

JEAN-PIERRE BOREL

## Sur une suite de fonctions liées à un procédé itératif - II

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 5, n° 2 (1993),  
p. 235-261

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1993\\_\\_5\\_2\\_235\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_2_235_0)

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur une suite de fonctions liées à un procédé itératif - II

par JEAN-PIERRE BOREL

Dans l'étude de la discrédance de suites auto-similaires apparaît une famille particulière de fonctions, dont la connaissance des valeurs extrêmes joue un grand rôle. Le but de ce travail est de décrire avec précision certaines de ces fonctions, par un procédé lié aux substitutions. Cela permet d'estimer, pour ces fonctions, les valeurs extrêmes, ainsi que les points où elles sont atteintes. On en déduit une estimation de la discrédance de la suite en question.

L'outil principal utilisé est une méthode de représentation symbolique de certaines fonctions affines par morceaux, de pente constante. On représente ces fonctions à l'aide de mots sur un alphabet fini, chacune des lettres représentant une partie de la représentation graphique de la fonction. Cette méthode n'est présentée ici que pour des fonctions particulières, sa généralisation fera l'objet d'une publication ultérieure.

### 1. Présentation du problème

#### 1.1

Dans tout ce qui suit,  $\alpha = 2 - \sqrt{2}$  et  $\beta = 1 - \alpha = \sqrt{2} - 1$ . Dans [Bor1], section 1, chapitre III, j'ai introduit les fonctions  $f_0$  et  $f_1$ , définies de  $(-\beta, \alpha)$  dans lui-même. Les valeurs extrêmes de l'intervalle ne jouant aucun rôle, je ne préciserai pas s'il est ouvert ou fermé. En fait, il est commode dans tout ce travail de considérer une fonction à travers sa représentation graphique et en y ajoutant des segments verticaux correspondant aux sauts en chaque point de discontinuité. Le saut aux bornes - entre  $f(\alpha - 0)$  et  $f(-\beta + 0)$  - est, par convention, mis à la fin de l'intervalle.

$$(1) \quad \begin{cases} f_0(x) & := & \{\beta + (3 + \beta)x\} - \beta, \\ f_1(x) & := & \{\beta - (2 + \beta)x\} - \beta. \end{cases}$$

---

Manuscrit reçu le 30 octobre 1991.

Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

## 1.2

Soit  $\mathcal{A}$  un alphabet (c'est-à-dire un ensemble) fini et  $\mathcal{A}^*$  l'ensemble des suites finies, ou mots,  $a_1 a_2 \cdots a_j$  avec  $a_i \in \mathcal{A}$ . On notera alors, notation reprise par la suite :

$$\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots a_j, \quad |\mathbf{a}| =: j.$$

Si  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ , à chaque mot fini  $\mathbf{a}$  (les mots seront toujours écrit en gras par la suite) on associe la fonction de  $(-\beta, \alpha)$  dans lui-même :

$$(2) \quad f_{\mathbf{a}} := f_{a_j} \circ f_{a_{j-1}} \circ \cdots \circ f_{a_1}.$$

## 1.3

On note  $\mathbf{e}$  le mot vide de  $\mathcal{A}^*$ , et si  $\mathbf{a}$  est un mot fini, on lui associe deux de ses préfixes (un préfixe est un début  $a_1 a_2 \cdots a_i$ ,  $i \leq j$ ) par :

$$(3) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}^0 \bullet = \mathbf{a}^1 \bullet 0 \mathbf{1}_k$$

ce qui signifie que :

$\mathbf{a}^0$  est le préfixe de longueur  $j - 1$  de  $\mathbf{a}$  (on enlève la dernière lettre à droite) ;

$\mathbf{a}^1$  est le préfixe obtenu après les deux opérations suivantes :

on enlève tous les 1 à droite de  $\mathbf{a}$

puis on enlève les deux dernières lettres à droite de ce qui reste.

$\mathbf{a}^0$  et  $\mathbf{a}^1$  sont donc des préfixes stricts de  $\mathbf{a}$ , et donc la relation suivante permet de définir récursivement sur la longueur de  $\mathbf{a}$  la famille de fonctions  $F_{\mathbf{a}}$  :

$$(4) \quad \begin{cases} F_{\mathbf{e}} := Id \\ F_{\mathbf{a}} := \beta F_{\mathbf{a}^0} + \alpha F_{\mathbf{a}^1} + (-1)^{|\mathbf{a}|_0} f_{\mathbf{a}} \quad \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

avec  $|\mathbf{a}|_0 := \sum_{a_i=0} 1$ , nombre de fois où la lettre 0 apparaît dans le mot  $\mathbf{a}$ .

Si  $\mathbf{a} = 1^k$  (mot de longueur  $k$  n'ayant que des 1) ou  $\mathbf{a} = 01^k$ ,  $\mathbf{a}^1$  n'est pas défini et  $F_{\mathbf{a}^1}$  doit être remplacé par 0.

## 1.4

Soit  $M_{\mathbf{a}}$  la borne supérieure des  $|F_{\mathbf{a}}(x)|$ ,  $x$  décrivant  $(-\beta, \alpha)$ . Les quantités  $M_{\mathbf{a}}$  jouent un rôle dans l'évaluation de la discrédance d'une certaine

suite auto-similaire  $U$ . Plus précisément (voir [Bor1] p. 84, proposition 10), quel que soit  $n \geq 1$  :

$$(5) \quad L(U) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N^*(U)}{\log N} \leq \frac{M_n}{\log \frac{1}{\gamma_n}}$$

où  $D_N^*(U)$  désigne la discrédance à l'origine de cette suite  $U$ ,  $\gamma_n$  est une quantité qui se calcule assez facilement, et  $M_n$  le maximum des  $M_{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{a}$  décrivant une famille finie de mots.

### 1.5

Des renseignements sur les fonctions  $F_{\mathbf{a}}$  sont fournis par le théorème 5.6, p. 82, de [Bor1]. Il est facile de calculer, à l'aide des relations (1) (2) et (4), les fonctions  $F_{\mathbf{a}}$  sur ordinateur, et donc d'évaluer une valeur approchée de  $M_{\mathbf{a}}$  pour un mot  $\mathbf{a}$  de longueur raisonnable, ainsi que de les tracer. Par exemple :

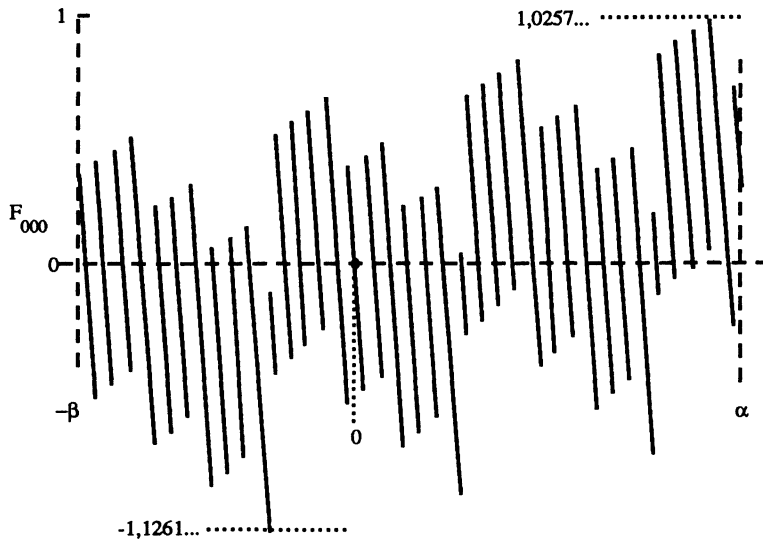


Figure 1

Le but de ce travail est de comprendre la structure de ces fonctions, très irrégulières comme le montre la représentation graphique ci-dessus, mais représentant cependant une certaine structure générale (répétition de blocs semblables).

## 2. Les fonctions $F_k$

### 2.1

Des raisons heuristiques que je ne détaillerai pas ici conduisent à penser que ce sont les mots ne comprenant que des 0 qui sont déterminants dans la majoration (5), plus précisément à la conjecture :

$$(6) \quad \inf_{n \geq 1} \frac{M_n}{\log \frac{1}{\gamma_n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_{\mathbf{b}_k}}{(k+1) \log \frac{1}{\alpha}}$$

où  $\mathbf{b}_k = 0^k$  est le mot de longueur  $k$  n'ayant que des 0.

### 2.2

Dans ce qui suit, et pour simplifier les notations, je poserai  $f_k := f_{\mathbf{b}_k} = f_0^{(k)}$  (itéré  $k$  fois de  $f_0$ ),  $F_k := F_{\mathbf{b}_k}$  et  $M_k := M_{\mathbf{b}_k}$ .

De (3) on déduit que  $\mathbf{b}_{k-1}^0 = \mathbf{b}_{k-1}$  et  $\mathbf{b}_k^1 = \mathbf{b}_{k-2}$ , et donc (4) devient :

$$(7) \quad \begin{cases} F_0 = Id \\ F_1 = \beta Id - f_0 \\ F_k = \beta F_{k-1} + \alpha F_{k-2} + (-1)^k f_0^{(k)} \quad \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

### 2.3

La fonction  $F_k$  est donc affine par morceaux, chaque morceau ayant la même pente  $P_k$ , la suite  $(P_k)$  étant déterminée par :

$$(8) \quad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = -3 \\ P_k = \beta P_{k-1} + \alpha P_{k-2} + (-1)^k (3 + \beta)^k. \end{cases}$$

### 2.4

On dira donc que  $F$  est affine par morceau de "pente constante". Une méthode de description de ce type de fonctions conduit alors au résultat suivant :

**THÉORÈME 1.** *On a :*

$$\begin{aligned} \sup F_k &= \frac{3}{14}k + \frac{609 - 24\sqrt{2}}{980} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{49}(-1)^k + O((2 - \sqrt{2})^k) \\ \inf F_k &= -\frac{3}{14}k - \frac{133 - 12\sqrt{2}}{196} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{28}(-1)^k + O((2 - \sqrt{2})^k). \end{aligned}$$

et il peut être précisé en quels points ces extrema sont approchés (voir [Bor2]). Ce théorème montre que l'estimation (24) p. 88 de [Bor1] est optimale, puisqu'avec les notations utilisées alors, on a  $(a^+ - a^-)\delta = \frac{3}{7}$ .

### 3. Une méthode de description de fonctions affines par morceaux

#### 3.1

Il est clair que pour caractériser une fonction  $F$  affine par morceaux, définie par exemple sur  $(-\beta, \alpha)$ , il suffit de se donner par exemple  $F(-\beta)$ , puis la longueur de chacun des morceaux, leur pente, et l'amplitude des sauts. Il suffit en fait que la longueur de chacun des morceaux soit connue à un facteur multiplicatif près, puisque la somme de ces longueurs vaut 1.

Si  $F$  est affine par morceaux de pente constante  $P$ , il suffit donc de connaître :

- $F(-\beta)$  (sinon  $F$  est connu à une translation près),
- la longueur des morceaux, à un facteur près,
- l'amplitude des sauts.

#### 3.2

Considérons les trois symboles suivants  $u, w, \underline{w}$  :

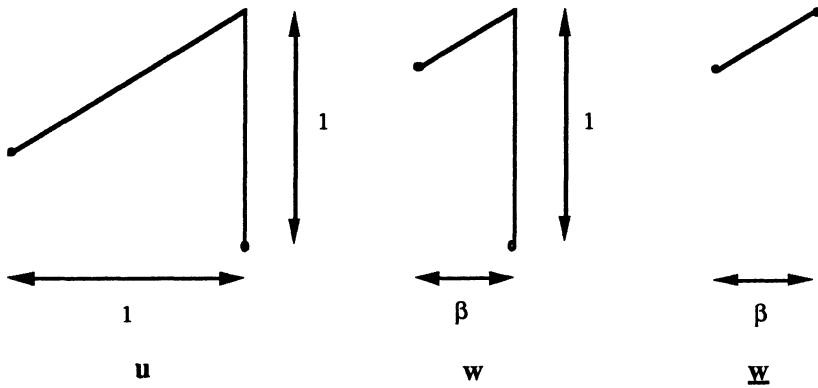


Figure 2

où l'échelle horizontale n'est pas précisée.

Soit  $\mathcal{B} = \{u, w, \underline{w}\}$  et  $\mathbf{p}$  un mot de  $\mathcal{B}^*$ . D'après 3.1, il existe une unique fonction  $F$  affine par morceaux sur  $(-\beta, \alpha)$ , de pente constante

$P$ , et représentée par le mot  $\mathbf{p}$  (unique à une translation près). On écrira alors  $F = [\mathbf{p}, P]$ . Par exemple :

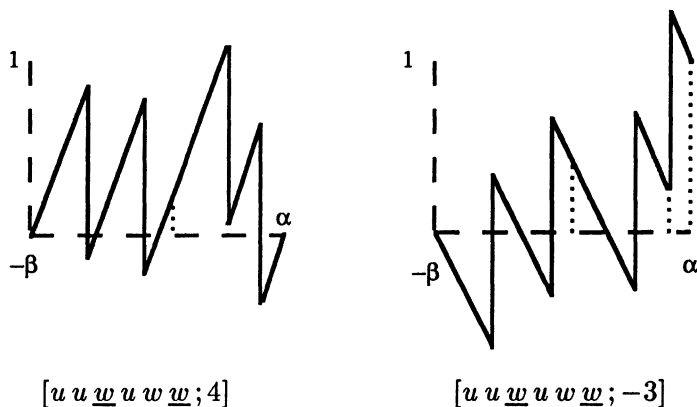


Figure 3

(une méthode analogue de représentation symbolique des fonctions  $f_a$  est exposée dans [Bor1]. Cette méthode est plus générale, voir [Bor3]).

### 3.3

Soit  $\rho$  la substitution définie sur l'ensemble des mots finis  $\mathcal{B}^*$  par :

$$u \mapsto uuu\underline{w}$$

$$w \mapsto u\underline{w}$$

$$\underline{w} \mapsto uw$$

et  $\mathbf{p}_k$  le mot  $\rho^k(u)$ .

On a donc :

$$\mathbf{p}_0 = u$$

$$\mathbf{p}_1 = uuu\underline{w}$$

$$\mathbf{p}_2 = uuu\underline{w}uuu\underline{w}uuu\underline{w}uw$$

etc...

**THÉORÈME 2.**  $F_k$  est la fonction sur  $(-\beta, \alpha)$  caractérisée par :

$$F_k(0) = 0$$

$$F_k = [\mathbf{p}_k, P_k]$$

**Démonstration.**  $F_k$  est affine par morceaux, de pente constante  $P_k$ . D'après le théorème 5.6 p. 82 de [Bor1], les sauts de  $F_k$  sont parmi ceux des  $f_0^{(j)}$ ,  $j \leq k$ . Or l'écriture symbolique de  $f_0^{(k)}$  obtenue dans [Bor1], p. 79-80, qui ne tient pas compte des sauts, est obtenue par itération  $k$  fois de la substitution :

$$\tau_0 : \begin{cases} \bar{u} \mapsto \bar{u}\bar{u}\bar{u}\bar{w} \\ \bar{w} \mapsto \bar{u}\bar{w}. \end{cases}$$

Il reste donc à préciser les sauts éventuels, et leur amplitude (-1, 0 ou 1 d'après le théorème 5.6 de [Bor1]). On a clairement :

$$\begin{aligned} F_0 &= [u, 1] \\ F_1 &= [uu\underline{w}, -3] \end{aligned}$$

et les sauts de  $F_k$  se déduisent de ceux de  $F_{k-2}$ ,  $F_{k-1}$  et  $f_0^{(k)}$  d'après (7). D'où l'étude des deux tableaux, qui traduisent des découpages successifs d'intervalles :

$k - 2$	$\bar{u}$													
$k - 1$	$\bar{u}$			$\bar{u}$				$\bar{u}$			$\bar{w}$			
$k$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$
				$a$				$a$					$a$	$b1$

Tableau 1

et

$k - 2$	$\bar{w}$					
$k - 1$	$\bar{u}$			$\bar{w}$		
$k$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$
				$a$		$b2$

Tableau 2

Un nouveau découpage dans l'écriture de  $F_k$  correspond à un saut de  $f_0^{(k)}$ , qui est donc d'amplitude -1.  $F_{k-2}$  et  $F_{k-1}$  n'ayant pas alors de saut,  $F_k$  a donc un saut d'amplitude  $(-1)^{k+1}$ .



Premier cas,  $\bar{u}$  :

LEMME 1. On a, pour tout  $k \geq 0$  :

$$P_k = (-1)^k \frac{11 + 5\beta}{14} (3 + \beta)^k + \frac{1}{7} + (-1)^{k-1} \frac{5\beta - 1}{14} \alpha^k$$

et en particulier  $P_k$  a le signe de  $(-1)^k$ .

**Démonstration.** D'après le théorème 5.6 de [Bor1], p. 82, la pente  $P_k$  de la fonction  $F_k = F_{\mathbf{b}_k}$  peut s'obtenir aussi à l'aide de la récurrence double :

$$(9) \quad \begin{cases} P_0 = 1, Q_0 = 1, \\ P_k = 1 + Q_{k-1} - 4P_{k-1}, \forall k \geq 1, \\ Q_k = -2P_{k-1} = [\alpha P_k], \forall k \geq 1. \end{cases}$$

On a alors, par un argument classique :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ P_k \\ Q_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  est diagonalisable, de valeurs propres  $-(3 + \beta)$ , 1 et  $(-\alpha)$ . L'écriture de  $P_k$  provient donc de l'écriture du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ P_k \\ Q_k \end{pmatrix} \text{ dans une base propre } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + \beta \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il est à noter que la formule donnant  $P_k$  peut se vérifier directement à l'aide de (8), avec un calcul laborieux...

Le signe de  $P_k$  s'obtient alors, ou découle du lemme 7 p. 82 de [Bor].  
□

Donc tout morceau  $\bar{u}$  dans  $F_k$  est suivi d'un saut d'amplitude 1 en valeur absolue et contraire à la pente, tous les  $\bar{u}$  sont donc des  $u$ .

Deuxième cas,  $\bar{w}$  provenant de  $\bar{u}$  :

c'est la situation des  $\mathbf{a}$  des tableaux 1 et 2. En ces points :

$f_0^{(k)}$  a un saut d'amplitude  $-\beta$  (signification de  $w$  et  $u$  pour  $f_0$ , voir [Bor1] p. 78),

$F_{k-1}$  a un saut d'amplitude  $(-1)^k$  d'après le premier cas,

$F_{k-2}$  n'a pas de saut.

Le saut de  $F_k$  vaut donc  $\beta \cdot (-1)^k + \alpha \cdot 0 + (-1)^k \cdot (-\beta) = 0$ , ce qui signifie qu'il n'y a pas de saut.  $\bar{w}$  est donc un  $\underline{w}$ .

Troisième cas,  $\bar{w}$  provenant de  $\bar{w}$  :

c'est la situation des  $b$  des tableaux 1 et 2. il s'agit donc de connaître la nature du  $\bar{w}$  qui le précède dans le tableau 1, ou des deux  $\bar{w}$  qui le précèdent dans le tableau 2.

Pour b1, on a :

$f_0^{(k)}$  a un saut d'amplitude  $-\beta$ .

$F_{k-1}$  n'a pas de saut d'après le deuxième cas.

$F_{k-2}$  a un saut d'amplitude  $(-1)^{k-1}$  d'après le premier cas.

Donc  $F_k$  a un saut de  $\beta \cdot 0 + \alpha \cdot (-1)^{k-1} + (-1)^k \cdot (-\beta) = (-1)^{k+1}$ , saut contraire à la pente. Le  $\bar{w}$  est donc un  $w$ .

Pour b2, il faut discuter en fonction de la nature du  $\bar{w}$  qui précède (rang  $k - 1$ ).

	c'est un $w$	c'est un $\underline{w}$
saut de $f_0^{(k)}$	$-\beta$	$-\beta$
saut de $F_{k-1}$	$(-1)^k$	0
saut de $F_{k-2}$	$s$	$s$
saut de $F_k$	$\beta(-1)^k + \alpha s + \beta(-1)^{k+1} = \alpha s$	$\alpha s + \beta(-1)^{k+1}$

Tableau 3

avec  $s \in \{-1, 0, 1\}$ , cf. [Bor1] p. 82.

Comme ce dernier saut est entier, on a donc  $s = 0$  si on a un  $w$ ,  $s = (-1)^{k+1}$  si on a un  $\underline{w}$ , et donc :

si au rang  $k - 1$ , on a un  $w$  alors  $F_k$  n'a pas de saut, on a un  $\underline{w}$  au rang  $k$  ;

si au rang  $k - 1$ , on a un  $\underline{w}$  alors  $F_k$  a un saut d'amplitude  $(-1)^{k+1}$ , on a un  $w$  au rang  $k$ .

Donc les tableaux 1 et 2 deviennent :

$k - 2$	$u$													
$k - 1$	$u$				$u$				$u$				$\underline{w}$	
$k$	$u$	$u$	$u$	$\underline{w}$	$u$	$u$	$u$	$\underline{w}$	$u$	$u$	$u$	$\underline{w}$	$u$	$w$

$k - 2$	$w$					
$k - 1$	$u$				$\underline{w}$	
$k$	$u$	$u$	$u$	$\underline{w}$	$u$	$w$

$k - 2$	$\underline{w}$					
$k - 1$	$u$				$w$	
$k$	$u$	$u$	$u$	$\underline{w}$	$u$	$\underline{w}$

Tableau 4

ce qui traduit exactement la substitution  $\rho$ . D'où le théorème. □

Il est possible de donner une représentation symbolique analogue à celle du théorème 2 pour les fonctions  $F_a$  en général. Je ne sais cependant pas le faire avec un alphabet de moins de 22 lettres (11 lettres qu'il faut dédoubler). Ce dernier travail est en cours de rédaction.

#### 4. Un système de numérotation lié aux fonctions $F_k$

##### 4.1

Les notations utilisées ici sont celles de Renyi, [Ren], qui a introduit ce type de système de numérotation. Soit  $f$  l'application de  $(0, 3 + \beta)$  dans  $(0, 1)$  définie par

$$f(x) = \frac{x}{3 + \beta}.$$

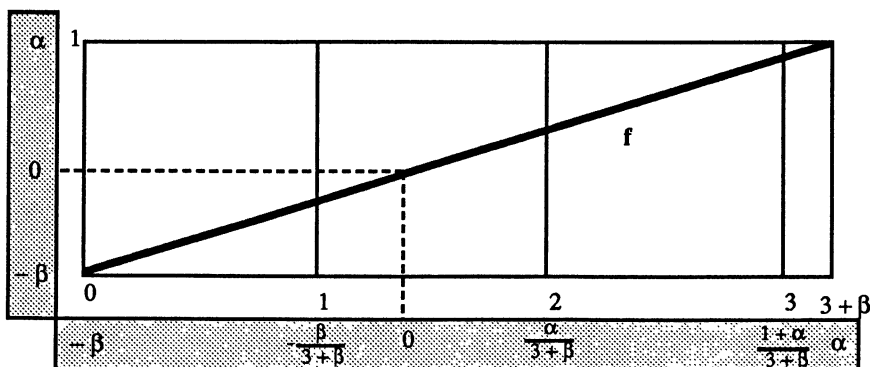


Figure 4

La numérotation associée est définie de la façon suivante : un nombre réel  $x$  aura pour développement la suite infinie d'entiers  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \cdots$  si :

$$x = f(\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 + f(\varepsilon_3 + \cdots)))$$

(un tel développement existe et est unique sauf pour un ensemble dénombrable de points, comme dans le cas des développements classiques : remplacer  $3 + \beta$  par 3 donne le développement classique en base 3). On notera alors  $x = [\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots]$  et  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots = D(x)$ .

### 4.2

Il est facile de voir que  $\varepsilon_i$  appartient à l'alphabet  $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, 3\}$ , mais que tous les mots infinis de  $\mathcal{C}^\infty$  ne sont pas possibles : par exemple,  $3 + f(3) = 3 + \frac{3}{3+\beta} > 1$ , et donc  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3$  est impossible (voir par exemple Parry, [Par] et Bertrand-Mathis, [Ber], pour des travaux de ce type).

**PROPOSITION 1.** *Soit  $\mathbf{d} = 3111 \cdots = 31^\omega$ . L'ensemble des développements est l'ensemble des mots  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^\infty$  tels que  $S^n \mathbf{x} \leq \delta$  (pour l'ordre lexicographique) pour tout  $n \geq 0$ , où  $S$  désigne le shift sur  $\mathcal{C}^\infty$ .*

**Démonstration.** C'est immédiat, puisque de  $\beta = \sqrt{2} - 1$ , on déduit  $f(1 + \beta) = \beta$ . Donc  $\mathbf{d}' = 1^\omega$  représente le nombre réel  $\beta$ , et  $31^\omega$  représente le nombre réel 1.  $\square$

L'ensemble des développements peut aussi être représenté, suivant un argument classique (Hofbauer, [Hof1, Hof2]) par l'ensemble des étiquettes des chemins infinis de l'automate suivant :

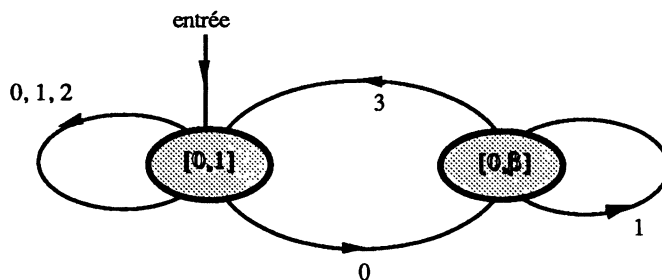


Figure 5

Ce système est lié à la substitution  $\bar{u} \mapsto \bar{u} \bar{u} \bar{u} \bar{w}$ ,  $\bar{w} \mapsto \bar{u} \bar{w}$  utilisée au paragraphe 3. On associe en effet à  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$  des intervalles de longueur  $\frac{1}{3+\beta}$

et  $\frac{\beta}{3+\beta}$  respectivement. La substitution correspond alors à la multiplication par  $3 + \beta$  (voir figure 4, partie en grisé).

**4.3**

Au système de numération défini en 4.1, il est classique d'associer la transformation  $T$  de  $(0, 1)$  dans lui-même, définie par :

$$(10) \quad x = f(\varepsilon + Tx)$$

c'est-à-dire ici :

$$T(x) = \{(3 + \beta)x\}.$$

Pas plus que précédemment, je ne m'occuperai de préciser la valeur de cette fonction là où il y a un saut. Les itérées  $T^k$  ont une représentation symbolique analogue à celles des  $F_k$ .

PROPOSITION 2.  $T^k$  est la fonction sur  $(0, 1)$  caractérisée par

$$T^k(0) = 0$$

$$T^k = [p'_k, (3 + \beta)^k]$$

où  $p'_k = \rho'^k(u')$ , avec  $\rho' : u' \mapsto u'u'u'w', w' \mapsto u'w',$  et  $u'$  et  $w'$  les symboles :

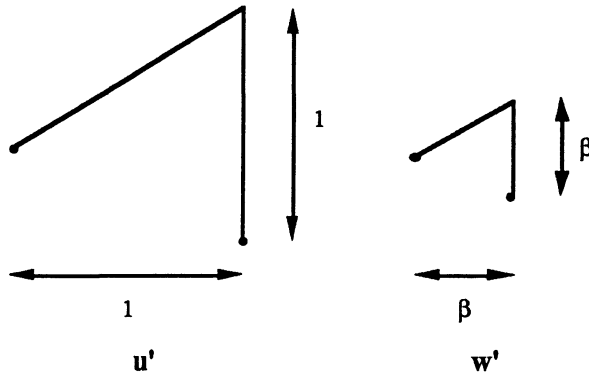


Figure 6

**Démonstration.**

Il est clair que  $T^k$  est affine par morceaux, de pente constante  $(3 + \beta)^k$ . D'autre part,  $T$  est liée à  $f_0$  par la relation  $f_0(x) + \beta = T(x + \beta)$ , et donc  $f_0$  et  $T$  ont même description symbolique sur leurs intervalles de définition respectifs, et donc leurs itérées aussi. Le résultat (presque immédiat à voir directement) peut donc aussi se déduire de [Bor1], p. 78-79.  $\square$

4.4

Soit  $(G_k)_{k \geq 0}$  la suite de fonctions définie sur  $(0, 1)$  par :

$$G_k(x) := \sum_{j=0}^k (-1)^j T^j x.$$

Il est alors immédiat que  $G_k(x) = x - G_{k-1}(Tx)$ , et que les maximum et minimum de  $G_k$  sont atteints respectivement en  $x_k^+$  et  $x_k^-$ , donnés par :

$$\begin{aligned} \text{si } k \text{ pair, } k = 2p, p \geq 1 : \quad & x_k^+ := [(30)^{p-1}310^\omega], \quad x_k^- := [(03)^p0^\omega], \\ \text{si } k \text{ impair, } k = 2p + 1 : \quad & x_k^+ := [(30)^p30^\omega], \quad x_k^- := [(03)^p10^\omega], \end{aligned}$$

avec  $x_0^- = 0 = [0^\omega]$  et  $x_0^+ = 1 = [\mathbf{d}] = [31^\omega]$ . Si on définit :

$$m^+ := [(30)^\omega] = \frac{3}{3 + \beta} \sum_{n=0}^{+\infty} (3 + \beta)^{-(2n+1)} = 0,96112\dots$$

$$m^- := [(03)^\omega] = \frac{3}{3 + \beta} \sum_{n=0}^{+\infty} (3 + \beta)^{-2n} = 0,28150\dots$$

alors  $m^+ = Tm^-$  et  $m^- = Tm^+$ , et :

$$x_k^+ = m^+ + O((3 + \beta)^{-k}), \quad G_k(x_k^+) = G_k(m^+) + O(1) = \frac{3k}{2(4 + \beta)} + O(1),$$

$$x_k^- = m^- + O((3 + \beta)^{-k}), \quad G_k(x_k^-) = G_k(m^-) + O(1) = -\frac{3k}{2(4 + \beta)} + O(1).$$

Une version faible du théorème 1 s'obtient alors facilement, en considérant les fonctions  $F_k'' := F_k' \circ T$ . On a alors  $F_k'' = [\mathbf{p}_{k+1}, (3 + \beta)p_k]$

et  $F_k''(0) = 0$ . On montre que la suite de fonctions  $(F_k' - \frac{4+\beta}{7}G_k)$  est uniformément bornée sur l'intervalle  $(0, 1)$ , d'où l'on déduit l'estimation :

$$\begin{aligned} \sup F_k &= \frac{3}{14}k + O(1), \\ \inf F_k &= -\frac{3}{14}k + O(1). \end{aligned}$$

Une preuve détaillée de ces résultats se trouve dans [Bor2].

### 5. Localisation des extrema des fonctions $F_k$

#### 5.1

**DÉFINITION.** La fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $\pi$ -pointue ( $\pi > 0$ ) s'il existe dans l'adhérence du graphe de  $f$ , c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble  $\{(x, f(x)), x \in I\}$ , deux points  $(x_-, m_-)$  et  $(x_+, m_+)$  tels que :

$$\forall x \in I, m_- + |x - x_-|\pi \leq f(x) \leq m_+ - |x - x_+|\pi.$$

Cela signifie que la représentation graphique de  $f$  est contenue dans le polygone dont les côtés inclinés sont de pente  $\pm\pi$  (figure 7). Il est en particulier clair que :

$$\begin{aligned} m_+ &= \max f(x) \in \{f(x_+), f(x_+ + 0), f(x_+ - 0)\}, \\ m_- &= \min f(x) \in \{f(x_-), f(x_- + 0), f(x_- - 0)\}, \end{aligned}$$

ces extrema n'étant approchés qu'au voisinage de ces points.

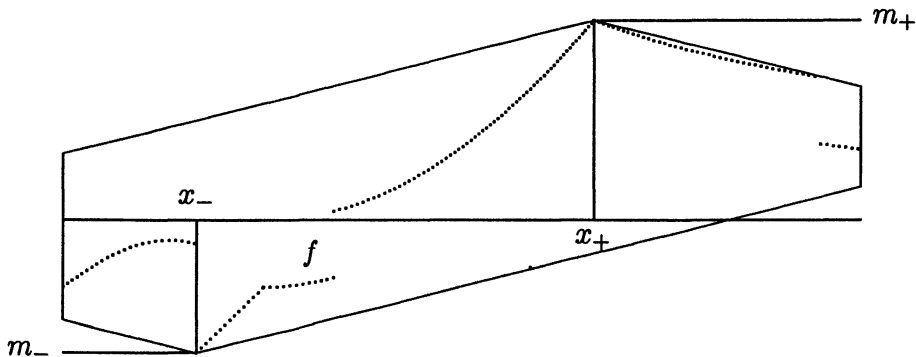


Figure 7

5.2

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On notera alors :

$$S(x) := T(x + \beta) - \beta = \{(3 + \beta)(x + \beta)\} - \beta = \{(3 + \beta)x + \beta\} - \beta ;$$

$$A(x) := [(3 + \beta)(x + \beta)] - 1.$$

$S$  et  $A$  sont donc à valeurs dans  $(-\beta, \alpha)$  et  $\mathbb{Z}$  respectivement.

Soit  $f$  définie sur  $(-\beta, \alpha)$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux paramètres réels. On définit sur l'intervalle  $(-\beta, \alpha)$  la fonction  $R_{\lambda, \mu} f$  comme étant la restriction de la fonction :

$$(11) \quad \tilde{R}_{\lambda, \mu} f(x) := -f(S(x)) + \lambda \left( x - \frac{A(x)}{3 + \beta} \right) + \mu A(x)$$

définie sur l'intervalle  $(-\beta, \frac{\alpha+2}{3+\beta})$  image réciproque de  $\{-1, 0, 1, 2\}$  par  $A$ , et qui contient l'intervalle  $(-\beta, \alpha)$  strictement.

LEMME 2. Soit  $\lambda, \mu > 0$ . Si  $\pi' := (3 + \beta)\mu - \lambda$  est strictement positif,  $f$   $\pi$ -pointue entraîne  $\tilde{R}_{\lambda, \mu} f$   $\pi''$ -pointue, avec  $\pi'' := \min\{(3 + \beta)\mu, (3 + \beta)\pi - \lambda\}$ . On a alors :

$$x''_+ = \frac{\alpha + 1 + x_- + \beta}{3 + \beta}, \quad m''_+ = -m_- + \lambda \frac{x_-}{3 + \beta} + 2\mu,$$

$$x''_- = -\beta + \frac{x_+ + \beta}{3 + \beta}, \quad m''_- = -m_+ + \lambda \frac{x_+}{3 + \lambda} - \mu.$$

**Démonstration.** (Un résultat analogue peut être obtenu lorsque les signes de  $\lambda$  et  $\mu$  sont quelconques). Sur l'intervalle  $(\frac{\alpha+1}{3+\beta}, \frac{\alpha+2}{3+\beta})$ , on a  $A(x) = 2$ , et donc sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\lambda, \mu} f(x) &= -m_- + \lambda \frac{x_-}{3 + \beta} + 2\mu - (f(S(x)) - m_-) + \lambda \left( x - \frac{2}{3 + \beta} - \frac{x_-}{3 + \beta} \right) \\ &\leq -m_- + \lambda \frac{x_-}{3 + \beta} + 2\mu - |S(x) - x_-| \pi + \lambda \left| x - \frac{2 + x_-}{3 + \beta} \right|. \end{aligned}$$

Or  $x_- = S(x''_+)$ ,  $x''_+$  antécédent unique sur cette intervalle. D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\lambda, \mu} f(x) &\leq -m_- + \lambda \frac{x_-}{3 + \beta} + 2\mu - |S(x) - S(x''_+)| \pi + \lambda |x - x''_+| \\ &\leq -m_+ + \lambda \frac{x_-}{3 + \beta} + 2\mu - ((3 + \beta)\pi - \lambda) |x - x''_+| \\ &= m''_+ - ((3 + \beta)\pi - \lambda) |x - x''_+| \\ &\leq m''_+ - \pi'' |x - x''_+|. \end{aligned}$$



Comme quand  $x$  s'approche (du bon côté) de  $x_+''$ ,  $S(x)$  s'approche de  $x_-$  et donc  $\tilde{R}_{\lambda,\mu}f(x)$  tend vers  $m_+''$ , on a bien une inégalité du type cherché.

Pour les autres intervalles, il suffit de remarquer que le graphe de  $\tilde{R}_{\lambda,\mu}f$  est invariant par translation de vecteur  $(\frac{1}{3+\beta}, \mu)$ , de pente  $(3+\beta)\mu$ .

La démonstration est analogue pour  $x_-''$  et  $m_-''$ .  $\square$

**PROPOSITION 3.** *Soit  $\rho > 0$  donné. On suppose que  $f$  définie sur  $(-\beta, \alpha)$  vérifie :*

$$(12) \quad \begin{cases} f \text{ est } \rho\text{-pointue,} \\ x_- \leq -\frac{\beta}{3+\beta}. \end{cases}$$

*Pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  tel que  $\rho \leq (3+\beta)\mu$  et  $\rho \leq (3+\beta)\rho - \lambda$ , la fonction  $R_{\lambda,\mu}f$  vérifie aussi (12).*

**Démonstration.**  $\tilde{R}_{\lambda,\mu}f$  est  $\rho$ -pointue d'après le lemme, puisqu'il est clair que  $\rho \leq \pi''$  et  $\pi$ -pointue entraînent  $\rho$ -pointue. D'après le lemme 2, on a de plus :

$$\begin{aligned} x_-'' &= -\beta + \frac{x_+ + \beta}{3+\beta} \leq -\beta + \frac{1}{3+\beta} = \frac{-\beta}{3+\beta}, \\ x_+'' &= \frac{2+x}{3+\beta} < \frac{2}{3+\beta} = \alpha, \text{ car } x_- < 0. \end{aligned}$$

Les extrema de  $\tilde{R}_{\lambda,\mu}f$  sont donc à l'intérieur de l'intervalle  $(-\beta, \alpha)$ . Ce sont donc ceux de  $\tilde{R}_{\lambda,\mu}f$ , qui est donc  $\rho$ -pointue.  $\square$

### 5.3

La notion de  $\rho$ -pointue et les transformations  $R_{\lambda,\mu}$  peuvent être utilisées pour l'étude des extrema des fonctions  $F_k$ .

**LEMME 3.**

*Pour tout  $k \geq 0$ ,  $F_{k+1} = R_{\lambda,\mu}F_k$ , avec  $\lambda = \lambda_k = \frac{4+\beta}{7} + (-1)^{k-1} \frac{4-6\beta}{14} \alpha^k$  et  $\mu = \mu_k = \frac{\lambda_k}{3+\beta}$ .*

**Démonstration.** Sur l'intervalle  $(\frac{-\beta}{3+\beta}, \frac{\alpha}{3+\beta})$ ,  $F_{k+1}$  a la même représentation symbolique que  $F_k$  sur  $(-\beta, \alpha)$  : cela provient du théorème 2 et de la substitution  $\rho$  permettant de passer de  $\mathbf{p}_k$  à  $\mathbf{p}_{k+1}$ .

Si  $x$  est dans cet intervalle et  $N_k = N_k(x)$  est le nombre de sauts de  $F_{k+1}$ , la variable allant de 0 à  $x$ , on a alors :

$$F_{k+1}(x) = P_{k+1}.x + (-1)^k N_k, \text{ (pente } P_{k+1}, \text{ sauts de } (-1)^k),$$

$$F_k((3 + \beta)x) = P_k.(3 + \beta)x + (-1)^{k+1} N^k, \text{ (sauts de } (-1)^{k+1}),$$

ce qui donne en éliminant  $N_k$  :

$$F_{k+1}(x) = (P_{k+1} + (3 + \beta)P_k)x - F_k((3 + \beta)x)$$

$$= -F_k((3 + \beta)x) + \lambda_k x$$

en utilisant l'expression de  $P_k$  obtenue au lemme 1. Cette dernière égalité n'est autre que (11) sur cet intervalle, où  $S(x) = (3 + \beta)x$  et  $A(x) = 0$ .

Il reste à démontrer que l'on a  $F_{k+1}(x + \frac{1}{3+\beta}) = F_{k+1}(x) + \mu_k$  pour tout  $x$  entre  $-\beta$  et  $\alpha - \frac{1}{3+\beta}$ .

Comme

$$p_{k+1} = \rho^{k+1}(u) = \rho^k(uuu\underline{w}) = \rho^k(u)\rho^k(u)\rho^k(u)\rho^k(\underline{w}) = p_k p_k p_k q_k$$

où  $q_k$  est un "préfixe" de  $p_k$ , il est clair qu'une telle constante  $\mu_k$  existe et correspond à la variation de  $F_{k+1}$  sur un intervalle semi-ouvert de longueur  $\frac{1}{3+\beta}$ .

La pente de  $F_{k+1}$  est  $P_{k+1}$ , et il y a une contribution des sauts  $P_k$  sur un tel intervalle : cette contribution est l'opposée de celle des sauts de  $F_k$  sur  $]-\beta, \alpha]$ , qui vaut  $-P_k$ . On a donc :

$$\mu_k = \frac{P_{k+1}}{3 + \beta} + P_k = \frac{\lambda_k}{3 + \beta}. \quad \square$$

On peut noter que  $\lambda_k = \gamma_{k+1}$ , où les  $\gamma_k$  sont ceux utilisés dans [Bor2], proposition 3.

PROPOSITION 4. Pour tout  $k \geq 0$ , la fonction  $F_k$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_k \text{ est } \rho\text{-pointue, } \rho = \frac{2}{5}, \\ -\beta \leq x_- < -\frac{\beta}{3 + \beta} < \frac{\alpha + 1}{3 + \beta} < x_+ \leq \alpha. \end{array} \right.$$

**Démonstration.** Le résultat est clair pour  $F_0$ , qui est 1-pointue avec  $x_{0,-} = -\beta$  et  $x_{0,+} = \alpha$ . On procède alors par récurrence sur  $k$ . On obtient immédiatement pour  $k \geq 0$ ,

$$\rho = 0,400 < 0,4142\dots = \beta = \lambda_0 \leq \lambda_k \leq \lambda_1 = 0,757\dots < \rho(2 + \beta) = 0,965\dots$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lambda_k < \rho(2 + \beta) &\Rightarrow \rho < (3 + \beta)\rho - \lambda_k \\ \lambda_k > \rho &\Rightarrow \rho < (3 + \beta)\rho_k \end{aligned}$$

et  $\rho < \min\{(3 + \beta)\rho - \lambda_k, (3 + \beta)\mu_k\}$ . Donc  $F_k$   $\rho$ -pointue entraîne  $\tilde{R}_{\lambda,\mu} F_k$   $\rho$ -pointue. Les hypothèses faites sur  $x_-$  et  $x_+$  permettent aussi d'utiliser le corollaire, et donc  $F_{k+1} = R_{\lambda,\mu} F_k$  a bien les propriétés demandées.  $\square$

Pour tout  $k \geq 0$ , on a donc :

$$x_{k+1,-} = \frac{x_{k,+} + \beta}{3 + \beta} - \beta, \quad x_{k+1,+} = \frac{2 + x_{k,-}}{3 + \beta}$$

avec  $x_{0,-} = -\beta$ ,  $x_{0,+} = \alpha$ . On en déduit en particulier que :

$$(13) \quad x_{k,+} = x_k^+ - \beta, \quad x_{k,-} = x_k^- - \beta.$$

D'autre part, comme les sauts de  $F_k$  sont d'amplitude  $(-1)^{k+1}$ , d'après la représentation symbolique du théorème 2, on a :

$$(14) \quad m_{k,-} = \begin{cases} F_k(x_{k,-} + 0) & \text{pour } k \text{ pair,} \\ F_k(x_{k,-} - 0) = F_k(x_{k,-} + 0) - 1 & \text{pour } k \text{ impair,} \end{cases}$$

$$m_{k,+} = \begin{cases} F_k(x_{k,+} - 0) & \text{pour } k \text{ pair,} \\ F_k(x_{k,+} + 0) = F_k(x_{k,+} - 0) + 1 & \text{pour } k \text{ impair.} \end{cases}$$

## 6. Démonstration du théorème 1

### 6.1

Considérons les symboles  $u, w, \underline{w}$  définis au paragraphe 3, ainsi que les trois nouveaux symboles :

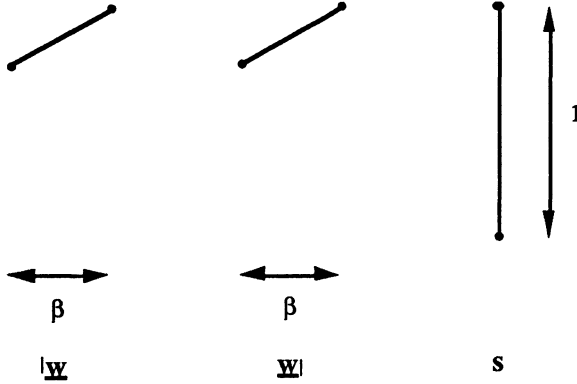


Figure 8

$(\underline{w}|$  et  $|\underline{w}$  sont donc des copies de  $w$ , et  $s$  peut être considéré comme la fin d'un  $u$ ), et la substitution  $\sigma$  définie sur l'alphabet  $\{u, w, \underline{w}, \underline{w}|, |\underline{w}, s\}$  par :

$$\begin{aligned} u &\mapsto uu\underline{w} & \underline{w}| &\mapsto u\underline{w}| \\ w &\mapsto u\underline{w} & |\underline{w} &\mapsto s\underline{w} \\ \underline{w} &\mapsto u\underline{w} & s &\mapsto |\underline{w}. \end{aligned}$$

**THÉORÈME 3.** *Le trajet symbolique  $\sigma^{k-1}(s\underline{w}|)$  relie les points  $(x_{k,-}, m_{k,-})$  et  $(0, 0)$  si on prend comme unité horizontale  $(3 + \beta)^{-k}$ , pour tout  $k \geq 1$ .*

**Démonstration.** Ce trajet est nécessairement une partie de la représentation totale de  $F_k$ . Cela justifie l'échelle horizontale  $(3 + \beta)^{-k}$ . Il s'agit de préciser le début et la fin de cette partie.

La fin de ce trajet est la plus aisée à déterminer : 0 se trouve à l'intérieur d'un symbole  $u$  (c'est le cas pour  $F_0$ ), dont on ne doit garder que le début, noté  $|\underline{w}$ . Le passage de  $k$  à  $k + 1$  transforme ce  $u$  en  $uu\underline{w}$ , et le partie  $|\underline{w}$  en  $u\underline{w}|$  (voir en 4.2).

Le début est plus délicat, puisque  $x_{k,-}$  varie avec  $k$ . On utilise alors (13) et les développements données au paragraphe 4.4, qui entraînent :

$$\begin{aligned} x_{k+1,-} &= x_{k,-} + \frac{1}{(3 + \beta)^{k+1}} \quad (k \text{ pair}) \\ &= x_{k,-} + \frac{\beta}{(3 + \beta)^{k+1}} \quad (k \text{ impair}). \end{aligned}$$

On vérifie tout d'abord que le trajet symbolique reliant  $(x_{1,-}, m_{1,-})$  à  $(0, 0)$  est  $s\underline{w}|$ , ce qui est immédiat.

Si le trajet reliant  $(x_{2p+1,-}, m_{2p+1,-})$  à  $(0, 0)$  commence par  $sw$ , ou  $s\underline{w}$  ce qui est identique :

- il est précédé dans le mot  $\mathbf{p}_k$  représentant  $F_k$  par un  $u$  ;
- on a alors, au rang suivant,  $w \mapsto \underline{uw}$  et  $u \mapsto \underline{uuw}$  :

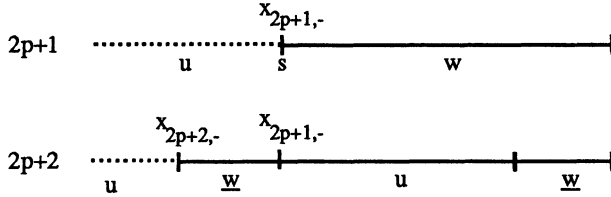


Figure 9

et  $x_{2p+2,-} = x_{2p+1,-} - \frac{\beta}{(3+\beta)^{k+1}}$ , il y a donc exactement la longueur d'un  $w$  entre  $x_{2p+2,-}$  et  $x_{2p+1,-}$ . D'après (14),  $m_{2p+2,-} = F_{2p+2}(x_{2p+2,-} - 0)$ , et donc il ne faut pas rajouter de saut. Donc :  $sw$  devient  $\underline{uwuw}$ , que l'on peut décomposer en  $s \mapsto \underline{w}$  et  $w \mapsto \underline{uw}$ .

Si le trajet reliant  $(x_{2p,-}, m_{2p,-})$  à  $(0, 0)$  commence par  $\underline{w}$  :

- il est précédé par une lettre  $u$  dans le mot  $\mathbf{p}_k$  ;
- au rang suivant  $\underline{w}$  est transformé en  $uw$  (car  $\underline{w}$  est identique à  $\underline{w}$ ), et :

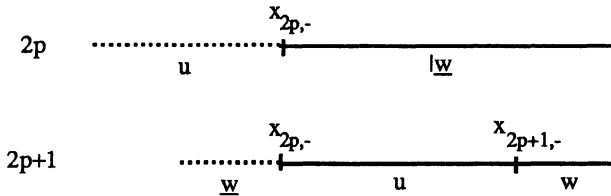


Figure 10

(puisque  $x_{2p+1,-} = x_{2p,-} + \frac{1}{(3+\beta)^{2p}}$ , il y a exactement la longueur d'un  $u$  entre les deux). Dans le trajet concerné, on démarre donc après le  $u$ . D'après (14), il faut inclure un saut puisque  $m_{2p,-} = F_{2p}(x_{2p,-}) - 1$ . Ce saut correspond à la lettre  $s$  qui apparaît effectivement comme la fin d'un  $u$ . Donc  $\underline{w}$  a généré en fait  $sw$ .

Ceci rend la récurrence complète, et donne le résultat annoncé compte tenu des images de  $s$  et  $\underline{w}$  obtenues.  $\square$

6.2

On déduit de ce résultat des estimations asymptotiques de  $m_{k,-}$  et  $m_{k,+}$ .

COROLLAIRE 1.  $m_{k,-} = \frac{3}{14}k - \frac{133-12\sqrt{2}}{196} + \frac{1+2\sqrt{2}}{28}(-1)^k + O((2-\sqrt{2})^k)$ .

Démonstration. La substitution  $\sigma$  a pour matrice :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et si on note  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  respectivement le nombre de lettres  $u, \underline{w}, w, \underline{w}|, s, |\underline{w}$  dans le mot  $\sigma^{k-1}(s\underline{w}|)$ , on a

$$V_k := \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix} = M_\sigma^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base

$$\begin{pmatrix} 5+4\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5-4\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

la matrice  $M_\sigma$  devient

$$M'_\sigma = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de  $V_1$  dans cette base sont :

$$(a, b, c, d, e, f) := \left( \frac{12 + 11\sqrt{2}}{98}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-12 - 11\sqrt{2}}{98}, \frac{29}{196}, \frac{1}{14} \right).$$

Celles de  $V_k$  sont donc dans cette même base :

$$((2 + \sqrt{2})^{k-1}a, b, c, (2 - \sqrt{2})^{k-1}d, (-1)^{k-1}e + (-1)^k 3(k-1)f, (-1)^{k-1}f).$$

D'où les valeurs des  $k_i$ , le tableau devant être lu :

$$196.k1 = (56 + 14\sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2})^{k-1} + \dots$$

	$\times(2 + \sqrt{2})^{k-1}$	$\times(-1)^k(2 + \sqrt{2})^{k-1}$	$\times(k-1)$	$\times(-1)^k(k-1)$	$\times 1$	$\times(-1)^{k-1}$	$\times(2 - \sqrt{2})^{k-1}$
196.k1	$56 + 14\sqrt{2}$	-	-	-	-98	-14	$56 - 14\sqrt{2}$
196.k2	$-4 + 20\sqrt{2}$	-	-	42	-49	57	$-4 - 20\sqrt{2}$
196.k3	$-24 + 22\sqrt{2}$	-	-	-42	49	-1	$-24 - 22\sqrt{2}$
196.k4	-	-	-	-	196	-	-
196.k5	-	-	-	-	98	98	-
196.k6	-	-	-	-	98	-98	-

Tableau 5

On retrouve le fait évident que  $k_4$  vaut toujours 1,  $k_5 = 1$  ( $k$  impair) ou  $k_5 = 0$  ( $k$  pair) et le contraire pour  $k_6$ .

$F_k$  est de pente  $P_k$ , et les symboles  $u, \underline{w}, w, \underline{w}|, s, |\underline{w}$  correspondent à un couple (saut, distance horizontale) de  $(1, 1), (0, \beta), (1, \beta), (0, \beta), (1, 0), (0, \beta)$  respectivement. Il faut normaliser les sauts par  $(-1)^{k+1}$  et la distance horizontale par  $(3 + \beta)^{-k}$ . On a donc :

$$0 - m_{k,-} = \frac{P_k(k1 + (\sqrt{2} - 1)(k2 + k3 + k4 + k6))}{(2 + \sqrt{2})^k} + (-1)^{k+1}(k1 + k3 + k5).$$

Du lemme 1, on déduit :

$$\frac{P_k}{(2 + \sqrt{2})^k} = (-1)^k \frac{6 + 5\sqrt{2}}{14} + \frac{1}{7} \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^k} + (-1)^{k-1} \frac{5\sqrt{2} - 6}{14} \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right)^k.$$

Dans le développement de  $m_{k,-}$ , tous les termes en  $o(1)$  sont donc en  $O((2 - \sqrt{2})^k)$ . D'où :

	$\times(-1)^t(2 + \sqrt{2})^{t-1}$	$\times(k-1)$	$\times(-1)^t(k-1)$	$\times 1$	$\times(-1)^{t-1}$	$\times O((2 - \sqrt{2})^t)$
$196 \cdot (-1)^{t+1}(k1 + k3 + k5)$	$-32 - 36\sqrt{2}$	42	-	83	-49	...
$196 \cdot \frac{P}{(2+\sqrt{2})^t}(k1 + (\sqrt{2}-1)\dots)$	$32 + 36\sqrt{2}$	-	-	$50 - 12\sqrt{2}$	$42 - 14\sqrt{2}$	...
$-196 \cdot m_{i,-}$	-	42	-	$133 - 12\sqrt{2}$	$-7 - 14\sqrt{2}$	...

Tableau 6

et donc :

$$\begin{aligned}
 m_{k,-} &= -\frac{3}{14}k - \frac{133 - 12\sqrt{2}}{196} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{28}(-1)^k + \text{reste}, \\
 \text{reste} &= O((2 - \sqrt{2})^k) \\
 &= c_1(2 - \sqrt{2})^k + (c_2 + (-1)^k c_3) \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^k} \\
 &\quad + (c_4 + (-1)^k c_5) \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^k + c_6 \left(\frac{6 - 4\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^k. \quad \square
 \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.  $m_{k,+} = \frac{3}{14}k + \frac{609 - 24\sqrt{2}}{980} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{28}(-1)^k + O((2 - \sqrt{2})^k)$ .

**Démonstration.**

Le trajet symbolique entre  $(x_{k+1,+}, m_{k+1,+})$  et  $(\alpha, F_{k+1}(\alpha - 0))$  est exactement le même que celui entre  $(x_{k,-}, m_{k,-})$  et  $(0, 0)$ . En effet, on passe de  $x_{k,-}$  à  $x_{k+1,+}$  en ajoutant un 3 devant le développement en base  $3 + \beta$ , et de même pour passer de 0 à  $\alpha$ . Il faut normaliser maintenant les sauts par  $(-1)^{k+2}$  et la distance horizontale par  $(3 + \beta)^{-(k+1)}$ . D'où l'analogie de la formule obtenue plus haut pour  $m_{k,-}$  :

$$\begin{aligned}
 F_{k+1}(\alpha - 0) - m_{k+1,+} &= \frac{P_{k+1}(k1 + (\sqrt{2} - 1)(k2 + k3 + k4 + k6))}{(2 + \sqrt{2})^{k+1}} \\
 &\quad + (-1)^{k+2}(k1 + k3 + k5).
 \end{aligned}$$

D'autre part, on déduit aisément de (7) que  $\delta_k := F_k(\alpha - 0)$  vérifie la relation de récurrence  $\delta_{k+2} = (1 - \alpha)\delta_{k+1} + \alpha\delta_k$ , avec  $\delta_0 = 0$  et  $\delta_1 = \alpha$  (en effet, les itérées de  $f_0$  sont nulles au point  $\alpha$ .) On a donc :

$$\delta_k = F_k(\alpha - 0) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \alpha^i = \frac{4 - \sqrt{2}}{5} + O((2 - \sqrt{2})^k).$$



D'où les calculs :

	$\times(-1)^k(2+\sqrt{2})^{k-1}$	$\times(k-1)$	$\times(-1)^k(k-1)$	$\times 1$	$\times(-1)^{k-1}$	$\times O((2-\sqrt{2})^k)$
$196 \cdot (-1)^{k+2}(k1+k3+k5)$	$32+36\sqrt{2}$	$-42$	$-$	$-83$	$49$	$\dots$
$196 \cdot \frac{F_{k+1}}{(2+\sqrt{2})^{k+1}}(k1+(\sqrt{2}-1)\dots)$	$-32-36\sqrt{2}$	$-$	$-$	$34-44\sqrt{2}$	$-42+14\sqrt{2}$	$\dots$
$5F_{k+1}(\alpha-0)$	$-$	$-$	$-$	$4-\sqrt{2}$	$-$	$\dots$

Tableau 7

et donc :

$$\begin{aligned}
 m_{k,+} &= \frac{3}{14}k + \frac{609 - 24\sqrt{2}}{980} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{28}(-1)^k + \text{reste}, \\
 \text{reste} &= O((2 - \sqrt{2})^k) \\
 &= c'_1(2 - \sqrt{2})^k + (c'_2 + (-1)^k c'_3) \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^k} \\
 &\quad + (c'_4 + (-1)^k c'_5) \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right)^k + c'_6 \left( \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right)^k. \quad \square
 \end{aligned}$$

On peut donner une démonstration directe du corollaire 2, analogue à celle du corollaire 1 et mettant en œuvre une autre substitution sur un autre alphabet de six lettres.

On voit sur la figure 11 les trajets  $swuuu\underline{wuw} = \sigma^2(s\underline{w})$  et  $|\underline{wuw}| = \sigma^1(s\underline{w})$ , qui relient respectivement  $(x_{3,-}, m_{3,-})$  à  $(0,0)$  et  $(x_{3,+}, m_{3,+})$  à  $(\alpha, F_3(\alpha - 0))$ . Les points  $\bullet$  séparent les lettres des mots décrivant ces trajets :

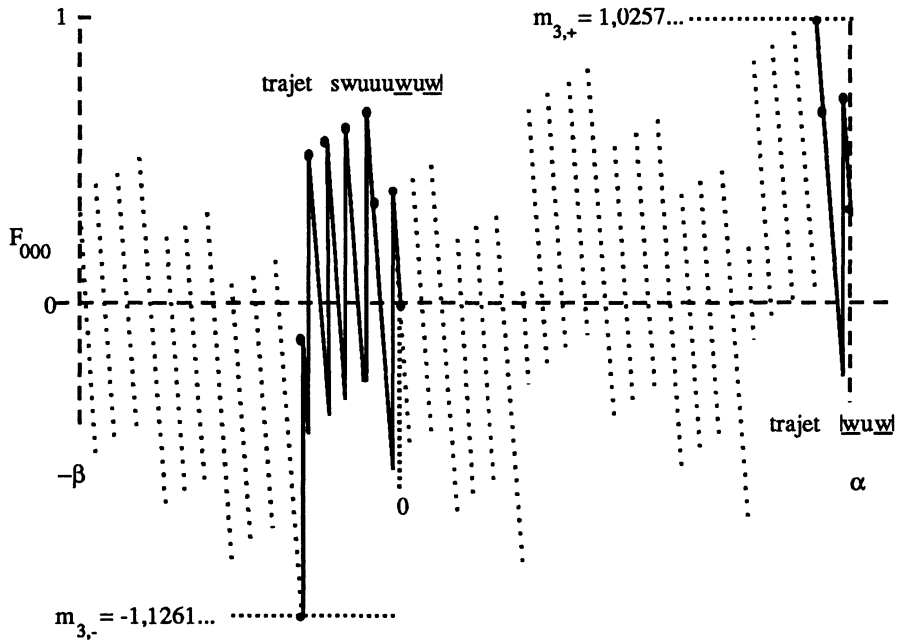


Figure 11

### 7. Une hypothèse

#### 7.1

Les calculs numériques pour les premières valeurs conduisent à valider la conjecture (6), et même à envisager l'égalité :

$$L(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_{b_k}}{(k+1) \log 1/\alpha}$$

ce qui conduit, d'après le théorème 1, à :

$$L(U) = \frac{3}{14 \log \frac{1}{\alpha}} = \frac{3}{14 \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 0,40068...$$

Cette valeur est à rapprocher des quantité  $L(V)$  et  $L(W)$ , où  $V$  est la suite classique de van der Corput et  $W$  la suite des  $(\{n\xi\})$ ,  $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Ce sont en effet des suites auto-similaires correspondant à l'alphabet  $\{0,1\}$ , voir [Bor1]. On sait que (Haber, [Hab]) :

$$L(V) = \frac{1}{3 \log 2} = 0,48089...$$

et que (Dupain, [Dup]) :

$$L(W) = \frac{1}{20 \log \xi} = 0,31171\dots$$

(on peut remarquer que la suite  $(\{n\theta\})$ , avec  $\theta = \sqrt{2}$ , a une constante  $L$  plus faible, mais elle est auto-similaire avec un alphabet à trois lettres au lieu de deux).

## 7.2

Les résultats obtenus conduisent aux valeurs numériques suivantes :

$k$	$\sup F_k$	$-\inf F_k$	$\frac{M_{b_k}}{(k+1) \log \frac{1}{\alpha}}$
0	0,5857	0,4142	1,09534
1	0,6066	0,6360	0,59465
2	1,0528	0,7254	0,65618
3	1,0257	1,1261	0,52639
4	1,4949	1,1166	0,55906
5	1,4472	1,5752	0,49090
6	1,9282	1,5329	0,51506
7	1,8738	2,0109	0,47000
8	2,3564	1,9568	0,48958
9	2,3066	2,4438	0,45696
10	2,7578	2,3770	0,46879

Pour vérifier numériquement que  $L(U) < L(V)$ , il "suffit" donc d'aller jusqu'à  $k = 7$ , c'est à dire au mot 0000000.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ber] A. BERTRAND-MATHIS, *Développements en base  $\theta$  ; répartition de la suite  $(x\theta^n)$  ; langages codés et  $\theta$ -shift*, Bull. Soc. math. France **114** (1986), 271–323.
- [Bor1] J.-P. BOREL, *Contribution à l'étude de la distribution des suites*, Thèse d'État, Marseille-Luminy, 1989.
- [Bor2] J.-P. BOREL, *Sur une suite de fonctions liées à un processus itératif*, Publications du Département de Mathématiques de Limoges **12** (1990), 1–16.
- [Bor3] J.-P. BOREL, *Symbolic representation of piecewise linear functions on the unit interval*, Theoret. Comput. Sci. A **123** (1994), à paraître.
- [Dup] Y. DUPAIN, *Discrédance à l'origine de la suite  $(n(1+\sqrt{5})/2)$* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), 81–106.

- [Hab] S. HABER, *On a sequence of points of interest for numerical quadrature*, Res. Nat. Bur. Standards Sect. B **70** (1966), 127–134.
- [Hof1] F. HOFBAUER, *On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy*, Israel J. Math. **34** (1979), 213–237.
- [Hof2] F. HOFBAUER, *The maximal measure for linear mod one transformations*, J. London Math. Soc. **23** (1981), 92–112.
- [Par] W. PARRY, *On the  $\beta$ -expansion of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416.
- [Ren] A. RENYI, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 477–493.

Jean-Pierre Borel  
URA CNRS 1586  
Université de Limoges  
Faculté des Sciences  
123 avenue Albert Thomas  
F-87060 Limoges Cedex