ remplacé par $\max_{1\leq i\leq n}\{4L_i-3\}$). Si les $L_i$ ne sont pas entiers, on a $\Phi(L)=\Phi(L')$, où $L_i'$ est le plus petit entier $\geq L_i$, et $4L_i'-3\leq 4L_i+1$, d'où le résultat. $\square$

LEMME 2.9. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes non nuls, $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ des déterminations $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes de leurs logarithmes, $L_1, \ldots, L_n$ des nombres réels positifs et $b_1, \ldots, b_n$ des entiers rationnels. On désigne par $\mathcal{W}$ la droite $\mathbb{C}(b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathbb{C}^n$, et par $p_{\mathcal{W}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^n/\mathcal{W}) \times \mathbb{C}^*$ la surjection canonique. Si les nombres*

$$p_{\mathcal{W}}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}\right), \qquad (\lambda \in \mathbb{Z}^n(L))$$

*ne sont pas deux-à-deux distincts, alors il existe un nombre rationnel $\mu$, $0 < \mu < 2\max_{1 \le i \le n} L_i$, tel que*

$$b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n \in \frac{2i\pi}{\mu}\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* Si les nombres $p_{\mathcal{W}}\left(\lambda, \alpha^{\lambda}\right)$ ne sont pas deux-à-deux distincts, par différence il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^n(2L)$ avec $0 \neq \lambda \in \mathcal{W}$ et $\alpha^{\lambda} = 1$. Ecrivons $\lambda_i = \mu b_i$, avec, a priori, $\mu \in \mathbb{C}^*$. Comme $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls, on a en fait $\mu \in \mathbb{Q}^*$. Quitte à remplacer $\lambda$ par $-\lambda$, on peut supposer $\mu > 0$. La relation $\alpha^{\lambda} = 1$ montre qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\lambda_1 \log \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \log \alpha_n = 2i\pi\lambda_0,$$

donc

$$b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n = 2i\pi\lambda_0/\mu.$$

Enfin, si $i \in \{1, \ldots, n\}$ est tel que $b_i \neq 0$, on a $\mu \le |\lambda_i/b_i| \le |\lambda_i| < 2L_i$. □

Enfin le lemme suivant permet de supposer que les nombres $\log \alpha_i$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ pour la démonstration du théorème 1.1.

LEMME 2.10. *Soient $K$ un corps de nombres de degré $D$ sur $\mathbb{Q}$, et $\ell_1, \ldots, \ell_n$ des nombres complexes linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$, tels que $\exp(\ell_i) = \alpha_i \in K$ pour $1 \le i \le n$. Soit $V$ un nombre réel $\ge 1$ satisfaisant, pour $1 \le i \le n$,*

$$V \ge \max\left\{h(\alpha_i),\, \frac{1}{D}|\ell_i|\right\}.$$

*Il existe des entiers rationnels $h_1, \ldots, h_n$, non tous nuls, tels que*

$$h_1\ell_1 + \cdots + h_n\ell_n = 0$$

*et*

$$\max_{1 \le i \le n} |h_i| \le \left(9(n-1)D^3V\right)^{n-1}.$$

*Démonstration.* C'est une version affaiblie du lemme 4.1 de [W2]. ▯

## 3. La fonction auxiliaire

La fonction auxiliaire utile dans la suite de ce texte est le corollaire 3.2 ci-dessous, que l'on va déduire des résultats du paragraphe 2 de [W4]. Voici une conséquence du corollaire 2.7 de [W4]. Rappelons que la notation $\mathcal{S} = \mathcal{S}_d(S_1, S_2)$ a été introduite au début du paragraphe 2.

PROPOSITION 3.1. *Soient $d$, $M$, $S_1$, $S_2$, $S$ des entiers positifs et $\varrho$, $r^*$, $r_1, \dots, r_d$, $E$, $P$, $U$, $V$ des nombres réels positifs satisfaisant*

$$U + V \geq 2, \quad E \geq e, \quad S = S_1 S_2, \quad S_1 \geq d, \quad S_2 \geq d,$$

$$r^* \geq \max_{1 \leq i \leq d} r_i, \qquad P + \log(2E) \leq \varrho(U + V),$$

$$P + \log 9 + 2d \log\big((1+\varrho)(U+V)\big) \leq \varrho(U + V)$$

*et*

$$2d(1+\varrho)^2 (U+V)^2 \leq S(1 - d/S_2)^{d-1} MP \log E.$$

*Soient $\psi_{\sigma s \mu}$, $((\sigma, s) \in \mathcal{S}$, $1 \leq \mu \leq M)$ des fonctions analytiques d'une variable complexe et $\vartheta_1, \dots, \vartheta_d$ des nombres complexes, tels que les fonctions $f_{\sigma s \mu}(z_1, \dots, z_d) = \psi_{\sigma s \mu}(\vartheta_1 z_1 + \dots + \vartheta_d z_d)$ soient analytiques dans $\mathcal{D}_d(0, R)$, avec $R_i = E r_i$, $(1 \leq i \leq d)$ et vérifient*

$$e^S \left( \frac{Er^*}{S_1} + 2 \right)^S \sum_{(\sigma,s) \in \mathcal{S}} \sum_{\mu=1}^{M} |f_{\sigma s \mu}|_R \leq e^U.$$

*Alors il existe des entiers rationnels $p_{\sigma s \mu}$, non tous nuls, majorés par*

$$\max_{\sigma, s, \mu} |p_{\sigma s \mu}| \leq e^P,$$

*tels que la fonction*

$$F(z) = \sum_{(\sigma,s) \in \mathcal{S}} \sum_{\mu=1}^{M} p_{\sigma s \mu} \left( \prod_{i=1}^{d} \Delta(z_i + \sigma_i; S_1)^{s_i} \right) f_{\sigma s \mu}(z)$$

*vérifie*

$$|F|_r \leq e^{-V}.$$

*Démonstration.* On applique le corollaire 2.7 de [W4] aux fonctions

$$\varphi_\lambda(z) = \left(\prod_{i=1}^{d} \Delta(z_i + \sigma_i; S_1)^{s_i}\right) f_{\sigma s \mu}(z)$$

en prenant $\lambda = (\sigma, s, \mu)$, $f = t = 0$, $n = d$, $m = 1$, $T = 1$, $L = S_1^d\binom{S_2}{d}M$, $J = 1$, $\Delta = P$, $\varrho' = \varrho$, $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$, $\mathcal{W} = 0$, $\mathcal{L}(z) = \vartheta_1 z_1 + \cdots + \vartheta_d z_d$.

On prend pour $(v_1, \ldots, v_d)$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$. On utilise le lemme 2.1 afin de majorer $\sum_\lambda |\varphi_\lambda|_R$ par $e^U$. Enfin pour $1 \leq i \leq d-1$ on a

$$\frac{S - iS_1}{S + i} = 1 - \frac{iS_1 + i}{S + i} \geq 1 - \frac{iS_1 + i}{S} \geq 1 - \frac{d}{S_2}$$

car $S_1 \geq d$, donc

$$S_1^d \binom{S_2}{d} \geq \binom{S + d - 1}{d - 1} \frac{S}{d} \left(1 - \frac{d}{S_2}\right)^{d-1}.$$

$\square$

*Remarque.* Il serait intéressant de savoir si on peut, dans le corollaire 2.7 de [W4], remplacer (dans les hypothèses et dans la conclusion) les polydisques de $\mathcal{V}$ de la forme

$$\{z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n; z_i \in \mathbb{C}, |z_i| \leq \rho_i, 1 \leq i \leq n\}$$

avec $\rho_i = r_i$ ou $R_i$, par l'intersection de $\mathcal{V}$ avec un polydisque de $\mathbb{C}^d$.

Voici l'énoncé qui va être utile dans la suite.

COROLLAIRE 3.2. *Soient $d$, $D$, $S_1$, $S_2$, $S$, $H$, $T$ des entiers positifs, $\varrho$, $U_0$, $V_0$, $P$, $r_0, r_1, \ldots, r_d$, $r^*$, $E$ des nombres réels positifs, $\beta_1, \ldots, \beta_d$ et $\xi_{\delta\sigma s h}$, $(1 \leq \delta \leq D$, $(\sigma, s) \in \mathcal{S}$, $0 \leq h \leq H)$ des nombres complexes. On définit $\Lambda = \beta_1\vartheta_1 + \cdots + \beta_d\vartheta_d$. On suppose*

$$U_0 + V_0 \geq 2, \quad E \geq e, \quad S = S_1 S_2, \quad S_1 \geq d, \quad S_2 \geq d,$$

$$r^* \geq \max_{1 \leq i \leq d} \{r_i + r_0|\beta_i|\}, \quad 0 < r_0 \leq 1,$$

$$P + \log(2E) \leq \varrho(U_0 + V_0),$$

$$P + 2d\log\big((1+\varrho)(U_0+V_0)\big) + \log 9 \le \varrho(U_0+V_0),$$

$$U_0 \ge \log\left\{\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}}\sum_{h=0}^{H}|\xi_{\delta\sigma s h}|\right\} + EH\sum_{i=1}^{d}|\vartheta_i|(r_i + r_0|\beta_i|)$$
$$+S\log\left(e\left(\frac{r^*E}{S_1}+2\right)\right) - T\log r_0$$

*et*

$$2d(1+\varrho)^2(U_0+V_0)^2 \le S\left(1-\frac{d}{S_2}\right)^{d-1} D(H+1)P\log E.$$

*Alors il existe des entiers rationnels non tous nuls $p_{\delta\sigma s h}$, majorés par*

$$\max_{\delta,\sigma,s,h}|p_{\delta\sigma s h}| \le e^P,$$

*tels que, pour tout $(u_1,\ldots,u_d)\in\mathcal{D}_d(0,r)$ et tout $t\in\mathbb{N}$ avec $t\le T$, on ait*

$$\left|\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma s h}\xi_{\delta\sigma s h}\sum_{\|\tau\|=t}\frac{1}{\tau_0!}(h\Lambda)^{\tau_0}\prod_{i=1}^{d}\beta_i^{\tau_i}\Delta(u_i+\sigma_i;S_1,s_i,\tau_i)e^{u_i\vartheta_i h}\right|$$
$$\le e^{-V_0}.$$

Dans la dernière formule, $\tau$ décrit les éléments de $\mathbb{N}^{d+1}$ vérifiant $\|\tau\| = t$.

*Démonstration* On va appliquer la proposition 3.1 avec $\mu$ remplacé par $(\sigma,h)$, $M$ par $D(H+1)$, et $r_i$ par $r_i' = r_i + r_0|\beta_i|$, $(1\le i\le d)$, aux fonctions $\psi_{\delta\sigma s h}(w) = \xi_{\delta\sigma s h}e^{hw}$, de telle sorte que $f_{\delta\sigma s h}(z) = \xi_{\delta\sigma s h}\prod_{i=1}^{d}e^{z_i\vartheta_i h}$. On définit une dérivation $D_\beta = \sum_{i=1}^{d}\beta_i\partial/\partial z_i$ et on a $D_\beta f_{\delta\sigma s h}(z) = h\Lambda f_{\delta\sigma s h}(z)$. On prend ensuite

$$U = U_0 + T\log r_0 \qquad V = V_0 - T\log r_0.$$

Ecrivons

$$F(z_1,\ldots,z_d) = \sum_{\delta=1}^{D}\sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma s h}\xi_{\delta\sigma s h}\prod_{i=1}^{d}\Delta(z_i+\sigma_i;S_1)^{s_i}e^{z_i\vartheta_i h}.$$

La formule de Leibniz montre que la quantité que l'on veut majorer n'est autre que

$$\frac{1}{t!} D_\beta^t F(u_1, \ldots, u_d),$$

avec $u \in \mathcal{D}_d(0, r)$. Grâce aux inégalités de Cauchy on a :

$$\left| \frac{1}{t!} D_\beta^t F(z) \right| \leq r_0^{-t} \sup\{|F(z + \zeta\beta)|; \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \leq r_0\}.$$

Le corollaire 3.2 en résulte. $\square$

## 4. Le lemme de zéros

Soient $d \geq 1$, $n \geq 1$ deux entiers, $\beta_1, \ldots, \beta_d$ des nombres complexes non tous nuls, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ des éléments de $\mathbb{C}^d$, $\Phi$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes non nuls. D'autre part soient $S$, $H$, $T$, $L_1, \ldots, L_n$ des entiers positifs. Rappelons que $\Phi(L)$ désigne l'ensemble des $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi$ qui vérifient $|\lambda_j| < L_j$ pour $1 \leq j \leq n$.

On définit une dérivation

$$D_\beta = \beta_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \cdots + \beta_d \frac{\partial}{\partial X_d}$$

sur l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d, Y]$. On veut savoir s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d, Y]$, de degré total $\leq S$ en $X_1, \ldots, X_d$ et de degré $\leq H$ en $Y$, vérifiant

$$(4.1) \qquad \begin{cases} D_\beta^t P\left(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}\right) = 0 \\ \text{pour tout } t \in \mathbb{N} \text{ avec } 0 \leq t < T \text{ et tout } \lambda \in \Phi(L). \end{cases}$$

Voici quatre cas dans lesquels l'existence d'un tel polynôme $P$ est assurée de manière essentiellement triviale.

a) S'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu$, tel que, en notant

$$p_\mathcal{W} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \frac{\mathbb{C}^d}{\mathcal{W}} \times \mathbb{C}^*$$

la surjection canonique et

$$\Sigma = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n})\,;\, \lambda \in \Phi(L)\} \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^*,$$

on ait

$$T \operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma) < \binom{S+d-\nu}{d-\nu}(H+1),$$

alors un tel polynôme existe.

En effet, en projetant sur $(\mathbb{C}^d/\mathcal{W}) \times \mathbb{C}^*$, on est ramené à un système d'équations (où les inconnues sont les coefficients de $P$) ayant plus d'inconnues que d'équations.

En particulier (en prenant $\mathcal{W} = 0$), si

$$T \operatorname{Card} \Sigma < \binom{S+d}{d}(H+1),$$

alors le système d'équations (4.1) lui-même possède plus d'inconnues que de conditions.

b) S'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu$, contenant $(\beta_1, \ldots, \beta_d)$, tel que

$$\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma) < \binom{S+d-\nu}{d-\nu}(H+1),$$

alors, pour la même raison, un tel polynôme existe.

Par exemple (en prenant $\mathcal{W} = \mathbb{C}^d$), si

$$\operatorname{Card}\{\alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}; \lambda \in \Phi(L)\} < H,$$

alors il existe trivialement un tel polynôme ne dépendant que de la variable $Y$. Aussi (en prenant $\mathcal{W} = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$) l'existence de $P \neq 0$ vérifiant (4.1) est encore assurée si

$$\operatorname{Card} \Sigma < \binom{S+d-1}{d-1}(H+1).$$

Cette dernière condition ne fait pas intervenir $T$ ; il convient de remarquer que, dans (4.1), on peut limiter $t$ à l'intervalle $0 \leq t \leq \min\{S, T\}$, car $D_\beta^t$ est nul sur les monomes de degré $< t$ en $X_1, \ldots, X_d$.

c) S'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu < d$, tel que, en notant

$$s_{\mathcal{W}} : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d/\mathcal{W}$$

la surjection canonique et

$$\mathcal{E} = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n)\,;\, \lambda \in \Phi(L)\} \subset \mathbb{C}^d,$$

on ait

$$T \text{ Card}\, s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) < \binom{S+d-\nu}{d-\nu},$$

alors, par le même argument, il existe un tel polynôme, qui en plus soit indépendant de la variable $Y$.

d) S'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu < d$, contenant $(\beta_1, \dots, \beta_d)$, alors il suffit de l'inégalité

$$\text{Card}\, s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) < \binom{S+d-\nu}{d-\nu}$$

pour assurer l'existence d'un polynôme non nul en $X_1, \dots, X_d$, de degré total $\leq S$ et indépendant de $Y$, vérifiant (4.1).

Le lemme de zéros qui suit affirme que, à des constantes près, ces conditions suffisantes sont aussi nécessaires pour l'existence de $P$.

On garde les notations précédentes, mais en plus on choisit des nombres réels $a_0, \dots, a_d$ vérifiant $a_0 \geq \cdots \geq a_d > 0$, $a_0 + \cdots + a_d \leq 1$ et, pour $0 \leq \nu \leq d$, on pose $a_\nu L = (a_\nu L_1, \dots, a_\nu L_n)$,

$$\Sigma_\nu = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n})\,;\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Phi(a_\nu L)\} \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^*$$

et

$$\mathcal{E}_\nu = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n)\,;\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Phi(a_\nu L)\} \subset \mathbb{C}^d.$$

PROPOSITION 4.2. *On suppose :*

*1) pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu$ avec $0 \leq \nu \leq d$, on a*

$$T \ \mathit{Card}\, p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) > (d+1)^2 S^{d-\nu} H,$$

*2) pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu$ avec $1 \leq \nu \leq d$, qui contient $(\beta_1, \dots, \beta_d)$, on a*

$$\mathit{Card}\, p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) > (d+1) S^{d-\nu} H,$$

*3) pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu$ avec $0 \leq \nu \leq d-1$, on a*

$$T \ \mathrm{Card}\, s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1}) > \frac{(d+1)^2}{\nu+1} S^{d-\nu}$$

*et*

*4) pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, contenant $(\beta_1, \dots, \beta_d)$ et de dimension $\nu$ avec $1 \leq \nu < d$, on a*

$$\mathrm{Card}\, s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1}) > \frac{d+1}{\nu+1} S^{d-\nu}.$$

*Alors il n'existe pas de polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d, Y]$, de degré total $\leq S$ en $X_1, \dots, X_d$ et de degré $\leq H$ en $Y$, vérifiant les conditions (4.1).*

*Remarque.* On va utiliser le théorème 2.1 de [P], avec un petit raffinement dont l'utilité dans ce contexte a été signalée par Michel Laurent : au lieu de prendre un seul ensemble $\Sigma$ dans le lemme de zéros de [P], on peut en prendre plusieurs, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_d$, contenant l'origine, avec $\Sigma_1 \supseteq \cdots \supseteq \Sigma_d$, et remplacer la définition de $\Sigma(m)$ par

$$\Sigma(m) = \{x_1 + \cdots + x_m \ ; \ x_i \in \Sigma_i \, , 1 \leq i \leq m\}.$$

Alors la quantité $\mathrm{Card}\,(\Sigma + G')/G')$ dans la conclusion du théorème 2.1 de [P] peut être remplacée par $\mathrm{Card}\,(\Sigma_r + G')/G')$, avec $r = \dim G'$. C'est ce qui nous permet de prendre des $a_\varkappa$ qui ne sont pas forcément tous égaux dans l'énoncé de la proposition 4.2. Il se trouve que, pour des raisons techniques, quand nous choisirons les paramètres aux paragraphes 8 et 9, nous serons amenés à prendre $a_0 = \cdots = a_d$ ; cependant, en modifiant ce choix, on devrait pouvoir améliorer l'estimation finale du théorème 1.1.

*Démonstration.* On considère le groupe algébrique $G = \mathbf{G}_a^d \times \mathbf{G}_m$, de dimension $d+1$ et on pose $p = 2$, $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_a^d$ et $G_2 = \mathbf{G}_m$. Comme $a_0 + \cdots + a_d \leq 1$, on a $\Sigma_0 + \cdots + \Sigma_d \subset \Sigma$. On plonge $G$ dans l'espace affine de dimension $d+1$ de la manière habituelle et on identifie l'espace tangent $T_G(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^{d+1}$ en posant

$$\exp_G(z_1, \dots, z_{d+1}) = (z_1, \dots, z_d, e^{z_{d+1}}).$$

On prend $A = \exp_G W$, où $W$ est la droite $\mathbb{C}(\beta_1, \dots, \beta_d, 0)$ de $\mathbb{C}^{d+1}$. Comme les groupes algébriques considérés ici sont linéaires, les constantes

$c_1$ et $c_2$ de [P] peuvent être prises égales à 1. S'il existe un polynôme non nul $P$ vérifiant les conditions (4.1), avec les bornes indiquées pour les degrés, alors il existe un sous-groupe algébrique connexe $G'$ de $G$, de dimension disons $r$, avec $0 \le r \le d$ (c'est-à-dire $G' \neq G$), tel que

$$\binom{[(T-1)/(d+1)] + \operatorname{Codim}_A(A \cap G')}{\operatorname{Codim}_A(A \cap G')} \operatorname{Card}\left((\Sigma_r + G')/G'\right)\mathcal{H}(G'; S, H)$$

soit inférieur ou égal à $\mathcal{H}(G; S, H)$, où la fonction $\mathcal{H}(G'; S, H)$ satisfait, d'après le lemme 3.4 de [P] :

$$\mathcal{H}(G'; S, H) = \begin{cases} S^r & \text{si } G' = \mathcal{W} \times \{1\}, \\ rS^{r-1}H & \text{si } G' = \mathcal{W} \times \mathbf{G}_m, \end{cases}$$

avec $\mathcal{W}$ sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}_a^d$. En particulier $\mathcal{H}(G; S, H) = (d+1)S^d H$. Comme $W$ est une droite contenue dans $\mathcal{W} \times \{0\}$, on a

$$\operatorname{Codim}_A(A \cap G') = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{W} \supset (\beta_1, \dots, \beta_d), \\ 1 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Par convention le coefficient binomial $\binom{M}{N}$ vaut 1 pour $N = 0$ ; d'autre part on minore $[(T-1)/(d+1)] + 1$ par $T/(d+1)$ parce que $T$ est entier. Si $G'$ est de la forme $\mathcal{W} \times \{1\}$, on a $\dim \mathcal{W} = r$ et on obtient une contradiction avec la première ou la deuxième hypothèse de la proposition 4.2 (suivant que $(\beta_1, \dots, \beta_d) \notin \mathcal{W}$ ou $\in \mathcal{W}$) ; si $G' = \mathcal{W} \times \mathbf{G}_m$, on a $\dim \mathcal{W} = r - 1$ et on obtient une contradiction avec la troisième ou la quatrième.

Ceci démontre la proposition 4.2. $\square$

## 5. Résolution d'un système d'équations

*a) Notations et hypothèses communes aux §§5, 6, 7 et 8.*

On se donne des nombres entiers $b_1, \dots, b_n$, non tous nuls, des nombres algébriques non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ainsi que des déterminations $\log \alpha_i$ $(1 \le i \le n)$ des logarithmes de ces nombres et on pose

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i.$$

Soit $B$ un nombre réel $\ge |b_i|$ pour $1 \le i \le n$. On désigne par $K$ le corps de nombres engendré sur $\mathbb{Q}$ par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et par $D$ son degré sur $\mathbb{Q}$ :

$$K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad D = [K : \mathbb{Q}].$$

On choisit une base $\xi_1, \ldots, \xi_D$ de $K$ sur $\mathbb{Q}$, formée d'éléments de la forme $\alpha_1^{u_1} \cdots \alpha_n^{u_n}$, avec $0 \leq u_j < d_j$ et $u_1 + \cdots + u_n \leq D$. On a noté $d_j = [\mathbb{Q}(\alpha_j) : \mathbb{Q}]$, $(1 \leq j \leq n)$.

*b) Notations et hypothèses communes au §5 et au §6.*

Soit $d$ un entier, $2 \leq d \leq n$ et soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, de dimension $d$. De plus soient $L_1, \ldots, L_n$ des entiers positifs. Le lemme 2.5 donne l'existence d'un sous-ensemble $J$ de $\{1, \ldots, n\}$, ayant $n-d$ éléments, tel que $\mathcal{V}$ soit intersection de $n-d$ hyperplans :

$$z_j = \sum_{i \notin J} u_i^{(j)} z_i, \qquad (j \in J).$$

On suppose $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{V}$, c'est-à-dire

$$b_j = \sum_{i \notin J} u_i^{(j)} b_i, \qquad (j \in J).$$

On définit des nombres complexes $\vartheta_i$, $i \notin J$, par

$$\vartheta_i = \log \alpha_i + \sum_{j \in J} u_i^{(j)} \log \alpha_j.$$

Alors pour $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{V}$, on a

$$\sum_{i \notin J} z_i \vartheta_i = z_1 \log \alpha_1 + \cdots + z_n \log \alpha_n.$$

En particulier pour $\lambda \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{V}$ et $h \in \mathbb{Z}$, on a

$$\prod_{i \notin J} e^{\vartheta_i \lambda_i h} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\lambda_i h}. \tag{5.1}$$

*c) Les paramètres auxiliaires.*

On désigne par $L^*$, $S_1$, $S_2$, $S$, $T$, $H$ des entiers positifs, et par $r^*$, $r_0$, $\varrho$, $E$, $P$, $P_0$, $P_1$, $P_2$, $U_0$, $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$, $V_0$, $V_1$ des nombres réels positifs. On suppose

$$U_0 + V_0 \geq 2, \quad E \geq e, \quad S = S_1 S_2, \quad S_1 \geq d, \quad S_2 \geq d, \tag{5.2}$$

$$(5.3)\qquad r^* \geq \max_{i \notin J}\{L_i - 1 + r_0|b_i|\}, \quad 0 < r_0 \leq 1, \quad L^* = \max_{i \notin J} L_i,$$

$$(5.4)\qquad \begin{cases} P + \log(2E) \leq \varrho(U_0 + V_0), \\ P + 2d\log\big((1+\varrho)(U_0+V_0)\big) + \log 9 \leq \varrho(U_0 + V_0), \end{cases}$$

(5.5)

$$P_0 \geq \log\left(S^d(H+1)\sum_{\delta=1}^{D}|\xi_\delta|\right), \ P_1 \geq P + P_0, \ P_2 \geq P + \log\big(DS^d(H+1)\big),$$

$$(5.6)\qquad U_1 \geq S\log\left\{e\left(\frac{r^*E}{S_1}+2\right)\right\} - T\log r_0,$$

$$(5.7)\qquad U_0 \geq P_0 + U_1 + EH\sum_{i\notin J}|\vartheta_i|(L_i - 1 + r_0|b_i|),$$

$$(5.8)\qquad 2d(1+\varrho)^2(U_0+V_0)^2 \leq S(1-d/S_2)^{d-1}D(H+1)P\log E,$$

$$(5.9)\qquad U_2 \geq S\log\left\{2e\left(\frac{L^*}{S_1}+2\right)\right\} + T\log B,$$

$$(5.10)\qquad U_3 \geq P_1 + U_2 + \sum_{i=1}^{n} L_iH|\log\alpha_i| + d\log T + \log(2H),$$

(5.11)

$$U_4 \geq (D-1)\big(P_2 + U_2 + d\log T\big) + DTS_1(1+4/103) + D\sum_{i=1}^{n}(L_iH + d_i)h(\alpha_i),$$

$$(5.12)\qquad U_4 + \log 2 \leq V_0, \qquad U_3 + U_4 + \log 2 \leq V_1$$

et

$$(5.13)\qquad |\Lambda| \leq e^{-V_1}.$$

*d) Enoncé de la proposition 5.14.*

PROPOSITION 5.14. *Sous les hypothèses précédentes, il existe des entiers rationnels* $p_{\delta\sigma h}$, $(1 \leq \delta \leq D,\ (\sigma, s) \in \mathcal{S},\ 0 \leq h \leq H)$, *non tous nuls, majorés par*

$$\max_{\delta,\sigma,s,h} |p_{\delta\sigma s h}| \leq e^{P},$$

*tels que*

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma s h}\xi_\delta \sum_{\|\tau\|=t} \prod_{i\notin J} b_i^{\tau_i} \Delta(\lambda_i + \sigma_i; S_1, s_i, \tau_i) \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\lambda_i h} = 0,$$

*pour* $0 \leq t < T$ *et pour tout* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(L) \cap \mathcal{V}$.

La somme sur $\tau$ porte sur les éléments de $\mathbb{N}^d$, indexés par $\{1, \ldots, n\} \setminus J$, satisfaisant $\|\tau\| = t$.

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de la proposition 5.14, que l'on va décomposer en plusieurs étapes.

*e) Démonstration de la proposition 5.14.*

Première étape. *Utilisation du corollaire 3.2.*

On va appliquer le corollaire 3.2 avec

$$u_i = \lambda_i,\quad \beta_i = b_i,\ r_i = L_i - 1,\quad (1 \leq i \leq n,\ i \notin J).$$

Les conditions (5.2) à (5.8) permettent de vérifier les hypothèses du corollaire 3.2. En utilisant (5.1), on en déduit l'existence d'entiers rationnels $p_{\delta\sigma s h}$, avec

$$\max_{\delta,\sigma,s,h} |p_{\delta\sigma s h}| \leq e^{P},$$

tels que, pour $0 \leq t < T$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(L) \cap \mathcal{V}$, on ait

$$\left| \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma s h}\xi_\delta \sum_{\|\tau\|=t} \frac{1}{\tau_0!}(h\Lambda)^{\tau_0} \prod_{i\notin J} b_i^{\tau_i} \Delta(\lambda_i + \sigma_i; S_1, s_i, \tau_i) \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\lambda_i h} \right| \leq e^{-V_0}.$$

(Dans la somme, $\tau$ décrit $\mathbb{N}^{d+1}$). Notons que l'on a, d'après (5.5),

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}} \sum_{h=0}^{H} |p_{\delta\sigma sh}\xi_\delta| \leq e^{P_1} \tag{5.15}$$

et

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}} \sum_{h=0}^{H} |p_{\delta\sigma sh}| \leq e^{P_2}. \tag{5.16}$$

□

<u>Deuxième étape</u>. *Majoration d'un nombre algébrique.*
Pour chaque $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < T$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(L) \cap \mathcal{V}$, posons

$$\gamma_{t\lambda} = \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma sh}\xi_\delta \sum_{\|\tau\|=t} \prod_{i\notin J} b_i^{\tau_i} \Delta(\lambda_i + \sigma_i; S_1, s_i, \tau_i) \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\lambda_i h}.$$

(Dans la somme, $\tau$ décrit $\mathbb{N}^d$ : on a remplacé $\tau_0$ par 0). Nous allons vérifier la majoration

$$|\gamma_{t\lambda}| \leq e^{-V_0} + e^{-V_1+U_3}.$$

Grâce à la première étape, il suffit de montrer que la quantité

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}} \sum_{h=0}^{H} |p_{\delta\sigma sh}\xi_\delta| \sum_{\|\tau\|=t,\tau_0\geq 1} \frac{1}{\tau_0!}(h|\Lambda|)^{\tau_0} \prod_{i\notin J} |b_i|^{\tau_i} \Delta(\lambda_i+\sigma_i; S_1, s_i, \tau_i)$$
$$\prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|^{\lambda_i h}$$

est majorée par $e^{-V_1+U_3}$. On majore

$$\sum_{\tau_0=1}^{t} \frac{1}{\tau_0!}(h|\Lambda|)^{\tau_0}$$

par $e^{h|\Lambda|} - 1$. Pour $|z| \leq 1$ on a $|e^z - 1| < 2|z|$. Utilisant (5.13), on trouve

$$\sum_{\|\tau\|=t;\tau_0\geq 1} \frac{1}{\tau_0!}(h|\Lambda|)^{\tau_0} \leq 2HT^d e^{-V_1}.$$

Le lemme 2.2 et l'inégalité (5.9) donnent

$$(5.17)\qquad \prod_{i\notin J} |b_i|^{\tau_i} \Delta(\lambda_i + \sigma_i; S_1, s_i, \tau_i) \leq \left(\frac{L^*}{S_1} + 2\right)^S (2e)^S B^T \leq e^{U_2}.$$

Comme $|\alpha_i| \leq e^{|\log \alpha_i|}$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|^{\lambda_i h} \leq \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} L_i H |\log \alpha_i|\right\}.$$

On utilise finalement (5.10) et (5.15) pour conclure. □

<u>Troisième étape</u>. *Minoration d'un nombre algébrique (Liouville).*

Fixons $t, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme au début de la deuxième étape et montrons que, si le nombre algébrique $\gamma_{t\lambda}$ n'est pas nul, alors il est minoré par

$$|\gamma_{t\lambda}| \geq e^{-U_4}.$$

En effet, d'après le lemme 2.2, $\nu(S_1)^t \gamma_{t\lambda}$ est la valeur d'un polynôme, à coefficients entiers rationnels, évalué au point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Le degré en $\alpha_i$ de ce polynôme est au plus $L_i H + d_i$. La longueur de ce polynôme est

$$\nu(S_1)^t \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{(\sigma,s)\in\mathcal{S}} \sum_{h=0}^{H} |p_{\delta\sigma s h}| \sum_{\|\tau\|=t} \prod_{i\notin J} |b_i|^{\tau_i} \Delta(\lambda_i + \sigma_i; S_1, s_i, \tau_i).$$

On utilise la majoration (cf. lemme 2.2)

$$t \log \nu(S_1) \leq TS_1 \left(1 + \frac{4}{103}\right)$$

et on majore $\sum_{\|\tau\|=t} 1$ par $T^d$. Les inégalités (5.16) et (5.17) permettent donc de majorer la longueur du polynôme considéré par

$$T^d e^{P_2 + U_2 + TS_1(1+4/103)}.$$

On utilise finalement l'inégalité de Liouville (lemme 2.3) :

$$\begin{aligned}\left|\nu(S_1)^t \gamma_{t\lambda}\right| \geq \exp\{-(D-1)(P_2 + U_2 + d\log T + TS_1(1+4/103))\\ - D\sum_{i=1}^{n}(L_i H + d_i) h(\alpha_i)\},\end{aligned}$$

et la condition (5.11) donne le résultat annoncé. □

*Quatrième étape. Conclusion.*

Grâce à (5.12), les deux étapes précédentes montrent que l'on a $\gamma_{t\lambda} = 0$ pour tout $0 \leq t < T$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(L) \cap \mathcal{V}$. C'est ce que l'on voulait démontrer. □

## 6. Conditions sur les paramètres

*Les notations et hypothèses qui suivent sont communes aux §§6, 7 et 8.*

Rappelons que nous avons introduit (au §5 a) des entiers rationnels $b_1, \ldots, b_n$, des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, des déterminations $\log \alpha_1$, $\ldots, \log \alpha_n$ de leurs logarithmes, et un nombre réel $B \geq |b_i|$. Nous supposerons aussi $B \geq e$.

On introduit des nombres réels positifs $A_1, \ldots, A_n$, $A$ et $E$ vérifiant

$$\log A_i \geq \max\left\{\frac{1}{D}, h(\alpha_i), \frac{e}{D}|\log \alpha_i|\right\}, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

$$A = \max\{A_1, \ldots A_n\}$$

et

$$e \leq E \leq \min_{1 \leq i \leq n} \min\left\{\frac{D \log A_i}{|\log \alpha_i|}, A_i^D\right\}.$$

On choisit maintenant un nombre réel $c_0 \geq 6$ et on prend $G$, $Z$ et $U$ réels positifs satisfaisant

$$G \geq \log B, \quad G \geq \frac{1}{D}\log E,$$

$$Z \geq \log(c_0 DE) + (n-1)\log\left(\frac{D \log A}{\log E}\right),$$

$$U = D^{n+2} GZ \log A_1 \cdots \log A_n (\log E)^{-n-1}$$

On choisit enfin $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ et $c_5$ nombres réels $> 1$ et on pose

$$T = [c_1 U/DG], \qquad H = [c_3 DZ/\log E],$$

$$S_1 = \min\left\{\left[\frac{G}{c_5}\right], \left[\frac{U}{c_5 DZ}\right]\right\}, \quad S_2 = \left[\frac{c_4 U}{DZS_1}\right], \quad S = S_1 S_2$$

et

$$L_i = [c_2U/DH\log A_i], \qquad (1 \le i \le n).$$

*Remarque.* Les hypothèses $\log A_i \ge 1/D$ et $\log A_i \ge (e/D)|\log\alpha_i|$ servent à assurer l'existence de $E \ge e$. D'autre part le choix naturel de $S_1$ serait $S_1 = \left[G/c_5\right]$ ; mais, dans le cas (improbable) où on aurait $U < DZG$, il faut prendre $S_1 = \left[U/c_5DZ\right]$ pour garantir $S_2 \ge n$.

*Les conditions techniques.*

On suppose pour commencer

$$G \ge nc_5, \quad U \ge nc_5DZ, \quad c_4c_5 \ge n. \tag{6.1}$$

Les hypothèses du §5 b) font intervenir un entier $d$, avec $1 \le d \le n$. Soit $\eta_0 > 0$ ; on pose

$$w_d = c_1+(nd+n+d-d^2)c_2+c_4+\frac{c_1}{c_5}\left(1+\frac{4}{103}\right)+2\eta_0-\eta_1(1-1/D)+n+2.$$

On introduit des paramètres supplémentaires $p_d$, $\eta_1$, $\mu$, tous $> 0$ et on suppose

$$c_0 \ge \frac{enc_2c_5}{(n-1)(c_3-1/D)}+2, \quad c_0 \ge \frac{2nc_2c_5}{(n-1)(c_3-1/D)}+4, \tag{6.2}$$

$$p_d+\eta_1 \le \mu w_d, \tag{6.3}$$

$$2d(1+\mu)^2w_d^2 \le c_3c_4p_d\left(1-\frac{d}{S_2}\right)^d, \tag{6.4}$$

$$\eta_0 \ge \frac{D}{U}\log\left(c_3c_4^dc_1^dU^d\right) \tag{6.5}$$

et

$$\eta_1 \ge 1, \quad \eta_1 \ge \frac{2dD}{U}\log\left((\mu+1)w_dU\right)+\frac{D\log 9}{U}. \tag{6.6}$$

LEMME 6.7. *Sous les hypothèses (6.1) à (6.6) précédentes, quand on pose* $V_1 = v_d U$ *avec*

$$v_d = p_d + c_1 + nc_2\left(1 + \frac{1}{E}\right) + c_4 + \frac{c_1}{c_5}\left(1 + \frac{4}{103}\right) + 2\eta_0 + n + 2,$$

*on peut choisir* $r_0$, $\varrho$, $r^*$, $L^*$, $P$, $P_0, P_1, P_2$, $U_0, \ldots, U_4$ *et* $V_0$ *de telle sorte que les inégalités (5.2) à (5.12) soient satisfaites.*

*Démonstration.* Notons déjà que nos hypothèses $DG \geq \log E$, $D\log A \geq \log E$ et $Z \geq \log E$ assurent

$$U \geq D^2GZ/\log E, \qquad U \geq DZ, \qquad U \geq D^2G, \qquad U \geq D^2\log A.$$

Comme $Z \geq \log(c_0E)$, on a $U \geq D\log(c_0E)$. Prenons d'abord

$$r_0 = 1/B, \qquad r^* = L^* = \max_{1\leq i\leq n} L_i,$$

puis

$$P = p_dU/D, \quad P_0 = \left(\frac{\eta_0}{D} + 1\right)U, \quad P_1 = \left(\frac{p_d + \eta_0}{D} + 1\right)U,$$

$$P_2 = (p_d + \eta_0)\frac{U}{D};$$

posons ensuite

$$u_0 = (c_1 + c_4 + 2\eta_0)\frac{1}{D} + d(n - d + 1)c_2 + 1,$$

$$v_0 = (p_d + c_1 + c_4 + 2\eta_0)\left(1 - \frac{1}{D}\right) + nc_2 + \frac{c_1}{c_5}\left(1 + \frac{4}{103}\right) + n + 1,$$

de telle sorte que $u_0 + v_0 = w_d + (p_d + \eta_1)(1 - 1/D)$ et choisissons $U_0 = u_0U$, $V_0 = v_0U$. Enfin prenons

$$U_1 = U_2 = (c_1 + c_4)U/D,$$

$$U_3 = \left((p_d + c_1 + c_4 + 2\eta_0)\frac{1}{D} + \frac{nc_2}{E} + 1\right)U,$$

$$U_4 = \left((p_d + c_1 + c_4 + 2\eta_0)\left(1 - \frac{1}{D}\right) + nc_2 + \frac{c_1}{c_5}\left(1 + \frac{4}{103}\right) + n\right)U$$

et

$$\varrho = \frac{\mu}{\mu(D-1) + D}.$$

*Vérification de* (5.2).

La condition $U_0 + V_0 \geq 2$ est banale. Les conditions (6.1) entraînent

$$S_1 \geq n, \quad S_2 \geq n \quad \text{et} \quad c_4 \frac{U}{DZ}\left(1 - \frac{1}{S_2}\right) \leq S \leq c_4 \frac{U}{DZ}.$$

*Vérification de* (5.4).

On a $\log(2E) \leq U/D$ car $U \geq D\log(c_0 E)$ et $c_0 \geq 2$. D'après (6.3) et le choix de $\varrho$, on a

$$\eta_1 + p_d \leq D\varrho\big(w_d + (p_d + \eta_1)(1 - 1/D)\big)$$

et

$$(1+\varrho)(U_0 + V_0) \leq (1+\mu)w_d U. \tag{6.8}$$

On utilise l'hypothèse (6.6) pour conclure.

*Vérification de* (5.5).

On remarque que pour $u_1 + \cdots + u_n \leq D$ on a

$$\prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|^{u_i} \leq A^{D^2},$$

car $|\alpha_i| \leq e^{Dh(\alpha_i)} \leq A_i^D \leq A^D$ puisque $A \geq 1$. Donc $\sum_{\delta=1}^{D} |\xi_\delta| \leq De^U$.

Comme $d \geq 2$ et que $H + 1 \leq c_3 DZ^2$ (on a supposé $c_0 \geq 6$ pour assurer $Z - 1/Z > 1$), on peut majorer $DS^d(H+1)$ par $c_3 c_4^d U^d$ ; on utilise finalement (6.5).

*Vérification de* (5.6).

De l'inégalité $Z \geq \log E$ on déduit

$$H \geq c_3 \frac{DZ}{\log E} - 1 \geq \frac{DZ}{\log E}\left(c_3 - \frac{1}{D}\right).$$

On considère deux cas :

1.– Si $S_1 = [G/c_5]$, on utilise (6.1) pour vérifier $S_1 \geq G(1-1/n)/c_5$, ce qui donne

$$\frac{L_i}{S_1} \leq \frac{c_2 c_5 n}{(n-1)(c_3 - 1/D)} \cdot \frac{U \log E}{D^2 G Z \log A_i}.$$

Donc

$$\text{(6.9)} \qquad \frac{L_i E}{S_1} + 2 \leq \left( \frac{c_2 c_5 n}{(n-1)(c_3-1/D)} + \frac{2}{E} \right) DE \left( \frac{D \log A}{\log E} \right)^{n-1}$$

Utilisant la première condition (6.2) et la définition de $Z$, on trouve

$$Z \geq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \log \left( \frac{L_i E}{S_1} + 2 \right),$$

et (5.6) résulte de l'inégalité

$$SZ + T \log B \leq (c_1 + c_4) U/D.$$

2. Si $S_1 = [U/c_5 DZ]$, on a $S_1 \geq (1-1/n)U/c_5 DZ$ et

$$\frac{L_i}{S_1} \leq \frac{c_2 c_5 n}{(n-1)(c_3-1/D)} \cdot \frac{\log E}{D \log A_i} \leq \frac{c_2 c_5 n}{(n-1)(c_3 - 1/D)},$$

ce qui permet encore de vérifier (6.9) et de conclure comme dans le premier cas.

*Vérification de* (5.7).

Comme $r_0 |b_i| \leq 1$, il reste à majorer $\sum_{i \notin J} L_i |\vartheta_i|$. On a d'abord

$$\text{(6.10)} \qquad L_i |\log \alpha_i| \leq c_2 U/EH, \quad (1 \leq i \leq n)$$

On utilise maintenant le lemme 2.5 : $|u_i^{(j)}| \leq L_j/L_i$. On reporte dans la définition de $\vartheta_i$ et on majore brutalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \notin J} L_i |\vartheta_i| &\leq \sum_{i \notin J} L_i \left( |\log \alpha_i| + \sum_{j \in J} |u_i^{(j)} \log \alpha_j| \right) \\
&\leq \sum_{i \notin J} L_i |\log \alpha_i| + \sum_{j \in J} \sum_{i \notin J} L_i |u_i^{(j)} \log \alpha_j| \\
&\leq \sum_{i \notin J} L_i |\log \alpha_i| + d \sum_{j \in J} L_j |\log \alpha_j| \\
&\leq d(n+1-d) c_2 \frac{U}{EH}.
\end{aligned}$$

*Vérification de* (5.8).

C'est l'hypothèse (6.4), en tenant compte de la majoration (6.8) et des inégalités

$$S = S_1 S_2 \geq c_4 \frac{U}{DZ}\left(1 - \frac{1}{S_2}\right) \quad \text{et} \quad H + 1 \geq c_3 \frac{DZ}{\log E}.$$

*Vérification de* (5.9).

On reprend la démonstration de (5.6), mais en remplaçant la première des conditions (6.2) par la seconde : à la place de (6.9), on trouve la majoration

$$\frac{2L_i}{S_1} + 4 \leq \frac{1}{e}\left(\frac{2nc_2c_5}{(n-1)(c_3 - 1/D)} + 4\right) DE \left(\frac{D \log A}{\log E}\right)^{n-1},$$

qui donne

$$Z \geq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \log\left(\frac{2L_i}{S_1} + 4\right).$$

*Vérification de* (5.10).

On majore $2HT^d$ par $c_3 c_1^d U^{d+1} \leq \exp\{\eta_0 U/D\}$ grâce à (6.5). On utilise (6.10), ainsi que les définitions de $P_1$ et de $U_3$.

*Vérification de* (5.11).

On majore d'abord $DL_iHh(\alpha_i)$ par $c_2 U$, ensuite $D\sum_{i=1}^{n} d_i h(\alpha_i)$ par $nD^2 \log A \leq nU$, puis $T^d$ par $c_1^d U^d \leq e^{\eta_0 U/D}$, et enfin

$$DTS_1 \leq \frac{1}{c_5} DTG \leq \frac{c_1}{c_5} U.$$

On utilise pour terminer la définition de $U_4$.

*Vérification de* (5.12).

On majore $\log 2$ par $U \log 2 < U$. $\square$

## 7. Première utilisation de la machine et limite de la méthode

Nous allons utiliser une première fois la construction précédente, avec $d = n$, $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, $J = \emptyset$. Nous introduisons des conditions supplémentaires sur les paramètres pour que le lemme de zéros donne une conclusion utilisable. Nous effectuons ensuite des calculs approximatifs, qui nous serviront d'une part au paragraphe 9 pour justifier le choix des valeurs numériques et d'autre part, à la fin de la présente section, pour évaluer la limite de la méthode.

*a) Première construction et conséquence du lemme de zéros.*

Nous nous plaçons dans les conditions du paragraphe 6, en ajoutant la condition que $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ sont linéairement indépendants et que les nombres $b_i$, $(1 \le i \le n)$, ne sont pas nuls (ce n'est pas restrictif pour ce que nous voulons faire). Nous supposons que les hypothèses (6.1) à (6.6) sont satisfaites avec $d = n$ et que $|\Lambda| \le e^{-V_1}$, avec $V_1 = v_n U$, où $v_n$ est donné par le lemme 6.7. Nous supposons enfin

$$G \ge (nc_5 \log E)/D \tag{7.1}$$

pour que l'on ait

$$U \ge D^3 GZ \log A/(\log E)^2 \ge nc_5 D^2 Z \log A/\log E.$$

PROPOSITION 7.2. *Soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $a_0 \ge \cdots \ge a_n > 0$ et $a_0 + \cdots + a_n \le 1$. On pose*

$$f_\nu = 2a_\nu \frac{c_2}{c_3} - \frac{3}{nc_5}, \quad (0 \le \nu \le n)$$

*et on suppose de plus*

$$c_3 \ge 5, \qquad na_\nu c_2 c_5 \ge 10c_3. \tag{7.3}$$

$$f_0^n \left(c_1 - \frac{1}{D}\right) \ge (n+1)^2 c_4^n c_3, \tag{7.4}$$

$$f_\nu^{n-1} \left(c_1 - \frac{1}{D}\right) \ge 6(n+1)^2 c_4^{n-\nu} c_3 \left(\frac{DZ}{U}\right)^{\nu-1}, \qquad (1 \le \nu \le n), \tag{7.5}$$

$$f_2^n \frac{G}{Z} \ge (n+1) c_4^{n-1} c_3, \tag{7.6}$$

$$f_\nu^{n-1} \frac{G}{Z} \ge 6(n+1) c_4^{n-\nu} c_3 \left(\frac{DZ}{U}\right)^{\nu-2}, \qquad (2 \le \nu \le n), \tag{7.7}$$

*et*

$$(7.8)\qquad f_{\nu+1}^{n-\nu}\left(c_1-\frac{1}{D}\right)\frac{DZ}{\log E}\geq\frac{(n+1)^2}{\nu+1}c_4^{n-\nu},\qquad(0\leq\nu<n)$$

*Alors il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension $\nu$ avec $2\leq\nu\leq n-1$, contenant $(b_1,\ldots,b_n)$, tel que*

$$\mathit{Card}\, s_{\mathcal{W}}\big(\mathbb{Z}^n(a_{\nu+1}L)\big)\leq\frac{n+1}{\nu+1}S^{n-\nu}.$$

En particulier la conclusion exclut le cas $n=2$ !

*Démonstration.* Pour $1\leq i\leq n$, on a

$$L_i>c_2\frac{U}{DH\log A_i}-1\geq\frac{c_2}{c_3}\cdot\frac{U\log E}{D^2Z\log A_i}-1,$$

avec

$$\frac{U\log E}{D^2Z\log A_i}\geq\frac{DG}{\log E}\geq nc_5;$$

par conséquent

$$2a_\nu L_i-1>\left(2a_\nu\frac{c_2}{c_3}-\frac{2a_\nu+1}{nc_5}\right)\frac{U\log E}{D^2Z\log A_i}.$$

Utilisant l'inégalité $a_\nu\leq 1$, on majorera $(2a_\nu+1)/nc_5$ par $3/nc_5$. Ainsi on a

$$2a_\nu L_i-1>f_\nu\frac{U\log E}{D^2Z\log A_i}\quad(1\leq i\leq n).$$

L'hypothèse (7.3) donne

$$\frac{6}{c_3}-\frac{4}{c_3-1}\geq\frac{1}{c_3}\geq\frac{10}{nc_2c_5a_\nu},$$

et en utilisant (7.1) on obtient

$$4a_\nu L_i+1\leq\frac{4a_\nu c_2U\log E}{(c_3-1)D^2Z\log A_i}+1\leq 3f_\nu\frac{U\log E}{D^2Z\log A_i}\quad(1\leq i\leq n).$$

Le lemme 6.7, joint à la proposition 5.14, donne l'existence d'un polynôme non nul

$$P(X_1, \dots, X_n, Y) = \sum_{\delta} \sum_{(\sigma,s)} \sum_{h} p_{\delta\sigma s h} \xi_\delta \left( \prod_{i=1}^{n} \Delta(X_i + \sigma_i; S_1)^{s_i} \right) Y^h,$$

de degré $\leq S$ en $X_1, \dots, X_n$, et $\leq H$ en $Y$, satisfaisant les conditions (4.1) avec $d = n$, $\Phi = \mathbb{Z}^n$, $\beta_i = b_i$, $(1 \leq i \leq n)$, tandis que $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Nous notons, conformément au paragraphe 4,

$$\Sigma_\nu = \left\{ \left( \lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n} \right) ; \lambda \in \mathbb{Z}^n(a_\nu L) \right\}.$$

La proposition 4.2 donne donc l'existence d'un sous-espace $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension $\nu$ avec $0 \leq \nu \leq n$, vérifiant l'une au moins des quatre conditions suivantes :

$\boxed{1}$

$$T \operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) \leq (n+1)^2 S^{n-\nu} H.$$

$\boxed{2}$

$$\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) \leq (n+1) S^{n-\nu} H$$

et $\mathcal{W}$ contient $(b_1, \dots, b_n)$ ; en particulier on a $\nu \geq 1$.

$\boxed{3}$

$$T \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}\big(\mathbb{Z}^n(a_{\nu+1} L)\big) \leq \frac{(n+1)^2}{\nu+1} S^{n-\nu},$$

et $\nu \leq n-1$.

$\boxed{4}$

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}\big(\mathbb{Z}^n(a_{\nu+1} L)\big) \leq \frac{n+1}{\nu+1} S^{n-\nu},$$

avec $\mathcal{W} \neq \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{W}$ contient $(b_1, \dots, b_n)$ ; en particulier on a $1 \leq \nu \leq n-1$.

Nous allons montrer que les trois premiers cas ne peuvent pas se produire. Commençons par éliminer le premier cas avec $\mathcal{W} = 0$, c'est-à-dire $\nu = 0$. C'est ici que va intervenir de manière essentielle la définition de $U$. Comme $\mathcal{W} = 0$ on a

$$\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) = \operatorname{Card} \mathbb{Z}^n(a_\nu L) \geq (2a_\nu L_1 - 1) \cdots (2a_\nu L_n - 1).$$

Comme

$$T > \frac{c_1 U}{DG} - 1 \geq \left( c_1 - \frac{1}{D} \right) \frac{U}{DG}$$

et que

$$S \le c_4 U/DZ, \qquad H \le c_3 DZ/\log E,$$

l'hypothèse (7.4) entraîne

$$T(2a_0L_1 - 1)\cdots(2a_0L_n - 1) > (n+1)^2 S^n H,$$

ce qui montre que le premier cas n'est pas possible avec $\mathcal{W} = 0$. Considérons maintenant le premier cas avec $\mathcal{W} \neq 0$, donc $\nu \ge 1$. On minore $\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu)$ par $\operatorname{Card}\left\{\alpha_1^{\lambda_1}\cdots\alpha_n^{\lambda_n}\right\}$, et on estime cette dernière quantité grâce au corollaire 2.8 :

$$\operatorname{Card}\left\{\alpha_1^{\lambda_1}\cdots\alpha_n^{\lambda_n}\,;\,\lambda \in \mathbb{Z}^n(a_\nu L)\right\} \ge \frac{(2a_\nu L_1 - 1)\cdots(2a_\nu L_n - 1)}{\max_{1\le i\le n}\{4a_\nu L_i + 1\}}.$$

L'hypothèse (7.5) entraîne, pour $1 \le \nu \le n$ et $1 \le i \le n$,

$$T(2a_\nu L_1 - 1)\cdots(2a_\nu L_n - 1) > 2(4a_\nu L_i + 1)(n+1)^2 S^{n-\nu} H.$$

Le premier cas ne peut donc pas se produire. (Le coefficient supplémentaire 2 n'est pas nécessaire ici, mais il sera utile au §8).

Pour exclure le second cas, on commence par supposer $\nu = 1$, c'est-à-dire $\mathcal{W} = \mathbb{C}(b_1, \ldots, b_n)$. Si les nombres $p_{\mathcal{W}}(\lambda, \alpha^\lambda)$ n'étaient pas deux-à-deux distincts, en utilisant le théorème de Baker [B] (qui assure $\Lambda \neq 0$) et le lemme 2.9 on trouverait

$$|\Lambda| \ge \pi/\max_{1\le i\le n} L_i \ge \frac{\pi DH}{c_2 U}\min_{1\le i\le n}\log A_i \ge \frac{\pi}{c_2 U},$$

contredisant l'inégalité $v_n > (1/U)\log(c_2 U)$ (cf. lemme 6.7). Ainsi, quand $\mathcal{W} = \mathbb{C}(b_1, \ldots, b_n)$, on a $\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) = \operatorname{Card}\mathbb{Z}^n(a_\nu L)$ ; or l'inégalité (7.6) implique

$$(2a_2L_1 - 1)\cdots(2a_2L_n - 1) > (n+1)S^{n-1}H.$$

Comme $a_2 \ge a_1$, le second cas ne peut se produire que pour $\nu \ge 2$. Mais alors, par les mêmes calculs que dans le premier cas, on devrait avoir

$$(2a_\nu L_1 - 1)\cdots(2a_\nu L_n - 1) \le (n+1)S^{n-\nu}H \max_{1\le i\le n}\{4a_\nu L_i + 1\},$$

ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse (7.7) (le membre de gauche est au moins le double de celui de droite). Pour montrer que le troisième cas n'est pas possible, on utilise d'abord la première partie du lemme 2.6, qui donne

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}\big(\mathbb{Z}^n(a_{\nu+1}L)\big) \geq \min_J \prod_{j\in J}(2a_{\nu+1}L_j - 1),$$

$J$ décrivant les sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ avec $n-\nu$ éléments, tandis que (7.8) implique

$$T \min_J \prod_{j\in J}(2a_{\nu+1}L_j - 1) > \frac{(n+1)^2}{\nu+1}S^{n-\nu}$$

(on minore $(D/\log E)^{\nu+1}\prod_{i\notin J}\log A_i$ par $D/\log E$).

Nous sommes donc dans le quatrième cas. Il reste à vérifier la condition $\nu \geq 2$. Comme $\mathcal{W} \ni (b_1,\dots,b_n)$, si on avait $\nu = 1$, on aurait $\mathcal{W} = \mathbb{C}(b_1,\dots,b_n)$. Mais (7.6) implique, nous l'avons vu,

$$(2a_2L_1 - 1)\cdots(2a_2L_n - 1) > (n+1)S^{n-1},$$

ce qui nous autorise à appliquer le lemme 2.6 (deuxième partie, avec $d=1$) pour $\mathbb{Z}^n(a_2L)$. On a supposé $b_i \neq 0$ pour tout $i = 1,\dots,n$ ; on trouve donc

$$b_j\mu_1 = \mu_1^{(j)}b_1,$$

avec $0 < \mu_1 < 2a_2L_1$, $|\mu_1^{(j)}| < 2a_2L_j$, $(2 \leq j \leq n)$. Ainsi

$$\Lambda = \frac{b_1}{\mu_1}\sum_{j=1}^{n}\mu_1^{(j)}\log\alpha_j,$$

où on a posé $\mu_1^{(1)} = \mu_1$. Grâce à la condition $\Lambda \neq 0$ (théorème de Baker), on peut utiliser le lemme 2.4 avec (5.13) :

$$-V_1 \geq \log|\Lambda| \geq -D\log 2 - 2a_2D\sum_{i=1}^{n}L_ih(\alpha_i) - \log\mu_1.$$

On majore $2a_2D\sum_{i=1}^{n}L_ih(\alpha_i)$ par $\frac{1}{2}c_2nU$ car $H \geq 4$ (les hypothèses (6.3) et (6.4) imposent $c_3 \geq 4$) et $a_2 \leq 1$. On en déduit

$$v_n \leq \frac{1}{2}c_2n + \frac{D}{U}\log 2 + \frac{1}{U}\log(2L_1).$$

On majore $(D/U)\log 2$ par 1, et $(1/U)\log(2L_1)$ par $(1/U)\log(2c_2U) \leq c_2$ (noter que l'on a $2c_2U > 11$). Ceci conduit à une contradiction avec la valeur de $v_n$ donnée par le lemme 6.7. $\square$

*b) Calculs approximatifs.*

Voici comment choisir les valeurs des paramètres quand on veut satisfaire les conditions énoncées jusqu'à maintenant. On trouve l'ordre de grandeur de ces paramètres en négligeant les termes en $\eta$ et en $1/c_5$ (on choisira ensuite $c_5$ suffisamment grand) et en ne gardant que les inégalités les plus contraignantes, à savoir (6.3), (6.4) et (7.4).

Ces calculs approchés nous serviront (implicitement) quand on devra choisir les paramètres au paragraphe 9 dans une situation plus générale que $d = n$. Aussi nous posons $m = nd + n + d - d^2$. Pour $d = n$ on a $m = 2n$, tandis que pour $2 \leq d \leq n$ on a toujours $m \leq (n^2 + 6n + 1)/4$. On prend aussi

$$w_d = c_1 + mc_2 + c_4, \quad p_d = \mu w_d.$$

On remplace (6.4) par

$$c_3c_4\mu \geq 2d(1+\mu)^2(c_1 + mc_2 + c_4) \tag{7.9}$$

et on remplace (7.4) par

$$c_1 \geq (n+1)^2 \left(\frac{c_4}{2a_0c_2}\right)^n c_3^{n+1}. \tag{7.10}$$

Pour simplifier (sans y perdre beaucoup) on remplace $v_d$ par la quantité $(1+\mu)(c_1 + mc_2 + c_4)$ que l'on cherche à minimiser. En posant

$$c_1 = \lambda_1 c_2, \qquad c_4 = \lambda_4 c_2,$$

on trouve que la condition (7.10) s'écrit

$$c_2 \geq (n+1)^2 \left(\frac{\lambda_4}{2a_0}\right)^n \frac{c_3^{n+1}}{\lambda_1},$$

tandis que (7.9) impose

$$c_3 \geq 2d\frac{(1+\mu)^2}{\mu} \cdot \frac{(\lambda_1 + m + \lambda_4)}{\lambda_4}.$$

Le nombre

$$v = 2(n+1)^2 a_0^{-n} d^{n+1} \frac{(1+\mu)^{2n+3}}{\mu^{n+1}} \cdot \frac{(\lambda_1 + m + \lambda_4)^{n+2}}{\lambda_1 \lambda_4}$$

est minimal pour $\mu = (n+1)/(n+2)$, $\lambda_1 = \lambda_4 = m/n$, ce qui donne le choix suivant des paramètres :

$$c_3 = \frac{2d(2n+3)^2}{n+1},$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{(n+1)^2 m^{n-1} c_3^{n+1}}{n^{n-1}(2a_0)^n} \\ &= \frac{2d^{n+1}(2n+3)^{2n+2} m^{n-1}}{a_0^n (n+1)^{n-1} n^{n-1}}, \end{aligned}$$

$$c_1 = c_4 = \frac{mc_2}{n}, \quad p_d = (1+1/n)mc_2,$$

ce qui conduit à

$$v = 2(n+1)^2 a_0^{-n} d^{n+1} \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n+3} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{m}{n}\right)^{n+2} (n+2)^{n+2}(n/m)^2$$

$$= \frac{2m^n d^{n+1}(2n+3)^{2n+3}}{a_0^n (n+1)^{n-1} n^n}.$$

*c) Valeur optimiste des constantes.*

Reprenons le cas $d = n$ et $m = 2n$ et choisissons $a_0 \sim 1$. On trouve comme constante

$$2^{n+1} n^{n+1} (2n+3)^{2n+3} / (n+1)^{n-1},$$

c'est-à-dire

pour $n = 2$, $v = 1.76 \cdot 10^7$

pour $n = 3$, $v = 3.14 \cdot 10^{10}$

et

pour $n \to \infty$, $v \sim e^2 2^{3n+4} n^{2n+5}$

Les contraintes dont nous avons tenu compte jusqu'à présent ne sont pas les seules que nous devrons imposer pour pouvoir conclure. S'il n'y en avait pas d'autres, on choisirait des valeurs des paramètres voisines de celles que nous avons indiquées ci-dessus ; il ne resterait plus qu'à vérifier que les termes d'erreurs sont suffisamment petits. Pour cette raison il semble raisonnable d'espérer arriver, dans le théorème 1.1, à remplacer la constante $C(n)$ par la valeur que nous venons de trouver pour $v$.

Il est intéressant de repérer d'où vient l'exposant 2 dans $n^{2n}$. Une des contributions est le lemme de zéros de [P] : pour utiliser la proposition 4.2, il a fallu disposer d'un nombre d'équations dont le rapport au nombre des coefficients du polynôme est au moins $n^n$, alors qu'au niveau de la construction (lemme de Siegel), le rapport correspondant doit être $< 1$. Cette perte apparaît déjà dans les lemmes de zéros les plus simples, à commencer par le théorème de Bézout (voir aussi le coefficient $1/n$ dans la minoration $\omega_t(S) \geq t\omega_1(S)/n$ de [W1] §10.1). On pourrait espérer se débarrasser de ce facteur $n^n$ en effectuant une récurrence comme dans la méthode de Baker [B], mais il faudrait pour cela disposer d'un lemme d'interpolation en plusieurs variables. On peut noter à ce propos un avantage de la méthode utilisée ici sur celle de Baker : dans le schéma de démonstration $\boxed{1'}$ du paragraphe 1, si on n'effectue pas d'extrapolation, on trouve une dépendance en $n$ de la forme $n^{2n^2}$ (cf [PW2], remarque après le théorème 2.2).

La deuxième contribution au terme $n^{2n}$ vient de la majoration de la somme $\sum_{j=1}^n L_j \log A_j$ par $n \max_{1\leq j\leq n} L_j \log A_j$.

Nous n'avons pas encore tenu compte des contraintes (7.5) à (7.8). C'est à cause de (7.6) et (7.7) qu'apparaît la condition $G \geq Z/n$ dans le théorème 1.1. Cette condition signifie essentiellement que $S$ est plus grand que $T$, ce qui est naturel ici : nous avons déjà vu que dans (4.1), il revient au même d'écrire $0 \leq t < T$ ou $0 \leq t < \min\{S, T\}$.

Enfin la conclusion de la proposition 7.2 ne montre pas immédiatement que l'hypothèse $|\Lambda| \leq e^{-v_n U}$ conduit à une contradiction ; il nous faut pour cela utiliser une deuxième fois la machine transcendante.

## 8. Deuxième utilisation de la machine

Nous allons donc utiliser une seconde fois la machine transcendante. *Pour simplifier*, nous gardons les mêmes paramètres $L_i$, $T$, $H$, $S_i$, $S$ et aussi $c_i$, $\eta_i$, $U_i$, $V_i$. Nous supposons que les hypothèses du paragraphe 6 sont vérifiées pour tout $d$ dans l'intervalle $2 \leq d \leq n$. On suppose aussi $|\Lambda| \leq e^{-vU}$, avec $v = \max\{v_2, \dots, v_n\}$, $v_d$ étant donné par le lemme 6.7.

PROPOSITION 8.1. *Si les hypothèses de la proposition 7.2 sont satisfaites avec $a_\nu = 1/2n$, $(0 \leq \nu \leq n)$, alors il existe un entier $d$, $2 \leq d \leq n-1$, tel* *que*

$$f_{d+1}^{n-d+1} < \frac{n+1}{d+1} c_4^{n-d} \frac{DG}{\log E}. \tag{8.2}$$

*Remarque.* Le fait que l'on choisisse tous les $a_\nu$ égaux fait perdre un facteur $n^n$. On en perd un autre à cause de la majoration $m \leq (n^2+6n+1)/4$, pour $m = nd+n+d-d^2$. Cela explique que le résultat final fasse intervenir $n^{4n}$ au lieu du $n^{2n}$ trouvé à la fin du paragraphe précédent. Si on remplace l'hypothèse $E \leq D \log A_i / |\log \alpha_i|$ par $E \leq D \log A_i / f |\log \alpha_i|$ avec $f \geq 1$, en supposant bien sûr $\log A_i \geq (fe/D)|\log \alpha_i|$, on peut remplacer, dans la définition de $w_d$, le terme $(nd+n+d-d^2)c_2$ par $(nd+nf+d-d^2)c_2/f$. Par exemple, on peut remplacer, dans le théorème 1.1, $n^{4n}$ par $(6n^3)^n$, à condition de supposer $\log A_i \geq (ne/D)|\log \alpha_i|$.

*Démonstration.* Supposons au contraire que l'inégalité (8.2) ne soit pas vraie et que les hypothèses de la proposition 7.2 soient satisfaites avec $a_\nu = 1/2n, (0 \leq \nu \leq n)$. La conclusion de cette proposition produit un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^n$. Nous choisissons un tel sous-espace de dimension minimale sur $\mathbb{C}$, nous l'appelons $\mathcal{V}$ et $d$ est sa dimension. Donc $d$ est le plus petit entier dans l'intervalle $2 \leq d \leq n-1$ tel qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension $d$, contenant $(b_1, \ldots, b_n)$ et tel que

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(a_{d+1}L)\big) \leq \frac{n+1}{d+1} S^{n-d}.$$

La négation de (8.2) sert à vérifier

$$\frac{n+1}{d+1} S^{n-d} < \prod_{i \in I} (2a_{d+1}L_i - 1) \tag{8.3}$$

chaque fois que $I$ est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ ayant $n-d+1$ éléments. Le lemme 2.5 fournit une base $(v_1, \ldots, v_d)$ de $\mathcal{V}$ ; pour simplifier les notations nous supposerons (ce qui est licite) $J = \{d+1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire

$$v_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{id}, u_i^{(d+1)}, \ldots, u_i^{(n)}), \quad (1 \leq i \leq d).$$

Insistons sur l'ordre dans lequel les arguments sont utilisés : nous avons d'abord défini les $L_i$, puis construit $\mathcal{V}$, ensuite nous avons utilisé le lemme 2.5, et maintenant nous allons appliquer le lemme 2.6. L'inégalité (8.3) nous permet d'écrire $\mathcal{V}$ comme intersection de $n-d$ hyperplans, de telle sorte que l'application $\iota : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathcal{V}$ qui envoie $(z_1, \dots, z_d)$ sur

$$\left(z_1, \dots, z_d, \sum_{i=1}^{d} u_i^{(d+1)} z_i, \dots, \sum_{i=1}^{d} u_i^{(n)} z_i\right),$$

soit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Nous utilisons une deuxième fois la machine transcendante, avec ce sous-espace $\mathcal{V}$ qui contient $(b_1, \dots, b_n)$. Le lemme 6.7 et la proposition 5.14 montrent qu'il existe un polynôme non identiquement nul

$$P(X_1, \dots, X_d, Y) = \sum_{\delta} \sum_{(\sigma,s)} \sum_{h} p_{\delta\sigma s h} \xi_\delta \left(\prod_{i=1}^{d} \Delta(X_i + \sigma_i; S_1)^{s_i}\right) Y^h,$$

de degré total $\leq S$ en les $X_i$ et de degré $\leq H$ en $Y$, satisfaisant les conditions (4.1) avec $\Phi = \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{V}$, en prenant pour $(\theta_1, \dots, \theta_d)$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$ et $\theta_{d+1} = \cdots = \theta_n = 0$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}^n$,

$$z_1\theta_1 + \cdots + z_n\theta_n = (z_1, \dots, z_d).$$

Nous utilisons ensuite la proposition 4.2, avec $a'_\nu = 2a_\nu$, $(0 \leq \nu \leq d)$, $\beta_i = b_i$, $(1 \leq i \leq d)$ et

$$\Sigma_\nu = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_d, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}); (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Phi(a'_\nu L)\right\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\nu &= \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_d); (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Phi(a'_\nu L)\right\} \\ &= \iota^{-1}\big(\Phi(a'_\nu L)\big).\end{aligned}$$

Cette proposition 4.2 produit un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^d$, de dimension $\nu$ ; nous notons $\mathcal{V}' = \iota(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}$, tandis que $s_{\mathcal{V}'} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/\mathcal{V}'$ sera la surjection canonique. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^d \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "s_{\mathcal{W}}"'] & \mathcal{V} \arrow[r] \arrow[d, "s_{\mathcal{V}'}|_{\mathcal{V}}"] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "s_{\mathcal{V}'}"] \\
\mathbb{C}^d/\mathcal{W} \arrow[r] & \mathcal{V}/\mathcal{V}' \arrow[r] & \mathbb{C}^n/\mathcal{V}'
\end{tikzcd}$$

établit une bijection entre $s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_\nu) = \mathcal{E}_\nu/\mathcal{E}_\nu \cap \mathcal{W}$ et $s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(a'_\nu L)\big)$. On en déduit qu'une au moins des quatre conditions suivantes est réalisée :

$\boxed{1}$

$$T \ \mathrm{Card}\, p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) \le (d+1)^2 S^{d-\nu} H.$$

$\boxed{2}$

$$\mathrm{Card}\, p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) \le (d+1) S^{d-\nu} H$$

et $\mathcal{V}'$ contient $(b_1, \dots, b_n)$ ; en particulier on a $\nu \ge 1$.

$\boxed{3}$

$$T \ \mathrm{Card}\, s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(a'_{\nu+1} L)\big) \le \frac{(d+1)^2}{\nu+1} S^{d-\nu}$$

et $\nu \le d-1$.

$\boxed{4}$

$$\mathrm{Card}\, s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(a'_{\nu+1} L)\big) \le \frac{d+1}{\nu+1} S^{d-\nu},$$

avec $\mathcal{V}' \ne \mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ contient $(b_1, \dots, b_n)$ et $1 \le \nu \le d-1$.

Nous utilisons une première fois le lemme 2.7, pour l'application linéaire $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\mathcal{V}$, avec

$$\mathcal{C} = \mathbb{Z}^n(a_\nu L) \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{Z}^n(a'_\nu L).$$

Ainsi

$$\mathrm{Card}\, \mathbb{Z}^n(a_\nu L) \le \ \mathrm{Card}\, \Phi(a'_\nu L) \cdot \ \mathrm{Card}\, s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(a_\nu L)\big).$$

Comme nous avons choisi $a_\nu$ indépendant de $\nu$, nous obtenons, grâce au choix de $\mathcal{V}$,

$$\mathrm{Card}\, s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(a_\nu L)\big) \le \frac{n+1}{d+1} S^{n-d}.$$

On déduit de ces deux dernières inégalités

$$\mathrm{Card}\, \mathbb{Z}^n(a_\nu L) \le \frac{n+1}{d+1} S^{n-d} \ \mathrm{Card}\, \Phi(a'_\nu L).$$

Si on était dans la situation 1 avec $\nu = 0$, on aurait

$$\begin{aligned} T \ \mathrm{Card}\, \mathbb{Z}^n(a_0 L) &\le \frac{n+1}{d+1} S^{n-d} (d+1)^2 S^d H \\ &\le (n+1)^2 S^n H, \end{aligned}$$

ce qui est exclu par l'hypothèse (7.4), comme nous l'avons vu au paragraphe 7.

Si on était dans la situation 1 avec $\nu \geq 1$, on aurait, grâce au corollaire 2.8,

$$\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) \geq \operatorname{Card} \Phi(a'_\nu L) / \max_{1 \leq i \leq n} \{4a'_\nu L_i + 1\},$$

donc

$$T \operatorname{Card} \mathbb{Z}^n(a_\nu L) \leq (n+1)^2 S^{n-\nu} H \max_{1 \leq i \leq n} \{4a'_\nu L_i + 1\},$$

ce qui est n'est pas compatible avec l'hypothèse (7.5).

Supposons que nous soyons dans la situation 2 avec $\nu = 1$, donc $\mathcal{W} = \mathbb{C}(b_1, \dots, b_n)$. Pour $\lambda \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{V}$, la condition $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathcal{W}$ équivaut à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}(b_1, \dots, b_n)$. On déduit alors des lemmes 2.4 et 2.9 que les nombres

$$p_{\mathcal{W}}(\lambda_1, \dots, \lambda_d, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}) \qquad \lambda \in \Phi(a'_1 L)$$

sont deux-à-deux distincts (l'argument est exactement le même qu'au paragraphe 7). Alors l'inégalité

$$\operatorname{Card} \Phi(a'_1 L) \leq (d+1) S^{d-\nu} H$$

implique

$$\operatorname{Card} \mathbb{Z}^n(a_1 L) \leq (n+1) S^{n-1} H,$$

contredisant l'hypothèse (7.6).

De même, si on est dans la situation 2 avec $\nu \geq 2$, le lemme 2.8 donne

$$\operatorname{Card} \Phi(a'_\nu L) \leq (d+1) S^{d-\nu} H \max_{1 \leq i \leq n} \{4a'_\nu L_i + 1\},$$

et par conséquent

$$\operatorname{Card} \mathbb{Z}^n(a_\nu L) \leq (n+1) S^{n-\nu} H \max_{1 \leq i \leq n} \{8a_\nu L_i + 1\},$$

ce que ne permet pas l'hypothèse (7.7).

Nous utilisons encore le lemme 2.7, pour l'application linéaire $\mathbb{C}^n/\mathcal{V}' \longrightarrow \mathbb{C}^n/\mathcal{V}$, avec

$$\mathcal{C} = s_{\mathcal{V}'}\big(\mathbb{Z}^n(a_\nu L)\big), \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{C}} \subset s_{\mathcal{V}'}\big(\mathbb{Z}^n(a'_\nu L)\big).$$

On obtient

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\big(\mathbb{Z}^n(a_\nu L)\big) \leq \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(a'_\nu L)\big) \cdot \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(a_\nu L)\big).$$

Par conséquent la condition 3 implique

$$\begin{aligned} T\ \mathrm{Card}\, s_{\mathcal{V}'}\big(\mathbb{Z}^n(a_\nu L)\big) &\le \frac{(d+1)^2}{\nu+1} S^{d-\nu} \frac{n+1}{d+1} S^{n-d} \\ &\le \frac{(n+1)^2}{\nu+1} S^{n-\nu}, \end{aligned}$$

mais nous savons déjà que ce n'est pas autorisé par l'inégalité (7.8). Enfin la condition 4 entraîne

$$\mathrm{Card}\, s_{\mathcal{V}'}\big(\mathbb{Z}^n(a_\nu L)\big) \le \frac{(n+1)}{\nu+1} S^{n-\nu}$$

et ce n'est pas possible puisque $\mathcal{V}$ a été choisi de dimension minimale.

Ceci termine la démonstration de la proposition 8.1. $\square$

## 9. Fin de la démonstration.

Nous supposons que les hypothèses du théorème 1.1 sont satisfaites. Dans un premier temps, nous supposons que les nombres $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Nous définissons des nombres réels $\epsilon_2$, $\epsilon_3$, $c_0, \ldots, c_5$, $\mu$, $\eta_0$, $\eta_1$, $a_0, \ldots, a_n$ par :

$$\epsilon_2 = 10^{-5}, \qquad \epsilon_3 = 1/76,$$

$$c_3 = \frac{2n(2n+3)^2}{n+1} \cdot (1+\epsilon_3),$$

$$c_2 = \frac{n(n+1)^2(n^2+6n+1)^{n-1} c_3^{n+1}}{4^{n-1}} \cdot (1+\epsilon_2),$$

$$c_1 = c_4 = \frac{n^2+6n+1}{4n} c_2,$$

$$c_0 = e^{6n} n^{4n}, \qquad c_5 = 20, \qquad \eta_0 = \eta_1 = 2n,$$

$$\mu = \frac{n+1}{n+2}, \qquad a_\nu = 1/2n, \quad (0 \le \nu \le n).$$

*a) Majoration des $c_i$.*

Comme $(2n+3)^2/(n+1) \leq 49n/6$ pour $n \geq 2$, on a $c_3 \leq 17n^2$. D'autre part on a $n^2+6n+1 \leq 17n^2/4$, donc

$$\begin{aligned} c_2 &\leq \frac{9}{4}n^3\left(\frac{17}{16}n^2\right)^{n-1} c_3^{n+1}(1+\epsilon_2) \\ &\leq \frac{9}{4}\left(\frac{17}{16}\right)^{n-1} 17^{n+1}n^{4n+3}(1+\epsilon_2). \end{aligned}$$

Pour $n=2$, la quantité

$$\frac{9}{4}\left(\frac{17}{16}\right)^{n-1} 17^{n+1}n^3(1+\epsilon_2)$$

est majorée par $93963 < 1.44 \cdot 2^{16}$, donc pour $n \geq 2$ cette même quantité est majorée par $1.44 \cdot 2^{8n}$. Ainsi

(9.1) $$c_3 \leq 17n^2, \quad c_2 \leq 1.44 \cdot (4n)^{4n}, \quad c_1 = c_4 \leq \frac{17}{16}nc_2.$$

*b) Minoration des $c_i$.*

Notons que dans le cas $n=2$ on a

$$c_3 > 65, \quad c_2 > 2.2 \cdot 10^7, \quad c_1 = c_4 > 4.7 \cdot 10^7.$$

Cela permet de vérifier, pour $n \geq 2$,

(9.2) $$c_3 \geq 16n^2+1 \quad c_2 > 2.7 \cdot 10^6 n^3, \quad c_1 = c_4 > 2.9 \cdot 10^6 n^4.$$

*c) Vérification des hypothèses du paragraphe 6.*

*Vérification de* (6.1) *et de* (7.1).

On a $G \geq nc_5(\log E)/D$, donc $U \geq nc_5 DZ$.

*Vérification de* (6.2)

Montrons que l'on a

$$c_0 \geq \frac{enc_2c_5}{(n-1)(c_3-1)} + 4.$$

En effet, (9.1) et (9.2) entraînent

$$\frac{enc_2c_5}{(n-1)(c_3-1)} \leq 1.44 \cdot \frac{5e}{8}(4n)^{4n}$$

et $0.9 \cdot e \cdot 2^{8n} + 4 < e^{6n}$, ce qui donne le résultat annoncé.

_Vérification de_ (6.3)

On choisit $p_d = (n+1)w_d/(n+2) - 2n$.

_Vérification de_ (6.4)

Il suffit de vérifier l'inégalité

$$2n\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^2 w_d \leq c_3c_4\frac{n+1}{n+2}\left(1-\frac{2n(n+2)}{(n+1)w_d}\right)\left(1-\frac{d}{S_2}\right)^d. \tag{9.3}$$

C'est ici que les définitions de $c_3$ et de $\epsilon_3$ interviennent. Commençons par minorer le dernier terme à droite. Comme $S_1 \leq U/c_5DZ$ on a, en utilisant (9.2),

$$S_2 \geq c_4c_5 - 1 \geq 10^8 n^3$$

donc

$$\left(1-\frac{d}{S_2}\right)^d \geq 1 - 10^{-8}.$$

Ensuite on minore l'avant dernier terme à droite de (9.3) : comme $w_d > 2nc_2$, on trouve

$$\frac{2n(n+2)}{(n+1)w_d} \leq 10^{-7}.$$

Donc

$$\left(1-\frac{2n(n+2)}{(n+1)w_d}\right)\left(1-\frac{d}{S_2}\right)^d > 1 - 10^{-6}.$$

Passons au membre de gauche de (9.3). On majore $w_d$ :

$$w_d \leq \frac{(n^2+6n+1)c_2}{4n}\left(n+2+\frac{1}{c_5}\cdot\frac{107}{103}+\frac{5n+2}{c_2}\cdot\frac{4n}{n^2+6n+1}\right). \tag{9.4}$$

Mais

$$\frac{5n+2}{c_2}\cdot\frac{4n}{n^2+6n+1} < 10^{-6}$$

et

$$\frac{107}{20\cdot 103} + 10^{-6} < 0.052.$$

Enfin on majore $n+2.052$ par $1.013(n+2)$ et on constate que $\epsilon_3$ a été choisi pour que l'on ait

$$1.013 < (1+\epsilon_3)(1-10^{-6}).$$

*Vérification de* (6.5)

On utilise (9.1) pour obtenir

$$c_3 c_4^d c_1^d \leq n^{33n^2}.$$

D'autre part on a $U \geq 20nDZ$ et $Z \geq 4n\log n + 6n + \log D$, donc $U \geq DJ$ avec

$$J = 20n(4n\log n + 6n + \log D).$$

Notons que l'on a $J > 701$. Il suffit maintenant de remarquer que l'on a

$$2nJ \geq 33n^2 \log n + n\log(DJ).$$

*Vérification de* (6.6)

On majore $(\mu+1)w_d$ en utilisant (9.1) et (9.4) :

$$\frac{2n+3}{n+2} w_d \leq n^{15n}.$$

D'autre part $\log 9$ est majoré par $J/300$. Il suffit donc de remarquer que l'on a

$$J\left(\eta_1 - \frac{1}{300}\right) > 30n^2 \log n + 2n\log(DJ).$$

*d) Vérification des hypothèses du paragraphe 7.*

Nous allons vérifier les hypothèses du lemme 7.2. Rappelons que nous avons choisi $a_\nu = 1/2n$, $(0 \leq \nu \leq n)$. Nous avons déjà vu que l'inégalité (7.1) était bien satisfaite. D'autre part la condition (7.3) est banale.

Commençons par minorer $f_\nu$ (qui, en fait, ne dépend pas de $\nu$). On a

$$\begin{aligned} f_\nu &= 2a_\nu \frac{c_2}{c_3}\left(1 - \frac{3c_3}{2na_\nu c_2 c_5}\right) \\ &\geq 2a_\nu \frac{c_2}{c_3}\left(1 - \frac{10^{-6}}{n}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$f_\nu^n \geq \left(2a_\nu \frac{c_2}{c_3}\right)^n (1 - 10^{-6}).$$

<u>*Vérification de*</u> (7.4) <u>*et*</u> (7.5).

Comme $c_4 > DZ/U$, c'est le cas $\nu = 1$ qui est le plus restrictif dans (7.5). Mais $c_4 > 3f_\nu$, donc il suffit de démontrer (7.4), c'est-à-dire de montrer

$$\left(2a_0 \frac{c_2}{c_3}\right)^n (c_1 - 1)(1 - 10^{-6}) \geq (n+1)^2 c_4^n c_3.$$

C'est ici qu'intervient le choix de $c_2$, ainsi que celui de $\epsilon_2$. L'inégalité annoncée résulte de la minoration

$$(1 + \epsilon_2)(1 - 1/c_1)(1 - 10^{-6}) > 1.$$

<u>*Vérification de*</u> (7.6) <u>*et*</u> (7.7).

Ici encore on peut se contenter démontrer (7.6), pour les mêmes raisons que ci-dessus. Comme $c_1 = c_4$ et que $G \geq Z/n$, (7.6) est une conséquence de (7.4).

<u>*Vérification de*</u> (7.8).

Comme $f_\nu < c_4$, il suffit de considérer le cas $\nu = 0$. Comme $DZ/\log E \geq 1$, l'inégalité désirée résulte encore de (7.4).

*e) Conclusion dans le cas où les logarithmes sont linéairement indépendants.*

Montrons que l'inégalité (8.2) n'est pas satisfaite. Comme $f_{d+1} < c_4$ et que $DG > 20n \log E$, il suffit de voir que l'on a

$$f_{d+1}^{n-1} > \frac{20n(n+1)}{3} c_4^{n-2},$$

ce qui résulte encore de la définition de $c_2$. La proposition 8.1 nous montre alors que l'inégalité $|\Lambda| < e^{-vU}$ ne peut pas être satisfaite. On majore $v = \max_{2 \leq d \leq n} v_d$ en utilisant sa définition (lemme 6.7) avec (6.3) :

$$v \leq \frac{2n+3}{n+2}\left(c_1 + c_4 + \frac{107c_1}{103c_5} + 3n + 2\right) + \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2 + 6n + 1}{4}\right) c_2$$
$$+ n\left(1 + \frac{1}{e}\right) c_2.$$

On majore $(107c_1/103c_5) + 3n + 2$ par $0.052(n^2 + 6n + 1)c_2/4n$ (cf. la démonstration de (9.4)), et on trouve

$$v \leq \left\{ \frac{n^2+6n+1}{4n(n+2)}(n^2 + 5.104n + 6.156) + n\left(1 + \frac{1}{e}\right)\right\} c_2.$$

On majore alors trivialement $v$ par la constante $C(n)$ du théorème 1.1, ce qui termine la démonstration dans le cas où les nombres $\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. □

*Remarque.* On vérifie facilement que l'on a aussi

$$C(n) \leq n^{4n+6}(77/38)^{n+10.8} \qquad \text{pour} \quad n \geq 6.$$

*f) Fin de la démonstration dans le cas où les logarithmes sont linéairement dépendants.*

Supposons les nombres $\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_n$ linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$. Soit $n^0 < n$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces $n$ nombres. En réordonnant éventuellement les $\alpha_i$, on peut supposer que $(\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_{n^0})$ forme une base de cet espace vectoriel. Le lemme 2.10 permet d'écrire

$$b_{j0}\log\alpha_j = \sum_{s=1}^{n^0} b_{js}\log\alpha_s, \quad (1 \leq j \leq n),$$

avec $b_{j0}$, $b_{js}$ entiers rationnels, $b_{j0} > 0$, et

$$|b_{js}| \leq \Big(9(n-1)D^3\max\{1, \log A\}\Big)^{n-1}. \tag{9.5}$$

Posons

$$b_0^0 = \prod_{j=1}^{n} b_{j0} \qquad \text{et} \qquad b_s^0 = \sum_{j=1}^{n} b_j b_{js} \prod_{i\neq j} b_{i0}, \quad (1 \leq s \leq n^0),$$

de telle sorte que

$$b_0^0\Lambda = \sum_{s=1}^{n^0} b_s^0 \log\alpha_s.$$

Soit $B^0 = \max\{|b_0^0|, \dots, |b_{n^0}^0|\}$. Montrons que l'on a

$$\log B^0 \leq \big(3n^2(n-1)+1\big)G. \tag{9.6}$$

En effet, (9.5) donne

$$\log B^0 \leq \log B + \log n + n(n-1)\log\max\{1,\log A\} + n(n-1)\log\big(9(n-1)D^3\big).$$

On majore $\log n + n(n-1)\log\big(9(n-1)\big)$ par $3n^2 + n^2\log n$. D'autre part on a $\log E - (n-1)\log\log E > 0$, donc

$$Z > (n-1)\log\log A + n\log D + 4n\log n + 6n,$$

mais aussi

$$Z > 4n\log n + 6n + \log D,$$

et par conséquent

$$Z > (n-1)\max\{0,\log\log A\} + n\log D + 4n\log n + 6n,$$

Ainsi on trouve

$$\begin{aligned}
&\log B^0\\
&\leq \log B + 3n^2 + n^2\log n + 3n(n-1)\log D + n(n-1)\max\{0,\log\log A\}\\
&\leq \log B + 3n(n-1)Z\\
&\leq \log B + 3n^2(n-1)G\\
&\leq \big(3n^2(n-1)+1\big)G,
\end{aligned}$$

ce qui démontre (9.6).

Les nombres $\log\alpha_s$, $(1 \leq s \leq n^0)$ étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, nous pouvons utiliser le résultat que nous venons de démontrer pour minorer $|b_0^0\Lambda|$, avec $A_s^0 = A_s$, $(1 \leq s \leq n^0)$, $A^0 \leq A$, $E^0 = E$, $Z^0 \leq Z$, et $G^0 = \big(3n^2(n-1)+1\big)G$ On trouve ainsi

$$|b_0^0\Lambda| \geq \exp\big\{C(n^0)D^{n^0+2}G^0 Z\log A_1\cdots\log A_{n^0}(\log E)^{-n^0-1}\big\}.$$

On majore aussi $b_0^0$ par $3n^3G$. Comme $D\log A_i \geq \log E$ pour $i = n^0+1, \dots, n$, on obtient l'estimation voulue avec la constante $3n^3C(n^0)$ et $1 \leq n^0 \leq n-1$. Or les valeurs que nous avons trouvées pour $C(n)$ satisfont toujours $3n^3C(n-1) < C(n)$. Ceci termine la démonstration du théorème 1.1. $\square$

*g) Démonstration du corollaire 1.2.*

On choisit $E = e$ dans le théorème 1.1. Alors

$$Z \leq 4n \log n + 6n + 1 + n \log D + (n-1) \log\log A.$$

On minore $n \log\log \tilde{A}$ par $4n \log n + 6n + 1$ (le nombre 666 est un minorant de $e^{6+1/n}$), et aussi par $n \log D + (n-1) \log\log A$. On minore ensuite $n \log \tilde{B}$ par $4n \log 6 + 6n + 1$, ce qui permet de vérifier

$$Z \leq 2n \log\log \tilde{A} \qquad \text{et} \qquad Z \leq n(\log \tilde{B} + \log\log \tilde{A}),$$

d'où

$$G \leq \log \tilde{B} + \log\log \tilde{A}.$$

Le corollaire 1.2 s'en déduit facilement. $\square$

*Conclusion — Bilan.*

La méthode de Baker était jusqu'à présent la seule permettant de minorer explicitement des combinaisons linéaires de plusieurs logarithmes. Les quatre méthodes que nous avons présentées dans l'introduction fournissent des minorations comparables ; il serait cependant intéressant d'analyser soigneusement les petites différences qui apparaissent dans les estimations finales. Il se peut qu'un mélange harmonieux des différents arguments ainsi introduits conduise à de nouveaux raffinements.

On notera enfin que le résultat final est sensible aux estimations produites par le lemme de zéros : une amélioration de ce dernier est un objectif important.

Dans un autre article, nous élaborerons la méthode de Schneider en plusieurs variables (méthode 3 de l'introduction).

## RÉFÉRENCES.

[[B]] A. Baker, *The theory of linear forms in logarithms*, Chap.1 de : Transcendence Theory : Advances and Applications, ed. A.Baker and D.W.Masser, Academic Press (1977), 1–27..

[[BGMMS]] J. Blass, A.M. Glass, D.K. Manski, D.B. Meronk and R.P. Steiner, *Constants for lower bounds for linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Acta Arith. **55** (1990), 1–22.

[[G]] A.O. Gel'fond, *Transcendental and algebraic numbers*, Moscou (1952), Dover, New-York (1960)..

[H] N. Hirata, *Formes linéaires d'intégrales elliptiques*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–89, Birkhäuser Verlag, P.M. **91** (1990), 117–140.

[MW1] M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method*, Math. Ann. **231** (1978), 241–267.

[MW2] M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method, II*, Acta Arith. **53** (1989), 251–287.

[MW3] M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method, III*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **97** (1989), 43-75.

[P] P. Philippon, *Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114**, (1986), 355–383, et **115** (1987), 397–398.

[PW1] P. Philippon et M. Waldschmidt, *Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs*, Illinois J. Math. **32** (1988), 281–314.

[PW2] P. Philippon and M. Waldschmidt, *Lower bounds for linear forms in logarithms*, in : New Advances in Transcendence Theory, ed. A.Baker, Cambridge Univ. Press (1988), 280–312.

[S] Th. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I. Transzendenz von Potenzen*, J. reine angew. Math. **172** (1934), 65–69, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., **6** (1962), 64–94.[RS] J.B. Rösser and L. Schoenfeld..

[W1] M. Waldschmidt, *Transcendence methods Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics.*

[W2] M. Waldschmidt, *A lower bound for linear forms in logarithms*, Acta Arith. **37** (1980), 257–283.

[W3] M. Waldschmidt, *On the transcendence methods of Gel'fond and Schneider in several variables*, New Advances in Transcendence Theory, ed. A. Baker, Cambridge Univ. Press (1988), Chap. 24, 375–398.

[W4] M. Waldschmidt, *Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques*, J. Analyse Math., à paraître.

[Wü] G. Wüstholz, *A new approach to Baker's theorem on linear forms in logarithms (III)*, in New Advances in Transcendence Theory ed. A. Baker, Cambridge Univ. Press (1988), Chap. 25, 399–410.

[Y2] Yu Kunrui, *Linear forms in p-adic logarithms*, Acta Arith. **53** (1989), 107–186.

I. H. P.
Equipe Diophantienne
11, rue P. et M. Curie
75231 PARIS Cedex 05.