Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Roland Gillard

Remarques sur l'invariant mu d'Iwasawa dans le cas CM

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 3, nº 1 (1991), p. 13-26

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_13_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **3** *(1991), 13-26*

Remarques sur l'invariant mu d'Iwasawa dans le cas CM.

par Roland GILLARD

Après un bref historique (§1), on rappelle la définition des mesures sur $\mathbb{Z}_p$ et ses produits (§2). Le §3 expose un travail commun avec H. Hida montrant l'existence d'un lien entre la théorie des q-développements et l'étude de l'invariant mu d'Iwasawa.

1. Historique

L'exemple fondamental est celui des $\mathbb{Z}_p$ extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}$. Pour $p \neq 2$ un nombre premier fixé, on considère le nombre de classes h_n du corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ engendré par le groupe des racines de l'unité d'ordre p^{n+1}. Iwasawa [I1] a montré l'existence de nombres λ, μ, ν (λ et $\mu \geq 0$) tels que l'exposant $e(h_n)$ de p dans h_n vérifie

(1) $$e(h_n) = \mu p^{n+1} + \lambda n + \nu \text{ pour tout } n \text{ assez grand} .$$

Ainsi la connaissance de μ est nécessaire à celle de la partie principale de $e(h_n)$ quand $n \to \infty$.

La formule analytique du nombre de classes permet d'exprimer μ comme somme $\sum \mu(\chi)$, $\mu(\chi)$ étant un invariant lié à la fonction L, $L(s,\chi)$, ou son avatar p-adique $L_p(s,\chi)$, associée à un caractère de Dirichlet non trivial χ. Expliquons comment calculer $\mu(\chi)$. On utilise la décomposition $\mathbb{Z}_p^* = \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ pour écrire $x = \omega(x) < x >= \omega(x)c^{\ell(x)}$ avec $x \in \mathbb{Z}_p^*$, $\omega(x) \in \mu_{p-1}$, $< x > \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ et $\ell(x) \in \mathbb{Z}_p$; on a fixé un générateur c de $1 + p\mathbb{Z}_p$. La fonction $L_p(s,\chi)$ est la fonction continue de $s \in \mathbb{Z}_p$ interpolant les valeurs (normalisation ad'hoc):

(2) $$L_p(1-n,\chi) = (1 - \chi_n(p)p^{n-1})L(1-n,\chi_n) ,$$

où $\chi_n = \chi\omega^{-n}$.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1991 .

La théorie d'Iwasawa (cf par exemple [W] et aussi §2) montre l'existence d'une série formelle $g_\chi(U)$ à coefficients dans la $\mathbb{Z}_p$-algèbre des valeurs de χ en la variable $T = U - 1$: $g_\chi(U) \in \mathbb{Z}_p[\chi][[U-1]]$, telle que

$$L_p(s,\chi) = g_\chi(c^s). \tag{3}$$

Dans cette situation, $\mu(\chi)$ est la plus grande puissance de p divisant g_χ, ou encore sa valuation p-adique: $\mu(\chi) = v_p(g_\chi)$.

Le premier résultat, conjecturé par Iwasawa, fut obtenu par Ferrero et Washington, [FW] 1978:

THÉORÈME 1. *Pour tout caractère de Dirichlet pair, on a* $\mu(\chi) = 0$.

On a donc $\mu = 0$ dans (1). D'autres démonstrations sont apparues par la suite ([Ba],[Si]). La méthode de Sinnott permet d'aller plus loin ([G1], [Sc]): soit K un corps quadratique imaginaire, F une extension abélienne de K et $\mathfrak{P}$ un diviseur de p dans K supposé *distinct* de son conjugué; il existe alors une $\mathbb{Z}_p$-extension $K_\infty = \bigcup K_n$ de K non ramifiée en dehors de $\mathfrak{P}$. On sait que le nombre de classes de $F_n = F \cdot K_n$ est contrôlé par une formule analogue à (1) et on a:

THÉORÈME 2. *Pour* $p \neq 2$ *ou* 3, *l'invariant* μ *est nul. On a un résultat semblable si on considère les groupes de classes de rayon modulo une puissance de* $\mathfrak{P}$ *à la place des groupes de classes.*

En dehors de ce cas la situation reste mystérieuse. Ainsi pour F comme ci-dessus, on ne sait rien dire si K_∞ est remplacé par la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique ou la $\mathbb{Z}_p$-extension anticyclotomique. Dans ce dernier cas, on peut s'aventurer à donner une conjecture. C'est l'objet de cet exposé de discuter le cas plus général (mais les vraies difficultés sont les mêmes) des corps CM. Signalons qu'Iwasawa, [I2], a construit des $\mathbb{Z}_p$- extensions avec $\mu > 0$. Le cas des corps de fonctions a encore été peu étudié (cf cependant [MW]). On peut aussi s'intéresser au cas des fonctions L p-adiques associées aux motifs, cf. [Co].

2. Mesures p-adiques

2.1. Soit G un groupe profini (par exemple un groupe de Galois) ; on considère son algèbre complétée $\mathbb{Z}_p[[G]] := \varprojlim_H \mathbb{Z}_p[G/H]$, où dans la limite projective H parcourt l'ensemble des sous-groupes distingués d'indice fini. Un élément $f \in \mathbb{Z}_p[[G]]$ apparaît donc comme une famille d'éléments $f_H \in \mathbb{Z}_p[[G/H]]$, $f_H = \sum f_H(\gamma) \cdot \gamma$, γ parcourant (un système de représentants de) G/H. Désignons par $\mathcal{O}$ une algèbre p-adique (i.e. telle que $\mathcal{O} = \varprojlim_n \mathcal{O}/p^n\mathcal{O}$). A $f \in \mathbb{Z}_p[[G]]$, il est facile d'associer une mesure sur G à valeurs dans $\mathcal{O}$: désignons par $\mathcal{C}(G,\mathcal{O})$ l'ensemble des fonctions continues de G vers $\mathcal{O}$; une mesure est une forme linéaire $\mathcal{C}(G,\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$. A f, on associe la forme définie par

$$\psi = \lim_H \psi_H \quad \to \quad <\mu,\psi>_G := \lim_H \sum_g f_H(g)\psi_H(g) .$$

Ici ψ_H est localement constante et se factorise par G/H. Ce procédé *identifie* l'ensemble des mesures sur G à valeurs dans $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}[[G]]$. Si $\alpha : G \to K$ est un homomorphisme de groupes profinis, on définit $\alpha_* : \mathcal{O}[[G]] \to \mathcal{O}[[K]]$ par passage à la limite projective à partir des flèches évidentes pour les algèbres de groupes finis et on a:

$$<\alpha_*\mu,\psi>_K = <\mu,\psi\circ\alpha>_G \quad \text{pour } \psi \in \mathcal{C}(K,\mathcal{O}) .$$

Dans la suite, on suivra la tradition en écrivant $\int_G \psi(g)\mu(g)$ pour $<\mu,\psi>_G$. Pour H sous- groupe ouvert de G, on désigne par $\int_H \psi(g)\mu(g)$ le nombre $\int_G \psi^H(g)\mu(g)$ où $\psi^H(g) = \psi(g)$ si g est dans H et 0 sinon. En fait, il suffit de prendre $\psi \in \mathcal{C}(H,\mathcal{O})$ (prolongement par 0); on note $\mu\,\big|_H$ (restriction de μ à H) la mesure ainsi obtenue sur H.

2.2. L'exemple fondamental est celui où $G = \mathbb{Z}_p$. L'algèbre $\mathcal{O}[[G]]$ s'identifie alors à $\mathcal{O}[[T]] = \mathcal{O}[[U-1]]$, l'anneau de séries formelles en $T = U-1$. A l'élément $x \in \mathbb{Z}_p$, on associe $U^x := \sum \binom{x}{n}(U-1)^n$. On retrouve la série f par

$$f(U) = \int_{\mathbb{Z}_p} U^x\,\mu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n(U-1)^n , \tag{4}$$

avec $b_n = \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n}\,\mu(x)$. Une fonction continue pouvant s'écrire $\psi = \sum a_n \binom{x}{n}$ avec $a_n \in \mathcal{O}, a_n \to 0$, on obtient $\int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x)\,\mu(x) = \sum a_n b_n$.

2.3. Théorie de Sinnott. Exprimons les fonctions L du §1 à l'aide de ce qui précède: on associe au caractère de Dirichlet $\chi \neq 1$, vu comme fonction sur $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, pour un module f, la fonction rationnelle:

$$f_\chi(U) := \sum_{n=0}^{f} \frac{\chi(n)U^n}{U^f - 1} .$$

Elle définit une série dans $\mathcal{O}[[U-1]]$, avec $\mathcal{O}$ contenant $\mathbb{Z}_p[\chi]$ donc une mesure μ_χ, et on a:

$$L(1-n,\chi)=\int_{\mathbb{Z}_p} x^n\,\mu_\chi(x)\,, \tag{5}$$

$$L_p(1-n,\chi)=\int_{\mathbb{Z}_p^*} <x>^n\;\mu_\chi(x)\,, \tag{6}$$

Posons $\nu_\chi = pr_*(\mu_\chi\,|_{\mathbb{Z}_p^*})$ avec $pr:\mathbb{Z}_p^*\to 1+p\mathbb{Z}_p$, la projection. On a alors:

$$L_p(1-n,\chi)=\int_{1+p\mathbb{Z}_p} <x>^n\;\nu_\chi(x)\,. \tag{7}$$

En remontant les définitions, on trouve que le deuxième membre de (7) est encore

$$g_\chi(U)=\int_{\mathbb{Z}_p} U^y\,\ell_*(\nu)(y)\,,$$

la série associée à la mesure $\ell_*(\nu_\chi)$. En utilisant que ℓ est un isomorphisme, on obtient les équivalences:

$$\mu_\chi(\chi)=0 \Leftrightarrow p|g_\chi \Leftrightarrow p|\ell_*(\nu_\chi) \Leftrightarrow p|\nu_\chi\,. \tag{8}$$

Sinnott a calculé la série correspondant à ν_χ: c'est

$$h_\chi(U)=\sum_{\eta\in\mu_{p-1}} f_{\chi,\eta}(U^{\eta^{-1}}) \tag{9}$$

où $f_{\chi,\eta}(U)\in\mathcal{O}[[U-1]]$ se déduit de f_χ par:

$$f_{\chi,\eta}(U^{\eta^{-1}})=\frac{1}{p}\sum_{\zeta\in\mu_p}\zeta^\eta\,f(\zeta U)\,.$$

Il reste alors pour obtenir le théorème 1 à démontrer que p ne divise pas g_χ en utilisant la non divisibilité de f_χ. Ceci se fait grâce à des raisonnements d'indépendance algébrique utilisant la structure de groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ (en fait c'est plus ou moins le théorème d'Artin d'indépendance des caractères).

Ce qui est fascinant dans cette question est le fait que toute la théorie est commandée par l'objet algébrique très simple qu'est la fraction rationnelle f_χ.

2.4. Mesures sur les $\mathbb{Z}_p$-modules libres. Dans ce §, on résume une partie de [K4]. On part en fait d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $\mathcal{A}$ et on s'intéresse aux mesures sur $G = \mathcal{A}_p = \mathcal{A} \otimes \mathbb{Z}_p$. Si on veut tout expliciter, on peut prendre une base de $\mathcal{A}$. Soit $T(\mathcal{A})$ le tore sur $\mathcal{O}$ ayant $\mathcal{A}$ comme groupe de caractères. Considérons son anneau de coordonnées $S(\mathcal{A})$; il est engendré par des monômes indexés par $\mathcal{A}$: on note U^α celui correspondant à $\alpha \in \mathcal{A}$. A chaque fonction polynômiale $\mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, on associe l'opérateur différentiel D_P sur $\mathcal{A}$ tel que $U^\alpha \to P(\alpha)U^\alpha$. Soit $T(\mathcal{A})[p^n]$ le noyau de la multiplication par p^n dans $T(\mathcal{A})$. La complétion $\overline{S}(\mathcal{A})$ de $S(\mathcal{A})$ pour la famille d'idéaux définissant les $T(\mathcal{A})[p^n]$ s'identifie à $\mathcal{O}[[\mathcal{A}_p]]$. C'est l'anneau des coordonnées d'un tore formel $\hat{T}(\mathcal{A})$. Pour chaque fonction continue f sur $\hat{T}(\mathcal{A})$, on associe comme en 2.1 une mesure μ sur $\mathcal{A}_p$. Si ψ est une fonction continue sur $\mathcal{A}_p$ à valeurs dans $\mathcal{O}$ (ou un $\mathcal{O}$-module fixé), on obtient un nombre $\int_{\mathcal{A}_p} \psi(a)\,\mu(a) \in \mathcal{O}$. De telles fonctions sont fournies par les points ξ de $\hat{T}(\mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathcal{O}$: on note $\xi(a)$ la valeur de a en ξ. Ainsi $a \to \xi(a)$ définit un caractère et on a:

$$f(\xi) = \int_{\mathcal{A}_p} \xi(a)\,\mu(a)\,. \tag{10}$$

Pour le point tautologique à valeurs dans $\overline{S}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}[[\mathcal{A}_p]]$, on a:

$$f(U) = \int_{\mathcal{A}_p} U^a\,\mu(a)\,. \tag{11}$$

Plus généralement, pour P et D_P comme plus haut:

$$D_P f(\xi) = \int_{\mathcal{A}_p} P(a)\xi(a)\,\mu(a)\,. \tag{12}$$

Il est facile, cf. (4), de voir que f est connu dès qu'on connaît tous les $D_P f(1)$.

2.5. Retour à l'invariant mu. Si $\mathcal{A} = r$ est un anneau d'entiers, r_p^* possède un facteur direct isomorphe à r_p. Notant pr la projection correspondante, la transformation de Mellin Leopoldt associe à une série $f \in \mathcal{O}[[r_p]]$ ou à la mesure correspondante μ une autre série $g \in \mathcal{O}[[r_p]]$

ou une mesure telle que $\nu = pr_*\mu$. L'analogue de (8) est encore vrai. Le passage de $p|\nu$ à $p|\mu$ suppose une hypothèse sur f: on peut lui imposer d'appartenir par exemple aux fonctions algébriques (cf [Si]) sur le tore $\mathbb{G}_m$. ou encore (cf. [G1]) aux fonctions algébriques sur une courbe elliptique E munie d'un isomorphisme du groupe formel associé avec $\mathbb{G}_m$. Dans les deux cas on a un groupe algébrique et on utilise effectivement son addition. C'est un des principaux problèmes rencontrés ci-dessous que d'imaginer un substitut à ce procédé.

3. Cas des corps CM: conjectures et résultats

3.1. Une mesure sur un groupe de rayon. Soit F un corps totalement réel de degré d et K une de ses extensions quadratiques imaginaires. L'anneau des entiers de F (resp. K) est noté r (resp. R). Fixons un nombre premier p impair dont tous les diviseurs premiers soient décomposés dans l'extension F/K. Choisissons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. On plonge $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note Σ un CM type de K, c'est à dire un ensemble de d plongements de K dans $\overline{\mathbb{Q}}$ tels que leurs restrictions à F soit exactement l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Désignons par c la conjugaison complexe et posons $\overline{x} = c(x), \overline{\sigma} = c\sigma = \sigma c$. On note $\mathfrak{P}_\sigma$ l'idéal défini par le plongement $\sigma : K \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. On suppose qu'il est toujours distinct de celui défini par $\overline{\sigma}$. Désignons par K^{gal} la clôture galoisienne de K dans $\overline{\mathbb{Q}}$ (c'est le composé des $\sigma(K)$) et $\overline{K}^{gal}$ son complété pour la place définie par $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. On note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension assez grosse de degré fini de $\overline{K}^{gal}$ et $\mathbb{D}$ celui du complété de l' extension non ramifiéee maximale de cette extension. On choisit une uniformisante p dans $\mathcal{O}$. Fixons un idéal $\mathfrak{G}$ de K et considérons le groupe de classes $G := Cl(\mathfrak{G}p^\infty) := \varprojlim_n Cl(\mathfrak{G}p^n)$. Un grossencaractère λ de conducteur divisant $\mathfrak{G}p^\infty$ est une fonction sur le groupe $I_\mathfrak{G}$ des idéaux fractionnaires premiers à $p\mathfrak{G}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$: par continuité, en utilisant l' application canonique $\mathfrak{A} \to [\mathfrak{A}]_G$ de $I_\mathfrak{G}$ dans G, on lui associe une application notée encore λ de G dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ telle que $\lambda(\mathfrak{A}) = \lambda([\mathfrak{A}]_G)$. Notant $L(0, \lambda)$ la valeur de la fonction L en λ (éventuellement après prolongement analytique), on déduit de [K2] (ou de [HT] pour la genéralisation utilisée) l'existence d'une mesure μ sur G à valeurs dans $\mathbb{D}$ telle que

$$\frac{\int_G \lambda(g)\,\mu(g)}{\Omega_p(k,d)} = [R^* : r^*]Eul^*(\lambda)\frac{\Gamma(k,d)}{\Omega_\infty(k,d)}G(\lambda)L(0,\lambda)\,; \tag{13}$$

ici, on suppose que λ est de type (k, d), c'est à dire que pour $\mathfrak{A} = (x)$, idéal principal avec un générateur x congru à 1 modulo $\mathfrak{G}p^m$ (m assez gros), on a

$$\lambda(\mathfrak{A}) = \lambda(x) = \prod_{\sigma} \frac{\overline{\sigma}(x)^{d(\sigma)}}{\sigma(x)^{k+d(\sigma)}},$$

avec des entiers $k \geq 1$ et $d(\sigma) \geq 0$. On a associé à λ des périodes complexe $\Omega_\infty(k,d)$ et p-adique $\Omega_p(k,d)$ qui ne dépendent que du type (k,d) où d est la somme formelle $d = \sum d(\sigma)\sigma$. On a une somme de Gauss $G(\lambda)$ rappelant l'existence d'une transformée de Fourier partielle dans la définition de μ. On a introduit un produit de facteurs Γ: $\Gamma(k,d) = \prod_\sigma \Gamma(k + d(\sigma))$. Enfin $Eul^*(\lambda)$ est un facteur eulérien dont voici la valeur:

$$Eul^*(\lambda) = \prod_{\sigma\in\Sigma} (1 - \lambda(\mathfrak{P}_\sigma)^{-1} N(\mathfrak{P}_\sigma)^{-1}).$$

Remarques:

1) sur les périodes: elles sont définies comme dans Katz [K2] à partir d'une variété abélienne de type CM à multiplications complexes par K. Il serait plus conforme à la philosophie des motifs [De] de faire intervenir le motif $M(\lambda)$ *défini* sur K et donc des variétés abéliennes définies sur K et à multiplications complexes par le corps dual à (K,Σ). C'était l'objet de [Gi] de faire le lien entre les deux types de périodes.

2) Toute congruence entre grossencaractères $\lambda \equiv \lambda'$ modulo $\mathbf{p}$ dans $\mathcal{O}$ se traduit en des congruences $\int_G \lambda(g)\,\mu(g) \equiv \int_G \lambda'(g)\,\mu(g)$ modulo $\mathbf{p}$.

3) Si on part d'un diviseur $\mathfrak{G}_0$ de $\mathfrak{G}$, on lui associe un groupe de rayon G_0, et une mesure μ_0 comme ci-dessus. Si λ provient d'un grossencaractère λ_0 correspondant à $\mathfrak{G}_0$, les fonctions L de λ et λ_0 sont reliéees par $L(0,\lambda_0) = \prod(1-\lambda_0(\mathfrak{L}))\, L(0,\lambda_0)$, où dans le produit $\mathfrak{L}$ parcourt les diviseurs premiers de $\mathfrak{G}$. Si pr désigne la projection $G \to G_0$, les mesures μ et μ_0 sont reliées par:

$$pr_*\mu = \prod(1 - [\mathfrak{L}]_{G_0})\,\mu_0 \tag{14}$$

(résultat d'unicité dans la formule analogue à (13)).

3.2. Invariants mu associés à un caractère de Dirichlet de K. Décomposons G en un produit $G = \Gamma \times \Delta$ avec un $\mathbb{Z}_p$-module libre Γ et un groupe fini Δ. On note Γ_- le plus grand quotient libre sur $\mathbb{Z}_p$ de Γ où c opère par inversion $\gamma \to \gamma^{-1}$; le rang de Γ_- est d, celui de Γ est $d+\delta$ avec $\delta = 1$ si la conjecture de Leopoldt est vraie pour K. On fixe un caractère de Dirichlet χ de conducteur divisant $\mathfrak{G}$ qu'on voit comme un caractère de G: sans restreindre la discussion, on peut supposer que χ se factorise par

Δ. On suppose aussi que $\mathcal{O}$ contient ses valeurs. Pour $\mathfrak{A}$ un idéal dans $I_{\mathfrak{G}}$, on note $[\mathfrak{A}]_\Gamma$ (resp. $[\mathfrak{A}]_{\Gamma_-}$) l'image de $[\mathfrak{A}]_G$ dans Γ (resp. Γ_-). On va définir des déformations $\chi_{k,d}$ de χ.

Soit R_p (resp. r_p) le complété p-adique de R (resp. de r); on a des identifications:

$$R_p = \prod_{\mathfrak{P}} (R_{\mathfrak{P}} \times R_{\overline{\mathfrak{P}}}) = \prod_{\mathfrak{p}} (r_{\mathfrak{p}} \times r_{\mathfrak{p}}) = r_p \times r_p \,, \tag{15}$$

avec des produits de complétés, où $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{P}$) parcourt l'ensemble des idéaux de F (resp. de K choisis par Σ) au-dessus de p. On note $\overline{R}^* \subset R_p^*$ (resp. $\overline{r}^* \subset r_p^*$) le complété de R^* (resp. de r^*). Notons W (resp. W_-) un facteur direct $\mathbb{Z}_p$-libre de R_p^* (resp. de r_p^*), et $x \to < x >$ la projection. La flèche $W \to \Gamma_-$ se factorise par W_- et l'application $W_- \to \Gamma_-$ qui en résulte (par factorisation par $R_p \to r_p : z = (x,y) \to y/x$, cf (15)) est injective; on a donc un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} W & \to & \Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_- & \hookrightarrow & \Gamma_- \end{array} \quad .$$

Les applications $R \to \mathcal{O}$, $x \to \prod_\sigma \sigma(x)$ et $x \to \overline{\sigma}(x)/\sigma(x)$ se prolongent par continuité en des applications de R_p^* vers $\mathcal{O}$. On vérifie que ces applications tuent $W \cap \overline{R}^*$. Par ailleurs l'application $G \to \Gamma$ se factorise par le groupe des classes $Cl(p^\infty)$. Ce groupe contenant canoniquement $R_p^*/\overline{R}^*$, on voit que $W/W \cap \overline{R}^*$ s'identifie à un sous groupe de Γ; on prolonge les applications ci-dessus à Γ puis on obtient des caractères λ_N et λ_σ sur G via $G \to \Gamma, g \to \gamma(g)$. On pose $\lambda_{k,d} = \prod \lambda_\sigma^{d(\sigma)}/\lambda_N^k$ et $\chi_{k,d} = \chi\lambda_{k,d}$. Le caractère $\chi : G \to \mathbb{D}$ définit un homomorphisme d'anneaux $\chi_* : \mathbb{D}[[G]] \to \mathbb{D}[[\Gamma]]$ prolongeant $g \to \chi(g)\gamma(g)$ (ou $[\mathfrak{A}]_G \to \chi(\mathfrak{A})[\mathfrak{A}]_\Gamma$). On définit de même un homomorphisme d'anneaux $\chi_*^- : \mathbb{D}[[G]] \to \mathbb{D}[[\Gamma_-]]$.

On pose $\nu_\chi = \chi_*\mu \in \mathbb{D}[[\Gamma]]$ (resp. $\nu_\chi^- = \chi_*^-\mu \in \mathbb{D}[[\Gamma_-]]$). L'invariant mu associé à χ est par définition $\mu(\chi) = v_{\mathbf{p}}(\nu_\chi)$. Sa variante anticyclotomique est $\mu^-(\chi) = v_{\mathbf{p}}(\nu_\chi^-)$. On a un isomorphisme $\ell_- : \Gamma_- \simeq r_p$; on pose donc

$$g_\chi^-(U) = \int_{r_p} U^a \, (\ell_-)_*(\nu_\chi)(a) \, .$$

De 3.1, on déduit:

Remarques

1) Une congruence modulo $\mathbf{p}$ entre caractères, $\chi \equiv \chi'$, se traduit par une congruences entre séries $g_\chi \equiv g_{\chi'}$. Pour discuter la nullité des invariants mu on peut donc toujours remplacer χ par χ'.

2) Si χ n'a pas été choisi primitif, appelant χ_0 le cararctère primitif associé, on déduit de 3.1 que $g_\chi = \prod Eul(\mathfrak{L})\, g_{\chi_0}$ (resp $g_\chi^- = \prod Eul(\mathfrak{L})\, g_{\chi_0}^-$) avec des facteurs eulériens $Eul(\mathfrak{L}) = 1 - \chi_0(\mathfrak{L})[\mathfrak{L}]_\Gamma$ (resp. $Eul^-(\mathfrak{L}) = 1 - \chi_0(\mathfrak{L})[\mathfrak{L}]_{\Gamma_-}$), cf 3.1 (14).

PROPOSITION 1. *Le facteur $Eul(\mathfrak{L})$ n'est pas divisible par $\mathbf{p}$ dans $\mathbb{D}[[\Gamma]]$. Le facteur $Eul^-(\mathfrak{L})$ est divisible par $\mathbf{p}$ dans $\mathbb{D}[[\Gamma_-]]$ si et seulement si $[\mathfrak{L}]_{\Gamma_-} = 1$ et $\chi_0(\mathfrak{L})$ est congru à 1 mod $\mathbf{p}$.*

Démonstration. En travaillant dans $\mathbb{D}[[W]]/(W^n)$, n assez gros, on vérifie que la série $[\mathfrak{L}]_\Gamma$ (resp $[\mathfrak{L}]_{\Gamma_-}$) n'est constante mod $\mathbf{p}$ que pour $[\mathfrak{L}] = 1$ (resp. $[\mathfrak{L}]_{\Gamma_-} = 1$). On sait par ailleurs que $[\mathfrak{L}]_\Gamma$ est toujours $\neq 1$. En effet, dans le cas contraire une puissance de $\mathfrak{L}\mathfrak{L}^c$ est de norme 1 (car c commute aux σ) ce qui est absurde pour un idéal premier $\mathfrak{L}$.

On peut déduire de ceci la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Il existe des caractères avec $\mu_-(\chi) > 0$.*

Démonstration. Commençons par construire une sous-extension L du corps de classes de K de rayon $\mathfrak{G}$, de degré p sur le corps de Hilbert H de K. Ceci est possible en choisissant (voir plus loin) suffisamment de facteurs premiers dans l'idéal $\mathfrak{G}$ (dépasser le rang de R^*). On choisit alors un facteur direct cyclique dans $Gal(L/K)$ qui contient $Gal(K/H)$: il est de la forme $Gal(L/H_2)$. Ainsi L (resp. H) est l'extension composée de deux extensions linéairement disjointes L_1 et L_2 de K (resp. H_1 et H_2); $Gal(L_1/K) = Gal(L/H_2)$ est cyclique donc correspond à un caractère χ. Les facteurs eulériens sont nuls modulo $\mathbf{p}$ car H_1/H est non ramifiée donc les facteurs premiers de $\mathfrak{G}$ y sont totalement décomposés si ceux-ci ont été choisis principaux. On assure $[\mathfrak{L}]_{\Gamma_-} = 1$ en prenant des idéaux (principaux) de F qui sont en plus inertes dans K/F.

On a donc trouvé une cause de non-nullité de $\mu^-(\chi)$. Il est tentant de conjecturer que c'est la seule. On se met à l'abri des facteurs eulériens en imposant que l'ordre de χ est premier à p:

CONJECTURE. *i) Pour tout caractère χ, on a $\mu(\chi) = 0$.*

ii) Le résultat est vrai pour $\mu^-(\chi)$ si χ est d'ordre premier à p.

On observe que l'hypothèse sur l'ordre de χ protège aussi des contre-exemples d'Iwasawa, [I2], basés sur la formule des classes invariantes dans les p-extensions. Bien sûr, la nullité de $\mu^-(\chi)$ entraîne celle de $\mu(\chi)$. On se concentre dans la suite sur l'étude de $\mu^-(\chi)$.

3.3. Traduction sur les composantes de la mesure μ. Indiquons le principe de la construction de μ. De nombreuses variantes sont possibles dans la présentation; par exemple les considérations de 3.2 montrent que l'on peut sans dommage pour l'étude de mu rajouter dans $\mathfrak{G}$ des idéaux premiers **décomposés** dans K/F: on va donc remplacer $\mathfrak{G}$ par l'idéal $\mathfrak{g}.R$ avec $\mathfrak{g} = N_{K/F}(\mathfrak{G})$. On note $r^*(\mathfrak{g})$ (resp. $R^*(\mathfrak{G})$) le groupe des unités de r (resp. de R) congrues à 1 modulo $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{G}$) et $\overline{r}^*(\mathfrak{g})$ (resp. $\overline{R}^*(\mathfrak{G})$) sa complétion dans r_p (resp. R_p). On commence par écrire la suite exacte:

$$0 \to G_0 \to G \to Cl(\mathfrak{G}) \to 0\,,$$

traduisant que G s'envoie sur $Cl(\mathfrak{G})$ avec un noyau qu'on appelle G_0 et qui est isomorphe à $R_p^*/\overline{R}^*(\mathfrak{G})$. On choisit un système d'idéaux $\mathfrak{Q}_i$ représentant $Cl(\mathfrak{G})$, en supposant (c'est possible!) que chacun des $\mathfrak{Q}_i$ provient d'un idéal premier $\mathfrak{q}_i$ de F décomposé dans K/F. La mesure μ est définie en "poussant" des mesures μ_i de G_0 qu'on construit avec des séries d'Eisenstein p-adiques (cf §4.1):

$$\int_G f(g)\mu(g) = \sum_i \int_{G_0} f(\mathfrak{Q}_i^{-1} g)\,\mu_i(g)\,,$$

chaque μ_i provient en fait d'une mesure sur $G_1 = R_p^*/\overline{r}^*(\mathfrak{g}) \simeq (r_p^* \times r_p^*)/\overline{r}^*(\mathfrak{g})$ encore notée μ_i. En adjoignant la densité χ, on obtient une mesure $\chi\mu_i$ sur G_1. L'application $R_p^*/\overline{r}^*(\mathfrak{g}) \to \Gamma_-$ se factorise

$$R_p^* \xrightarrow{\pi} r_p^* \xrightarrow{pr} W_- \subset \Gamma_-\,.$$

En identifiant, ici comme dans la suite, $\pi_*(\mu_i)$ à un élément dans $\mathbb{D}[[r_p^*]]$, on peut écrire:

$$(16) \qquad g_\chi^-(U) = \sum_i (\chi(\mathfrak{Q}_i) U^{-\ell_-([\mathfrak{Q}_i]_{\Gamma_-})}(\ell_-)_* pr_*\{\pi_*(\chi\mu_i)\}\,.$$

Sous cette forme, on voit que la divisibilité par $\mathbf{p}$ de g_χ^- revient à celle de toutes les sommes analogues où on impose aux $[\mathfrak{Q}_i]_{\Gamma_-}$ d'appartenir à la même classe de Γ_- modulo W_-. Dans la suite, on restreint donc la somme aux i tels que $[\mathfrak{Q}_i]_{\Gamma_-}$ soit dans W_-; elle provient par ℓ_- d'un élément de $\mathbb{D}[[W_-]]$ que, via l'inclusion $\mathbb{D}[[W_-]] \to \mathbb{D}[[r_p]]$, on peut encore écrire sous la forme:

$$h_\chi(U) = pr_* \sum_i \int_{G_1} U^{\pi([\mathfrak{Q}_i]^{-1}g)} \chi([\mathfrak{Q}_i]^{-1}g)\, \mu_i(g)\,. \tag{17}$$

Introduisons donc l'élément:

$$F_{i,\chi}(U) = \int_{G_1} U^{\pi([\mathfrak{Q}_i]^{-1}g)} \chi([\mathfrak{Q}_i]^{-1}g)\, \mu_i(g) \in \mathbb{D}[[r_p^*]] \subset \mathbb{D}[[r_p]]\,. \tag{18}$$

4. q-développements des séries d'Eisenstein p-adiques

Le but de ce §4 est de montrer que la non divisibilité par $\mathbf{p}$ de $F_{i,\chi}(U)$ peut se discuter sur les coefficients d'une série d'Eisenstein. Il reste à discuter la somme sur i ainsi que son comportement par pr_* (problème le plus sérieux).

4.1 Mesures d'Eisenstein. Dans [K2], Katz a construit des séries d'Eisenstein p-adiques; nous décrivons une variante pour tenir compte de $\mathfrak{g}$. On choisit $\mathfrak{Q}_i$ et $\mathfrak{q}_i$ comme en 3.3. On considère des structures $\mathbf{a} = (A, \lambda, C_i, \iota)$ avec (A, λ, ι) une variété abélienne de Hilbert-Blumenthal (VAHB) munie d'une $\mathfrak{c}$-polarisation et d'une structure ι de niveau $N = p^\infty$ comme dans [K2] §1.0; l'idéal $\mathfrak{c}$ est défini comme dans [K2] 5.1.6. Ainsi A admet de la multiplication réelle par r; on a complété par des sous-groupes C_i de A, C_i isomorphe au groupe constant $\mathfrak{q}_i^{-1}/r$. De la sorte, on associe à $\mathbf{a}$ et i une VAHB A_i en effectuant le quotient de A par C_i, cette variété abélienne est munie d'une $\mathfrak{c}_i$- polarisation en prenant $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}\mathfrak{q}_i$. On désigne par $\mathcal{M}$ l'analogue de $\mathcal{M}(\mathfrak{c}, \Gamma_{00}(N))$ de [K2] en rajoutant les C_i dans les structures classifiées. On a un morphisme étale oubli: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}(\mathfrak{c}, \Gamma_{00}(N))$. On a aussi des morphismes $\mathcal{M} \to \mathcal{M}(\mathfrak{c}_i, \Gamma_{00}(N))$ grâce à $A \to A_i$. On a une notion de $\mathcal{M}$-forme modulaire p-adique et une forme modulaire à la Katz pour $\mathcal{M}(\mathfrak{c}_i, \Gamma_{00}(N))$ donne en composant avec $A \to A_i$ une $\mathcal{M}$-forme modulaire. On note $\mathbb{V}$ et $\mathbb{V}(\mathfrak{c}_i)$ l'espace de ces formes modulaires p-adiques: on prend $R_0 = \mathbb{D}$ dans [K2] 1.9.

L'exemple clef est la variété abélienne correspondant au tore complexe $\mathbb{C}^d/R$ où R est plongé dans $\mathbb{C}^d = \prod_{\sigma\in\Sigma} \mathbb{C}$ via Σ. Les structures supplémentaires sont données ainsi: λ et ι sont définis comme dans [K2] §5. On choisit C_i à l'aide de $\mathfrak{q}_i^{-1}/r \simeq \mathfrak{Q}_i^{-1}/R \hookrightarrow R \otimes \mathbb{Q}/R$. On construit donc ainsi un point $\mathbf{x}$ de $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et en fait dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Quitte à grossir encore $\mathcal{O}$, on peut aussi faire que $\mathbf{x}$ est défini sur cet anneau.

On considère par ailleurs la VAHB notée $Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)$ comme dans [K2] (avec $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$) à ceci près qu'on lui adjoint les plongements $\mathfrak{q}_i^{-1}/r \hookrightarrow \mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*/q^{\mathfrak{b}}$: $\mathfrak{q}_i^{-1}/r \hookrightarrow \mu_{N(\mathfrak{q}_i)} \otimes (\mathfrak{a}\mathfrak{q}_i)^*/\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{a}^*$ étant l'idéal fractionnaire $\delta^{-1}\mathfrak{a}^{-1}$,cf [K2] 1.1.9. En remplaçant les sommes modulo E de [K2] §3 par les sommes modulo $r^*(\mathfrak{g})$, on obtient par un énoncé analogue à [K2] 3.2.3 des formes modulaires de Hilbert $G_{k,F}$ de poids k pour chaque fonction $F : r_p \times r_p \to \mathcal{O}$ vérifiant $F(e^{-1}x, ey) = N(e)^k F(x,y)$ pour tout $e \in r^*(\mathfrak{g})$. Comme $G_1 = (r_p^* \times r_p^*)/\overline{r}^*(\mathfrak{g})$, on en déduit une mesure $\mu_{\mathfrak{c}}$ associant à une fonction (localement constante ou continue) φ sur G_1 (ou $r_p^* \times r_p^*$) la forme modulaire p-adique $\int_{G_1} \varphi\mu$ dont la valeur en $Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)$ est

$$(19) \qquad \int_{G_1} \varphi\,\mu \,\Big|\; Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q) = N\mathfrak{a} \sum a_\alpha q^\alpha \text{ avec } a_\alpha = \sum_{a,b} \frac{\varphi(\frac{1}{a}, b)}{|N(a)|},$$

où la somme est faite sur les factorisations $\alpha = ab$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ modulo $r^*(\mathfrak{g})$, cf. [K2] 4.2.5; on obtient $\underline{\mu}_i$, mesure à valeurs dans $\mathbb{V}$, en imposant la formule:

$$(20) \qquad \int_{G_1} \varphi\,\underline{\mu}_i \,\Big|_{\mathbf{a}} = \int_{G_1} \varphi\,\mu_{\mathfrak{c}_i} \,\Big|_{A_i}.$$

On obtient μ_i de 3.3 en évaluant $\underline{\mu_i}$ en $\mathbf{a} = \mathbf{x}$.

4.2. Déformation universelle de la réduction $\overline{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$. Soit $\mathbf{x} = (A, \ldots)$ composée notamment de la VAHB A. On considére la réduction modulo $\mathbf{p}$, $\overline{\mathbf{x}}$, de $\mathbf{x}$ et sa déformation universelle $\mathbf{x}^{univ}$. On tire ce qui suit du théorème 2.1 de [K1]. L'algèbre des déformations $\mathcal{R}_0$ de $\overline{A}$ est l'algèbre des fonctions d'un tore formel sur W, l'anneau des vecteurs de Witt de $\overline{\mathbb{F}}_p$; son groupe de caractères est isomorphe à $T_p(\overline{A}) \otimes T_p(\overline{A}^t)$, produit tensoriel du module de Tate de A avec celui de sa duale A^t. La polarisation λ ayant été choisie de degré premier à p, ce groupe s'identifie à $T_p(\overline{A}) \otimes T_p(\overline{A})$. Si on se restreint aux déformations munies d'une action de r, on a un résultat analogue avec un produit tensoriel sur r_p (au lieu de $\mathbb{Z}_p$). Le produit tensoriel étant alors symétrique en ses deux facteurs, il est automatique que λ se relève. Enfin les autres structures introduites pour $\mathcal{M}$ définissent un revêtement étale laissant inchangé l'anneau des déformations formelles. En conclusion l'anneau des déformations universelles de $\overline{\mathbf{x}}$ est $\mathcal{R} \simeq W[[r_p]]$. Notons que $\mathbf{x}^{univ}$ est munie d'une structure de niveau p^∞ provenant de celle de $\mathbf{x}$ (construite en [K2] 5.1.18).

4.3. Le résultat de comparaison. On a ainsi deux façons de trouver un élément de $\mathbb{D}[[r_p]]$, et il est important de les comparer:

THÉORÈME 3. *Pour toute fonction continue φ sur G_1, les éléments*

$$\int_{G_1} U^{\pi(t)}\varphi(t)\mu_i(t)\,|_{\mathbf{x}} \ \textit{d'une part, et } \int_{G_1} \varphi(t)\underline{\mu}_i(t)\,|_{\mathbf{x}^{univ}},$$

d'autre part, sont égaux.

Démonstration. Les deux éléments s'écrivent sous la forme $f(U) \in \mathbb{D}[[U-1]]$. Pour démontrer le résultat il suffit de vérifier l'égalité des expressions $(D_P f)(1)$, D_P étant un opérateur différentiel correspondant à un polynôme homogène sur r et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Il suffit de le faire pour une base des polynômes sur r à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et donc pour les P de la forme $P(\alpha) = \alpha^d = \prod \sigma(\alpha)^{\alpha(\sigma)}$. Le premier élément donne

$$\int_{G_1} [\pi(t)]^d \varphi(t)\mu_i(t)\,|_{\mathbf{x}}, \tag{21}$$

valeur en x de la forme modulaire p-adique valant $N\mathfrak{a}\sum a_\alpha \alpha^d q^\alpha$ en $Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)$ avec a_α comme dans (18). Celle-ci est obtenue à partir de la forme valant $N\mathfrak{a}\sum a_\alpha q^\alpha$ en $Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)$ en faisant agir l'opérateur $\theta_P = \prod \theta(\sigma)^d(\sigma)$ défini comme dans [K2] 2.6.27. Cette dernière forme peut encore s'écrire
$\int_{G_1} \varphi(t)\underline{\mu}_i(t)\,|_{Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)}$. Pour le deuxième élément, on obtient le même résultat en comparant [K1] 4.3.2 et [K2] 1.12.6. Deux formes ayant même valeur en $Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)$ sont égales donc prennent la même valeur en $\mathbf{x}$. Celle-ci s'obtient à partir de la valeur en $\mathbf{x}^{univ}$ en faisant $U = 1$.

En définissant les a_α comme dans (19), mais avec $\varphi = \chi$, on peut énoncer:

COROLLAIRE. *Pour tout couple d'idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ vérifiant $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, on a* $v_p(F_{\chi,i}) = \inf_\alpha v_p(a_\alpha)$

Démonstration. On applique le résultat précédent en observant que le principe de q développement appliqué en $Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)$ et en $\mathbf{x}^{univ}$ dit que pour une forme f, on a:

$$p|f \leftrightarrow p|(f\,|_{Tate_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q)}) \leftrightarrow p|(f\,|_{\mathbf{x}^{univ}}).$$

RÉFÉRENCES.

[Ba] D. Barsky, *Sur la norme des séries d'Iwasawa*, Groupe d'étude ultramétrique, **10 ème année** expo. 13, 44 p.

[Co] J. Coates, *On p-adic L functions*, sém. Bourbaki **701** (1988), *astérisque* **177-178** (1989).

[D] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, proceedings of symp. math. in pure Math. **33** (1979), 313-346.

[F] W B. Ferrero and L. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. Math. **109** (1979), 377-395.

[G1] R. Gillard, *Fonctions L p-adiques des corps quadratiques imaginaires et de leurs extensions abéliennes*, J. reine ang. Math. **358** (1985), 76-91.

[G2] R. Gillard, *Relations monomiales entre périodes p-adiques*, Inv. Math. **93** (1988), 355-381.

[H] H. Hida, *On p-adic L- functions of $GL(2) \times GL(2)$ over totally real fields*, preprint.

[HT] H. Hida and J. Tilouine, *Anticyclotomic Katz p-adic L functions and congruence modules*, à paraître.

[I1] Iwasawa K, *On Γ-extensions of algebraic number fields,*, Bull. Am. Math. Soc. **65** (1959), 183-226.

[I2] Iwasawa K, *On the μ invariant of $\mathbb{Z}_l$-extensions in Number Theory*, algebraic geometry and commutative algebra, Kinokonuya Tokyo (1973), **1-11**.

[K1] N. M. Katz, *Serre-Tate local moduli,*, In "Surfaces algébriques", Lec. Notes in Math. **868**, 138-202, Springer 1978.

[K2] N. M. Katz, *p-adic L- functions for CM fields*, Invent. Math. **49** (1978), 199-297.

[K3] N. M. Katz, *p-adic L- functions, Serre-Tate local moduli and ratio of solutions of differential equations*, Proc. Int. Congress Math. Helsinki (1978), 365-371.

[K4] N. M. Katz, *Another look at p-adic L -functions for totally real fields*, Math. Ann. **255** (1981), 33-43.

[Sc] L. Schneps, *On the μ-invariant of p-adic L-functions attached to Elliptic curves with complex multiplication*, J. Nb. Th. **25** (1987), 20-33.

[Si] W Sinnott, *On the μ-invariant of the Γ-transform of a rational function*, Inv. Math. **75** (1984), 273-282—.

Université de Grenoble-I (UJF)
Laboratoire de Mathématiques
associé au C.N.R.S.
Institut Fourier, BP 74
F-38402 Saint-Martin-d'Hères.