Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

J. Queyrut

Structure galoisienne des places infinies d'un corps de nombres

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, nº 2 (1993), p. 383-410

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_2_383_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 383–410*

Structure galoisienne des places infinies d'un corps de nombres

par J. QUEYRUT

0. Introduction

Soit N un corps de nombres (i. e. une extension de degré fini n du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels) et Γ un groupe d'automorphismes de N. Le corps des invariants de N est noté F. La fonction L d'Artin est un homomorphisme sur le groupe des caractères $R(\Gamma)$ de Γ. Elle satisfait une équation fonctionnelle (voir [Ta1] et [Ta2]). La démonstration, l'équation elle-même ainsi que certaines propriétés des fonctions L font intervenir deux types d'ingrédients :

- des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans $\mathbb{Z}$

- des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans $\mathbb{C}^*$.

Par exemple, pour χ caractère de Γ, posons au voisinage de $s = 0$ (resp. $s = 1$)

$$L(s,\chi) = c_0(\chi)s^{r_0(\chi)} + O(s^{r_0(\chi)+1})$$

(resp. $L(s,\chi) = c_1(\chi)(1-s)^{r_1(\chi)} + O((1-s)^{r_1(\chi)+1})$.

Les fonctions r_0 et r_1 sont des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans $\mathbb{Z}$. Les fonctions c_0 et c_1 sont des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans $\mathbb{C}^*$. Avec ces notations l'équation fonctionnelle de la fonction L donne :

$$\frac{c_0(\chi)}{c_1(\overline{\chi})}\,(i\pi)^{a_3(\chi)}2^{r_{2,F}\chi(1)+a_1(\chi)} = \tau(\chi)(d_F)^{\chi(1)/2}i^{r_{2,F}\chi(1)},$$

où $\tau(\chi)$ est la somme de Gauss galoisienne et d_F est le discriminant absolu de F sur $\mathbb{Q}$. Les exposants sont définis dans le paragraphe 2 et sont des homorphismes de $R(\Gamma)$ dans $\mathbb{Z}$.

Les deux premiers groupes de K-théorie permettent de donner une interprétation de ces homomorphismes en terme de classes de Γ-modules

Manuscrit reçu le 24 février 1993, version définitive le 16 juillet 1993.

et de classes d'automorphismes. Cet aspect est développé dans le paragraphe **1**. En particulier, c'est l'interprétation de τ comme une classe d'automorphismes qui est la clé des théorèmes de structure des anneaux d'entiers.

Une autre motivation vient des formules du nombre de classes.
Soit r_Γ le caractère régulier de Γ, h le nombre de classes d'idéaux de N, R le régulateur de N et w le nombre de racines de l'unité contenues dans N :

$$c_0(r_\Gamma) = -\frac{hR}{w} \quad \text{et} \quad c_1(r_\Gamma) = -\frac{2^{r_{1,N}}(2\pi)^{r_{2,N}}}{\sqrt{d_F}}\,\frac{hR}{w}.$$

Le problème est d'exprimer chaque facteur comme un produit sur les caractères irréductibles de Γ. Ceci est équivalent à les interpréter comme des automorphismes définis sur des Γ-modules convenables. Par exemple, la décomposition de R se fait à l'aide du régulateur de Stark; celle de d_F par la "Führerdiskriminantenproduktformel" d'Artin et Hasse. L'étude menée ici montre que, pour certains de ces invariants, les Γ-modules naturels qui interviennent sont construits à partir de l'ensemble des plongements de N dans $\mathbb{C}$ et des places infinies de N.

Le paragraphe **2** donne une interprétation d'un certain nombre d'homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans $\mathbb{Z}$ à l'aide de la structure galoisienne des plongements de N dans $\mathbb{C}$ et de celle des places infinies de N. Le théorème 3.1 du paragraphe **3** donne une interprétation en terme d'automorphisme et un calcul très simple du facteur à l'infini de la fonction L d'Artin. La dualité entre $\mathbb{Z}[Is(N)]$ et $Map(Is(N), \mathbb{Z})$, rappelée dans le paragaphe **4**, permet de donner une description de la structure galoisienne additive de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ et multiplicative de $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$. Enfin dans le dernier paragraphe, la structure galoisienne des racines de l'unité est décrite dans ce cadre.

Notations. Si X est un ensemble et A un anneau, on note $A[X]$ le A-module libre de base X. Si de plus X est un groupe, $A[X]$ a une structure de A-algèbre pour la multiplication induite par la loi de composition dans X.

Si Δ est un sous-groupe de Γ, on note $I(\Gamma/\Delta)$ le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module, noyau de l'homomorphisme de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ sur $\mathbb{Z}[\Gamma/\Delta]$ induit par l'application qui à $\gamma \in \Gamma$ associe sa classe à droite modulo Δ.

$$0 \longrightarrow I(\Gamma/\Delta) \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma/\Delta] \longrightarrow 0.$$

Les $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules $\mathbb{Z}[\Gamma/\Delta]$ et $I(\Gamma/\Delta)$ sont localement projectifs pour tout nombre premier p ne divisant pas l'ordre de Δ.

Si M est un $\mathbb{Z}$-module, on note $Map(X, M)$ l'ensemble des applications de X dans M. Il est muni de la structure de $\mathbb{Z}$-module induite par celle de M. De plus $Map(X, A)$ a une structure de A-algèbre induite par celle de A. L'application

$$f \mapsto \sum_{x \in X} f(x)x$$

est un isomorphisme de A-module de $Map\,(X, A)$ sur $A[X]$. Si Γ opère sur X, on en déduit une action de Γ sur $A[X]$ par $\gamma \sum_{x \in X} \lambda_x x = \sum_{x \in X} \lambda_x \gamma x$ et sur $Map(X, A)$ par $(\gamma f)(x) = f(\gamma^{-1} x)$. L'isomorphisme précédent est alors un isomorphisme de Γ-module. L'action de Γ conserve la structure de A-algèbre de $Map(X, A)$.

Soit r un élément non nul de A. On appelle module de Swan le sous A-module de $Map(X, A)$ formé des f tels que

$$\exists \lambda_f \in A,\ \exists g \in\ Map(X, A)\ ,\ \forall x \in X,\ f(x) = \lambda_f + rg(x).$$

On le note $Sw(Map(X, A), r)$.

1. Classification de modules et d'automorphismes

Soit S un ensemble fini de nombres premiers. Soit $\mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules de type fini, localement projectifs en dehors de S. Ce groupe classifie les $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules précédents, modulo les suites exactes localement scindées en dehors de S, voir [Q]. La classe d'un module M dans ce groupe est notée $[M]$. Soit $R(\Gamma)$ le groupe des caractères de Γ. Il classifie les $\mathbb{C}[\Gamma]$-modules de type fini à isomorphisme près. Ces deux groupes sont reliés, en particulier, par la dualité suivante :

$$\mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \times R(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui, à la classe $[M]$ d'un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module M et au caractère χ d'un $\mathbb{C}[\Gamma]$-module V, associe l'entier défini par :

$$< \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M, V > = dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}[\Gamma]}(V, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M)).$$

On a

$$< \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M, V > = < \varphi, \chi > = |\Gamma|^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma)\chi(\gamma^{-1}),$$

où φ est le caractère du $\mathbb{C}[\Gamma]$-module $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

Cette application est bilinéaire non dégénérée à gauche et induit un homomorphisme, noté Tr, de $\mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$ sur $Hom(R(\Gamma),\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} Tr : \mathcal{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma]) &\longrightarrow Hom(R(\Gamma),\mathbb{Z}) \\ [M] &\longmapsto (\chi \mapsto Tr_\chi([M])). \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes.

Soit Δ un sous-groupe de Γ, et soit V un $\mathbb{C}[\Gamma]$-module de type fini et de caractère χ. On pose $V^\Delta = \{x \in V,\ \forall \delta \in \Delta,\ \delta(x) = x\}$ et on note χ^Δ son caractère. Alors

$$dim_{\mathbb{C}}(V^\Delta) = <\chi, Ind_\Delta^\Gamma(1_\Delta)> = <V, \mathbb{C}[\Gamma/\Delta]> = \chi^\Delta(1),$$
$$codim_{\mathbb{C}}(V^\Delta) = dim_{\mathbb{C}}(V) - dim_{\mathbb{C}}(V^\Delta) = \chi(1) - \chi^\Delta(1),$$

où $Ind_\Delta^\Gamma(1_\Delta)$ est le caractère de $\mathbb{C}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{C}[\Delta]} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[\Gamma/\Delta]$.

Soit $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma])$ le groupe de Whitehead de la catégorie des $\mathbb{C}[\Gamma]$-modules de type fini. Ce groupe classifie les couples (M,α) où M est un $\mathbb{C}[\Gamma]$-module de type fini et α est un $\mathbb{C}[\Gamma]$-automorphisme de M ; la classe de (M,α) dans ce groupe est notée $[M,\alpha]$. Comme précédemment ce groupe se décrit par dualité à partir de la forme bilinéaire

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma]) \times R(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

qui à la classe $[M,\alpha]$ et au caractère χ d'un $\mathbb{C}[\Gamma]$-module V associe le déterminant de l'automorphisme $f \mapsto f \circ \alpha$, de $Hom_{\mathbb{C}[\Gamma]}(V, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M)$, noté α_V. Cette forme est bilinéaire non dégénérée et induit un isomorphisme, noté Det, de $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma])$ sur $Hom(R(\Gamma),\mathbb{C}^*)$:

$$\begin{aligned} Det : \mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma]) &\longrightarrow Hom(R(\Gamma),\mathbb{C}^*) \\ [M,\alpha] &\longmapsto (\chi \mapsto Det_\chi([M,\alpha])). \end{aligned}$$

En particulier, soit λ un nombre complexe non nul, et soit $[M,\lambda]$ l'élément de $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma])$ où λ désigne le $\mathbb{C}[\Gamma]$-automorphisme de M défini par la multiplication par λ. Alors pour tout χ de $R(\Gamma)$,

$$Det_\chi([M,\lambda]) = \lambda^{Tr_\chi([M])}.$$

2. Structure galoisienne de $\mathbb{Z}[Is(N)]$ et $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$

Soit $Is(N)$ l'ensemble des isomorphismes de N dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Le nombre d'éléments de $Is(N)$ est égal à n, le degré de N sur $\mathbb{Q}$ (voir par exemple [Sa], page 40). Le groupe Γ opère sur $Is(N)$ par :

$$\forall \gamma \in \Gamma,\ \forall \sigma \in Is(N),\ (\gamma,\sigma) \mapsto \sigma \circ \gamma^{-1}$$

LEMME 2.1. *Le groupe Γ opère transitivement et fidèlement sur l'ensemble des isomorphismes de N dans $\mathbb{C}$ ayant la même restriction à F.*

Démonstration. Soient σ et σ' deux isomorphismes de N dans $\mathbb{C}$, dont les restrictions à F coïncident. Comme N est une extension séparable de F, il existe $x \in N$ tel que $N = F[x]$; le polynôme minimal de x sur F est

$$Q(X) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (X - \gamma(x)) \in F[X];$$

toutes ses racines sont simples. Le polynôme minimal de $\sigma(x)$ sur $\sigma(F)$ est

$$\sigma(Q(X)) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (X - \sigma(\gamma(x))) \in \sigma(F)[X].$$

De même $\sigma'(x)$ est racine de

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} (X - \sigma'(\gamma(x))) = \sigma'(Q(X)).$$

Comme σ et σ' coïncident sur F, $\sigma(Q(X)) = \sigma'(Q(X))$. Il existe donc $\gamma \in \Gamma$ tel que $\sigma'(x) = \sigma(\gamma(x))$.

Le groupe de Galois $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opère aussi sur $Is(N)$: si j désigne le générateur de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, l'action est donnée par :

$$\forall \sigma \in Is(N), \ (j, \sigma) \mapsto (j \circ \sigma) = \overline{\sigma}.$$

L'ensemble des orbites pour cette action s'identifie à l'ensemble des places infinies de N, classes d'équivalence de valeurs absolues archimédiennes de N. Soit p_N l'application qui à $\sigma \in Is(N)$ associe la classe de la valeur absolue :

$$\begin{aligned} p_N(\sigma) : N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |\sigma(x)| = \sqrt{\sigma(x)\overline{\sigma}(x)}. \end{aligned}$$

Soit $S_{N,\infty}$ (resp. $S_{F,\infty}$) l'ensemble des places infinies de N (resp. F). Le groupe Γ opère sur $S_{N,\infty}$ par

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \forall w \in S_{N,\infty}, \ (\gamma, w) \mapsto w \circ \gamma^{-1}$$

de telle sorte que p_N commute avec l'action de Γ. On obtient un diagramme commutatif, où toutes les applications sont surjectives, les applications Res_F sont données par la restriction à F :

$$\begin{array}{ccc} Is(N) & \xrightarrow{Res_F} & Is(F) \\ \downarrow{\scriptstyle p_N} & & \downarrow{\scriptstyle p_F} \\ S_{N,\infty} & \xrightarrow{Res_F} & S_{F,\infty} \end{array}$$

Pour toute place v de F, on choisit un relèvement σ_v de v dans $Is(F)$. Pour tout $\sigma \in Is(F)$, on choisit un relèvement σ_N de σ dans $Is(N)$. Ainsi pour toute place v de F, $v_N = p_N(\sigma_{v,N})$ est une place de N dont la restriction à F est égale à v ; v_N ne dépend pas du choix de σ_v relevant v.

Si w est une place de N, on note Γ_w le sous-groupe de Γ d'isotropie de w et f_w l'ordre de Γ_w. Le groupe Γ opère transitivement sur l'ensemble des places dont la restriction est égale à v et $\forall \gamma \in \Gamma$, $\Gamma_{\gamma w} = \gamma \Gamma_w \gamma^{-1}$. On note plus simplement Γ_v le groupe d'isotropie de v_N et f_v l'ordre de Γ_v (il ne dépend pas du choix de v_N).

On note $Is(N, \mathbb{R})$ l'ensemble des isomorphismes de N dans $\mathbb{R}$ et $Is(N, \mathbb{C})$ son complémentaire dans $Is(N)$. On pose $S_{N,\mathbb{R}} = p_N(Is(N, \mathbb{R}))$ et de même $S_{N,\mathbb{C}} = p_N(Is(N, \mathbb{C}))$. Le nombre d'éléments de $S_{N,\mathbb{R}}$ (resp. $S_{N,\mathbb{C}}$) est noté $r_{1,N}$ (resp. $r_{2,N}$). Avec cette notation, on a donc

$$r_{1,N} + 2r_{2,N} = [N : \mathbb{Q}] \quad \text{et} \quad r_{1,F} + 2r_{2,F} = [F : \mathbb{Q}].$$

Ces ensembles sont stables par Γ. L'ensemble $Is(N, \mathbb{C})$ se décompose en deux sous-ensembles disjoints, stables par Γ :

$$\begin{aligned} Is(N, \mathbb{C})_0 &= \{\tau \in Is(N, \mathbb{C}),\ Res_F(\tau) \in Is(F, \mathbb{C})\} \\ Is(N, \mathbb{C})_1 &= \{\tau \in Is(N, \mathbb{C}),\ Res_F(\tau) \in Is(F, \mathbb{R})\} \\ Is(N, \mathbb{C}) &= Is(N, \mathbb{C})_0 \cup Is(N, \mathbb{C})_1. \end{aligned}$$

De même, $S_{N,\mathbb{C}}$ se décompose en deux sous-ensembles disjoints, stables par Γ :

$$\begin{aligned} S_{N,\mathbb{C},0} &= p_N(Is(N, \mathbb{C})_0) = \{v \in S_{N,\mathbb{C}},\ Res_F(v) \in S_{F,\mathbb{C}}\} \\ S_{N,\mathbb{C},1} &= p_N(Is(N, \mathbb{C})_1) = \{v \in S_{N,\mathbb{C}},\ Res_F(v) \in S_{F,\mathbb{R}}\} \\ S_{N,\mathbb{C}} &= S_{N,\mathbb{C},0} \cup S_{N,\mathbb{C},1}. \end{aligned}$$

$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},1} \cup S_{N,\mathbb{R}} \Leftrightarrow \tau \in Is(N,\mathbb{C})_1 \cup Is(N,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma,\ \overline{\tau} o \gamma = \tau.$

$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},1} \Leftrightarrow \tau \in Is(N,\mathbb{C})_1 \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq 1, \overline{\tau} o \gamma = \tau \Leftrightarrow \Gamma_w$ est d'ordre 2 engendré par γ.

$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{R}} \Leftrightarrow \tau \in Is(N,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \overline{\tau} = \tau.$

$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},0} \Leftrightarrow \tau \in Is(N,\mathbb{C})_0 \Leftrightarrow \overline{\tau} \neq \tau$ et $Res_F(\overline{\tau}) \neq Res_F(\tau)$.

$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},0} \cup S_{N,\mathbb{R}} \Leftrightarrow \tau \in Is(N,\mathbb{C})_0 \cup Is(N,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \Gamma_w$ est d'ordre 1.

Pour tout $v \in S_{F,\infty}$, on note γ_v le générateur de Γ_v ; donc

$$\gamma_v \neq 1 \Leftrightarrow v_N \in S_{N,\mathbb{C},1}.$$

On note $S'_{F,\mathbb{R}}$ l'ensemble des places v de $S_{F,\mathbb{R}}$ telles que $\gamma_v \neq 1$, et $r'_{1,F}$ le nombre d'éléments de $S'_{F,\mathbb{R}}$. On note $S''_{F,\mathbb{R}}$ le complémentaire de $S'_{F,\mathbb{R}}$ dans $S_{F,\mathbb{R}}$.

Tous les ensembles $S_{F,\mathbb{R}}$, $S_{N,\mathbb{C}}$, $S_{N,\mathbb{C},0}$ et $S_{N,\mathbb{C},1}$ sont stables par Γ.

Si X est un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{C}[Is(N)]$, on note X^+ (resp. X^-) le sous-module propre correspondant à la valeur propre 1 (resp. -1) de j. Ainsi

$$X^+ = X \cap \frac{1+j}{2}\ \mathbb{C}[Is(N)] \ \text{ et } \ X^- = X \cap \frac{1-j}{2}\ \mathbb{C}[Is(N)].$$

Avec ces notations, on a :

LEMME 2.2. *L'application p_N se prolonge en un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-homomorphisme, encore noté p_N, tel que la suite suivante soit exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)] \xrightarrow{p_N} \mathbb{Z}[S_{N,\infty}] \longrightarrow 0.$$

De plus $\mathbb{Z}[Is(N)]^- = \mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})]^-$.

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[Is(N)]^-$ a pour base l'ensemble des $\sigma - \overline{\sigma}$ pour σ dans $Is(N,\mathbb{C})$. Sa dimension est donc $r_{2,N}$.

La proposition suivante donne la structure galoisienne des trois modules introduits dans le lemme 2.2 :

PROPOSITION 2.3.

1) Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}[Is(N)]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F)]$.

Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$, $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N)]) = [F:\mathbb{Q}]\chi(1)$.

2) Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ est localement projectif en dehors de 2. Il est isomorphe à $\bigoplus_{v\in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma_v] \simeq \bigoplus_{v\in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]}\mathbb{Z}$.

Pour tout $\chi\in R(\Gamma)$, $Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]) = \sum_{v\in S_{F,\infty}} \chi^{\Gamma_v}(1)$.

3) Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}[Is(N)]^-$ est localement projectif en dehors de 2 et isomorphe à $(\mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[Is(F)]^-))\oplus(\bigoplus_{v\in S_{F,\infty}} I[\Gamma/\Gamma_v])$.

Soit $a_2 = Tr(\sum_{v\in S_{F,\infty}} I[\Gamma/\Gamma_v])$. *Pour tout* $\chi\in R(\Gamma)$,

$$a_2(\chi) = \sum_{v\in S_{F,\infty}} (\chi(1)-\chi^{\Gamma_v}(1)) = \sum_{v\in S'_{F,\infty}} (\chi(1)-\chi^{\Gamma_v}(1)).$$

Soit $a_3 = Tr(\mathbb{Z}[Is(N)]^-)$. *Pour tout* $\chi\in R(\Gamma)$,

$$a_3(\chi) = r_{2,F}\chi(1) + a_2(\chi).$$

Démonstration.

1) L'isomorphisme de $\mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Is(F)]$ sur $\mathbb{Z}[Is(N)]$ est donné par

$$\gamma\otimes\sigma \mapsto \sigma_N\circ\gamma^{-1}.$$

L'isomorphisme réciproque est donné par

$$\tau\mapsto\gamma\otimes Res_F(\tau)$$

où γ est défini par $Res_F(\tau)_N\circ\gamma^{-1}=\tau$.

2) L'isomorphisme de $\bigoplus_{v\in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]}\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ est donné par :

$$\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma\otimes\lambda_{v,\gamma}\right)_{v\in S_{F,\infty}} \longmapsto \sum_{v\in S_{F,\infty}}\sum_{\gamma\in\Gamma}\lambda_{v,\gamma}v_N\circ\gamma_v^{-1}.$$

Soit $w\in S_{N,\infty}$, et soit v la restriction de w à F ; il existe $\gamma_v\in\Gamma$ tel que $w=v_N\circ\gamma_v^{-1}$; l'application qui à w associe l'élément de

$$\bigoplus_{v\in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]}\mathbb{Z},$$

dont la composante en v est $\gamma_v \otimes 1$ et les autres sont nulles, induit l'isomorphisme réciproque.

3) De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(F)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(F)] \xrightarrow{p_F} \mathbb{Z}[S_{F,\infty}] \longrightarrow 0$$

on déduit un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}[Is(F)]^-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F)] \arrow[r, "p_F"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_{F,\infty}] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[Is(N)]^- \arrow[r] & \mathbb{Z}[Is(N)] \arrow[r, "p_N"] & \mathbb{Z}[S_{N,\infty}] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

L'application de $\mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[S_{F,\infty}]$ dans $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$, qui à $\gamma\otimes v$ associe $v_N \, o \, \gamma^{-1}$, rend de plus le diagramme suivant commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underset{v\in S_{F,\infty}}{\oplus} I[\Gamma/\Gamma_v] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underset{v\in S_{F,\infty}}{\oplus} \mathbb{Z}[\Gamma] \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \underset{v\in S_{F,\infty}}{\oplus} \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma_v] \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underset{v\in S_{F,\infty}}{\oplus} I[\Gamma/\Gamma_v] \arrow[r] & \mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_{F,\infty}] \arrow[r] & \mathbb{Z}[S_{N,\infty}] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par le lemme du serpent, on a donc une suite exacte, scindée :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)]^- \longrightarrow \underset{v\in S_{F,\infty}}{\oplus} I[\Gamma/\Gamma_v] \longrightarrow 0.$$

La structure galoisienne des sous-modules de $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ donnés par la partition de $S_{N,\infty}$ décrite au début du paragraphe se déduit de la proposition précédente :

COROLLAIRE 2.4.

1) Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1} \cup S_{N,\mathbb{R}}]$ est localement projectif en dehors de 2 ; il est isomorphe à $\underset{v\in S_{F,\mathbb{R}}}{\oplus} \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma_v] \simeq \underset{v\in S_{F,\mathbb{R}}}{\oplus} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} \mathbb{Z}$.

Soit $a_1 = Tr(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1} \cup S_{N,\mathbb{R}}])$. *Pour tout* $\chi \in R(\Gamma)$,

$$a_1(\chi) = \sum_{v\in S_{F,\mathbb{R}}} \chi^{\Gamma_v}(1).$$

Soit $a'_1 = Tr(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}])$. *Pour tout* $\chi \in R(\Gamma)$,

$$a'_1(\chi) = \sum_{v \in S'_{F,\mathbb{R}}} \chi^{\Gamma_v}(1).$$

2) Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$,

a) $a_1(\chi) + a_2(\chi) = r_{1,F}\chi(1)$,
b) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]) = r_{2,F}\chi(1) + a_1(\chi)$,
c) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}] = r'_{1,F}\chi(1) - a_2(\chi)$,
d) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},0}]) = r_{2,F}\chi(1)$,
e) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}]) = (r_{2,F} + r'_{1,F})\chi(1) - a_2(\chi) = r_{2,F}\chi(1) + a'_1(\chi)$,
f) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}]) = (r_{1,F} - r'_{1,F})\chi(1) = a_1(\chi) - a'_1(\chi)$.

3) Il existe des $\mathbb{Z}[\Gamma]$*-isomorphismes :*

$$\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}] \simeq \bigoplus_{v \in S'_{F,\mathbb{R}}} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},0}] \simeq \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_{F,\mathbb{C}}]$$
$$\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}] \simeq \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S''_{F,\mathbb{R}}].$$

Donc $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}]$ *et* $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},0}]$ *sont projectifs et* $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}]$ *est localement projectif en dehors de* 2.

COROLLAIRE 2.5. *Pour tout* $\chi \in R(\Gamma)$,

a) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N)]) = (r_{1,F} + 2r_{2,F})\chi(1)$,
b) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{R})]) = (r_{1,F} - r'_{1,F})\chi(1)$,
c) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})]) = (r'_{1,F} + 2r_{2,F})\chi(1)$.

En particulier, on retrouve le nombre de plongements réels et complexes en spécifiant les formules précédentes à $\chi = r_\Gamma$.

COROLLAIRE 2.6. *Soit* r_Γ *le caractère de* $\mathbb{C}[\Gamma]$. *Alors*

$$r_{1,N} = (r_{1,F} - r'_{1,F})r_\Gamma(1) \quad et \quad r_{2,N} = r_{2,F}r_\Gamma(1) + a_2(r_\Gamma).$$

Soit $h_{2,\mathbb{C}}$ le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-automorphisme de $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ qui à $w \in S_{N,\infty}$ associe $f_w w$.

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ,

$$\begin{aligned} Det_\chi([\mathbb{C}[S_{N,\infty}], h_{2,\mathbb{C}}]) &= Det_\chi([\mathbb{C}[S_{N,\mathbb{C}}], 2]) \\ &= 2^{Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}])} = 2^{(r_{2,F}+r'_{1,F})\chi(1)-a_2(\chi)}. \end{aligned}$$

Pour terminer cette étude, le corollaire suivant donne la structure galoisienne des sous-modules de $\mathbb{Z}[Is(N)]$ donnés par la partition de $Is(N)$ décrite au début du paragraphe :

COROLLAIRE 2.7.

1) L'application p_N induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[Is(N)]^+$ sur $h_{2,\mathbb{C}}(\mathbb{Z}[S_{N,\infty}])$.

2) $\mathbb{Z}[Is(N)]^+ = \mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{R})] \oplus \mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})]^+$ et p_N est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-isomorphisme de $\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{R})])$ sur $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}]$, $p_N(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})]^+) = 2\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}]$.

3) Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$, $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N)]^+) = r_{2,F}\chi(1) + a_1(\chi)$.

4) Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$,

a) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})]^+) = (2r_{2,F} + r'_{1,F})\chi(1) - a_2(\chi)$.

b) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_0]) = 2r_{2,F}\chi(1)$. *Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_0]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}[Is(F,\mathbb{C})]$, l'isomorphisme commutant avec j, pour j opérant sur $\mathbb{Z}[Is(F,\mathbb{C})]$.*

$$Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_0]^+) = Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_0]^-) = r_{2,F}\chi(1).$$

c) $Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_1]) = r'_{1,F}\chi(1)$. *Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_1]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}[S'_{F,R}]$, l'isomorphisme commutant avec j, pour j opérant sur $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}[S'_{F,\mathbb{R}}]$ par $(j, \gamma \otimes v) \mapsto \gamma\gamma_v \otimes v$.*

$$\begin{aligned} Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_1]^+) &= r'_{1,F}\chi(1) - a_2(\chi) \\ Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N,\mathbb{C})_1]^-) &= a_2(\chi). \end{aligned}$$

5) La suite de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)]^+ \oplus \mathbb{Z}[Is(N)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)] \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}] \longrightarrow 0$$

3. Lien avec la partie à l'infini de la fonction L d'Artin

Soit $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$. Elle vérifie la relation

$$\Gamma(\tfrac{s}{2})\Gamma(\tfrac{s+1}{2}) = \Gamma(s)2^{1-s}\pi^{1/2}.$$

Soit

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2).$$

Cette fonction vérifie donc la relation : $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = 2^{1-s}\Gamma_{\mathbb{R}}(2s)$.

Alors $\Gamma_{\mathbb{R}}(1) = 1$ et 0 est un pôle simple de résidu 2.

Le théorème suivant donne une expression particulièrement simple de la partie infinie de la fonction L d'Artin, en l'interprétant à l'aide d'un $\mathbb{C}[\Gamma]$-automorphisme défini sur $\mathbb{C}[Is(N)]$.

THÉORÈME 3.1. *Soit $L_\infty(s)$ le $\mathbb{C}[\Gamma]$-automorphisme de*

$$\mathbb{C}[Is(N)] = \mathbb{C}[Is(N)]^+ \oplus \mathbb{C}[Is(N)]^-$$

défini par la multiplication par $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ sur $\mathbb{C}[Is(N)]^+$ et la multiplication par $\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$ sur $\mathbb{C}[Is(N)]^-$. Pour chaque place v de F et tout caractère χ de Γ, soit $L_v(s,\chi)$ la fonction locale d'Artin (voir [Ta2], page 18).

Alors $\forall \chi \in R(\Gamma)$

$$Det_\chi([\mathbb{C}[Is(N)], L_\infty(s)]) = \prod_{v\in S_{F,\infty}} L_v(s,\chi).$$

Démonstration. Par définition de $L_\infty(s)$ et en utilisant la formule de [Ta2] page 18, on a, en posant $n = [F:\mathbb{Q}]$,

$$\begin{aligned}
&Det_\chi([\mathbb{C}[Is(N)], L_\infty(s)])\\
&= \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{Tr_\chi(\mathbb{C}[Is(N)]^+)}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{Tr_\chi(\mathbb{C}[Is(N)]^-)}\\
&= \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_{2,F}\chi(1)+a_1(\chi)}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{r_{F,2}\chi(1)+a_2(\chi)}\\
&= \pi^{-[s(r_{F,2}\chi(1)+a_1(\chi))+(s+1)(r_{F,2}\chi(1)+a_2(\chi))]/2}\times\\
&\qquad\qquad \Gamma(\tfrac{s}{2})^{r_{F,2}\chi(1)+a_1(\chi)}\Gamma(\tfrac{s+1}{2})^{r_{F,2}\chi(1)+a_2(\chi)}\\
&= \pi^{-[sn\chi(1)+r_{F,2}\chi(1)+a_2(\chi)]/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})^{a_1(\chi)}\Gamma(\tfrac{s+1}{2})^{a_2(\chi)}[\Gamma(\tfrac{s}{2})\Gamma(\tfrac{s+1}{2})]^{r_{F,2}\chi(1)}\\
&= 2^{r_{F,2}\chi(1)(1-s)}\pi^{-[a_2(\chi)+sn\chi(1)]/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})^{a_1(\chi)}\Gamma(\tfrac{s+1}{2})^{a_2(\chi)}\Gamma(s)^{r_{F,2}\chi(1)}\\
&= \prod_{v\in S_{F,\infty}} L_v(s,\chi).
\end{aligned}$$

4. Dualité

Soit $Map(Is(N),\mathbb{Z})$ l'ensemble des applications de l'ensemble $Is(N)$ dans $\mathbb{Z}$. Cet ensemble a une structure de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module pour l'action définie par

$$\gamma f : \sigma \mapsto f(\sigma \circ \gamma).$$

Il existe une forme bilinéaire invariante par l'action de Γ, non dégénérée :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[Is(N)] \times Map(Is(N),\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \Big(\sum_{\sigma\in Is(N)} \lambda_\sigma \sigma, f\Big) &\longmapsto \sum_{\sigma\in Is(N)} \lambda_\sigma f(\sigma). \end{aligned}$$

On en déduit donc un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-isomorphisme de $\mathbb{Z}[Is(N)]$ sur

$$Hom(Map(Is(N),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}).$$

De même l'ensemble $Map(S_{N,\infty},\mathbb{Z})$ des applications de $S_{N,\infty}$ dans $\mathbb{Z}$ a une structure de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module.

Soit $Map(Is(N),\mathbb{Z})^+$ (resp. $Map(Is(N),\mathbb{Z})^-$) l'ensemble des f dans $Map(Is(N),\mathbb{Z})$ tels que $\forall \sigma \in Is(N)$ $f(\sigma) = f(\overline{\sigma})$ (resp. $f(\sigma) = -f(\overline{\sigma})$).

LEMME 4.1.

1) L'application transposée de p_N donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules :

$$0 \longrightarrow Map(S_{N,\infty},\mathbb{Z}) \xrightarrow{{}^t p_N} Map(Is(N),\mathbb{Z}) \longrightarrow Map(Is(N),\mathbb{Z})^- \longrightarrow 0$$

le deuxième homomorphisme transforme $f \in Map(Is(N),\mathbb{Z})$ en l'application $\sigma \mapsto f(\sigma) - f(\overline{\sigma})$.

2) L'application ${}^t p_N$ est un isomorphisme de $Map(S_{N,\infty},\mathbb{Z})$ sur $Map(Is(N),\mathbb{Z})^+$.

3) L'homomorphisme qui à $f \in Map(Is(N),\mathbb{Z})$ associe

$$\Big(\sigma \mapsto \frac{f_{p_N(\sigma)}}{2}(f(\sigma) + f(\overline{\sigma})),\ \sigma \mapsto f(\sigma) - f(\overline{\sigma})\Big)$$

donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Map(Is(N),\mathbb{Z}) \longrightarrow Map(Is(N),\mathbb{Z})^+ \oplus Map(Is(N),\mathbb{Z})^- \\ \longrightarrow Map(S_{N,\mathbb{C}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

la deuxième application étant induite par l'application qui à f dans l'ensemble $Map(Is(N),\mathbb{Z})$ associe l'application $g : w \longmapsto \sum_{\sigma, p_N(\sigma=w)} f(\sigma)$.

Démonstration. L'application ${}^t p_N$ est injective car p_N est surjective. On choisit un système de représentants de $Is(N)/Gal(\mathbb{C},\mathbb{R})$. Si g appartient à $Map(Is(N),\mathbb{Z})^-$, alors l'application f définie par $\sigma \mapsto g(\sigma)$, $\overline{\sigma} \mapsto 0$ est un antécédent de g car $f(\overline{\sigma}) - f(\sigma) = -g(\sigma) = g(\overline{\sigma})$. Il suffit de remarquer que $Map(S_{N,\infty},\mathbb{Z})^- = Map(S_{N,\mathbb{C}},\mathbb{Z})^-$. L'exactitude en $Map(Is(N),\mathbb{Z})$ équivaut à l'affirmation 2 qui est évidente. Pour la troisième partie, il suffit de remarquer que $f_{p_N(\sigma)} = 1$ (resp. 2) si σ appartient à $Is(N,\mathbb{R})$ (resp. $Is(N,\mathbb{C})$).

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ,

$$Det_\chi([Map(S_{N,\mathbb{C}},\mathbb{C}),2]) = 2^{Tr_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}])} = 2^{(r_{2,F}+r'_{1,F})\chi(1)-a_2(\chi)}.$$

5. Structure galoisienne de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$

Le produit tensoriel $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}} N$ a une structure d'algèbre et une structure de $\mathbb{C}[\Gamma]$-module pour Γ opérant sur N. Cette action de Γ préserve la structure d'algèbre.

L'application $T_{N,\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ dans $Map(Is(N),\mathbb{C})$ définie par

$$\forall \sigma \in Is(N),\ T_{N,\mathbb{C}}(\lambda \otimes x)(\sigma) = \lambda\sigma(x)$$

est un $\mathbb{C}[\Gamma]$-isomorphisme. C'est de plus une isométrie lorsque l'on munit $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par Γ

$$Tr_{N/\mathbb{Q}} : (\lambda \otimes x, \mu \otimes y) \longmapsto \lambda\mu\ tr_{N/\mathbb{Q}}(xy)$$

et $Map(Is(N),\mathbb{C})$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par Γ, pour laquelle l'ensemble

$$Is(N)^* = \{\delta_\sigma,\ \delta_\sigma(\sigma) = 1,\ \forall \sigma' \in Is(N),\ \sigma \neq \sigma',\ \delta_\sigma(\sigma') = 0\}$$

est une base orthonormée. Cette forme vérifie donc :

$$(f, f') \longmapsto \sum_{\sigma \in Is(N)} f(\sigma)f'(\sigma).$$

L'application $T_{N,\mathbb{C}}$ est alors un isomorphisme d'algèbre si $Map(Is(N),\mathbb{C})$ est muni de la multiplication définie par :

$$\forall \sigma \in Is(N),\ (ff')(\sigma) = f(\sigma)f'(\sigma).$$

Les formes bilinéaires précédentes sont les formes déduites de la forme trace des $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ et $Map(Is(N), \mathbb{C})$.

On fait agir $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $Map(Is(N), \mathbb{C})$ (resp. $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})$) en posant

$$\forall \sigma \in Is(N),\ (jf)(\sigma) = j(f(j \circ \sigma) = \overline{f(\overline{\sigma}))}.$$

Ainsi l'ensemble $Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ des éléments fixés par $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}[\Gamma]$-algèbre. Si on fait opérer j sur $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ par son action sur $\mathbb{C}$, alors $T_{N,\mathbb{C}}$ commute avec l'action de j.

Pour la suite, on pose $tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} = 1 + j \in \mathbb{Z}[Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})]$; ainsi pour f dans l'ensemble $Map(Is(N), \mathbb{C})$, $tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(f)$ est l'application $\sigma \mapsto f(\sigma) + \overline{(f(\overline{\sigma}))}$.

On a donc le résultat suivant :

THÉORÈME 5.1. *La restriction $T_{N,\mathbb{R}}$ de T_N à $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[\Gamma]$-module et d'algèbre sur $Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$; c'est aussi une isométrie pour les formes associées aux formes traces.*

La définition et la compatibilité des actions de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ et de Γ donnent donc le diagramme commutatif de Γ-modules suivant (les plongements étant des homomorphismes d'algèbre) :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N \arrow[r, "T_{N,\mathbb{C}}"] \arrow[d, shift left, "tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}"] & Map(Is(N), \mathbb{C}) \arrow[d, shift left, "tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}"] \\ \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N \arrow[r, "T_{N,\mathbb{R}}"] \arrow[u, shift left] & Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

La trace de $Map(Is(N), \mathbb{C})$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre est la composée de l'application $tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ ci-dessus et de la trace de $Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre.

L'application $tr_{Is/S}$ qui à $f \in Map(Is(N), \mathbb{C})$ associe

$$w \longmapsto \sum_{\sigma, p_N(\sigma) = w} f(\sigma)$$

donne une suite exacte scindée de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$- et de Γ-modules :

$$0 \longrightarrow Ker(tr_{Is/S}) \longrightarrow Map(Is(N), \mathbb{C}) \xrightarrow{tr_{Is/S}} Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

D'où une suite exacte scindée de Γ-modules :

$$0 \rightarrow Ker(tr_{Is/S})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \rightarrow Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \rightarrow Map(S_{N,\infty}, \mathbb{R}) \rightarrow 0.$$

LEMME 5.2.

1) $H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N), \mathbb{C})) = 0$, $H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Ker(tr_{Is/S})) = 0$ *et* $H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})) = 0$.

2) La multiplication par i induit un $\mathbb{R}[\Gamma]$*-isomorphisme de*

$$Map(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{R})^-$$

sur

$$Map(Is(N, \mathbb{C}), i\mathbb{R})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = Ker(tr_{Is/S})^{Gal(\mathbb{C},\mathbb{R})}.$$

3) L'application ${}^t p_N$ *est un homomorphisme d'algèbre de* $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})$ *dans* $Map(Is(N), \mathbb{C})$*, injectif et qui commute avec l'action de* $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$*. La restriction de* ${}^t p_N$ *à* $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{R})$ *est donc un* $\mathbb{R}[\Gamma]$*-isomorphisme d'algèbre de* $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{R})$ *sur* $Map(Is(N), \mathbb{R})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = Map(Is(N), \mathbb{R})^+$.

Démonstration.

1) Le $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-module $Map(Is(N), \mathbb{C})$ se décompose en somme directe $Map(Is(N, \mathbb{R}), \mathbb{C}) \oplus Map(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{C})$. On a

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N, \mathbb{R}), \mathbb{C})) = 0$$

par le théorème de la base normale. Comme $Map(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ est un $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-module induit,

$$H^1(Gal(\mathbb{C}, \mathbb{R}), Map(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{C})) = 0$$

par le lemme de Shapiro. Par le théorème de la base normale,

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})) = 0.$$

Le dernier résultat s'en déduit par la suite exacte de cohomologie (qui est ici scindée).

2) Les résultats 2 et 3 se démontrent par simple vérification.

Le diagramme suivant est donc commutatif et scindé :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Map(Is(N,C),R)^- \arrow[r] \arrow[d, "\times i"] & R \otimes_Q N \arrow[r, "T^+_{N,R}"] \arrow[d, "T_{N,R}"] & Map(S_{N,\infty},R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Map(Is(N,C),iR)^{Gal(C/R)} \arrow[r] & Map(Is(N),C)^{Gal(C/R)} \arrow[r, "tr_{Is/S}"] & Map(S_{N,\infty},R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où l'on note $T^+_{N,\mathbb{R}}$ l'application qui à $\lambda \otimes x \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ associe

$$w \longmapsto \sum_{\sigma, p_N(\sigma)=w} \lambda\sigma(x)\ ;$$

de même on note $T^-_{N,\mathbb{R}}$ la projection de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ sur $Map(Is(N,\mathbb{C}),\mathbb{R})^-$; c'est l'application qui à $\lambda \otimes x \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ associe

$$\sigma \longmapsto \frac{\lambda(\sigma(x) - \overline{\sigma}(x))}{i}.$$

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ,

$$Det_\chi([Map(Is(N,\mathbb{C}),\mathbb{C})^-, i]) = i^{Tr_\chi(\mathbb{Z}[Is(N)]^-)} = i^{r_{2,F}\chi(1)+a_2(\chi)} = i^{a_3(\chi)}.$$

La définition et la compatibilité des actions de $Gal(\mathbb{C},\mathbb{R})$ et de Γ donnent donc le diagramme commutatif de Γ-modules suivant (les plongements étant des homomorphismes d'algèbre) :

$$\begin{array}{ccc}
Map(S_{N,\infty},\mathbb{C}) & \overset{tr_{Is/S}}{\underset{{}^tp_N}{\rightleftarrows}} & Map(Is(N),\mathbb{C}) \\
\uparrow\downarrow{\scriptstyle tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}} & & \uparrow\downarrow{\scriptstyle tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}} \\
Map(S_{N,\infty},\mathbb{R}) & \overset{tr_{Is/S}}{\underset{{}^tp_N}{\rightleftarrows}} & Map(Is(N),\mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}
\end{array}$$

6. Structure galoisienne de $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$

La structure galoisienne de $(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$ est décrite en généralisant les deux isomorphismes classiques suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (\lambda, \varepsilon) &\longmapsto (-1)^{\varepsilon} e^{\lambda}, \end{aligned}$$

dont l'application réciproque est $x \longmapsto (ln(|x|, sign(x))$, où pour x réel $sign(x)$ est défini par $(-1)^{sign(x)} = x/|x|$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (a, \theta) &\longmapsto e^{a/2} e^{i\theta}; \end{aligned}$$

dont l'application réciproque est $z \longmapsto (ln(z\overline{z}),\ arg(z))$.

Soit U le groupe des nombres complexes de module 1 ; il est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; cet isomorphisme conserve l'action de $Gal(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ si on fait opérer j sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par la multiplication par -1.

Si w est une place de N et σ_w tel que $p_N(\sigma_w) = w$, on pose

$$\begin{aligned} \forall x \in N \quad & \|x\|_w = |\sigma_w(x)| && \text{si} \quad w \in S_{N,\mathbb{R}}, \\ & \|x\|_w = \sigma_w(x)\overline{\sigma}_w(x) && \text{si} \quad w \in S_{N,\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de σ tel que $p_N(\sigma) = w$.

Comme $T_{N,\mathbb{C}}$ est un isomorphisme d'algèbre, $T_{N,\mathbb{C}}$ induit un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-isomorphisme de $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$ sur $Map(Is(N), \mathbb{C}^*)$.

Soit $\exp_{Is}$ (respectivement $\exp_S$) l'application de $Map(Is(N), \mathbb{C})$ (respectivement $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})$) dans $Map(Is(N), \mathbb{C}^*)$ (resp. $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)$) qui à f associe l'application définie par

$$\sigma \longmapsto \exp(f(\sigma)).$$

L'application $n_{Is/S}$ qui à $f \in Map(Is(N), \mathbb{C}^*)$ associe

$$w \longmapsto \prod_{\sigma, p_N(\sigma) = w} f(\sigma)$$

donne un diagramme exact et commutatif, où les homomorphismes préservent à la fois l'action de Γ et celle de $Gal(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ et où les suites verticales sont scindées :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & Ker(tr_{Is/S}) \arrow[r, "\exp_{Is}"] \arrow[d] & Ker(n_{Is/S}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
0 \arrow[r] & Map(Is(N), 2i\pi Z) \arrow[r] \arrow[d, "tr_{Is/S}"] & Map(Is(N), C) \arrow[r, "\exp_{Is}"] \arrow[d, "tr_{Is/S}"] & Map(Is(N), C^*) \arrow[r] \arrow[d, "n_{Is/S}"] & 1 \\
0 \arrow[r] & Map(S_{N,\infty}, 2i\pi Z) \arrow[r] \arrow[d] & Map(S_{N,\infty}, C) \arrow[r, "\exp_S"] \arrow[d] & Map(S_{N,\infty}, C^*) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Les suites horizontales ne sont pas scindées. Toutefois, l'isomorphisme réciproque défini par l'application $\exp_{Is}$ (resp. $\exp_S$) de $Map(Is(N), \mathbb{C}^*)$ (resp. $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)$) dans $Map(Is(N), \mathbb{C})/Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})$ (resp. $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})/Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z})$) est noté ln_{Is} (resp. ln_S).

En notant $\exp_{\mathbb{C}} = (T_{N,\mathbb{C}})^{-1} \circ \exp_{Is} \circ T_{N,\mathbb{C}}$, on déduit du diagramme précédent la proposition :

PROPOSITION 6.1.

La suite de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$- et Γ-modules suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z}) \xrightarrow{(T_{N,\mathbb{C}})^{-1}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N \xrightarrow{\exp_{\mathbb{C}}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^* \longrightarrow 1.$$

LEMME 6.2.

1) $H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N), \mathbb{C}^*)) = H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N), U)) = 0,$
$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)) = 0.$

2) $H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}))$ *est isomorphe à* $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, *et* $H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z}))$ *est isomorphe à* $Map(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

3) $Ker(n_{Is/S})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = Map(Is(N), U)^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$.

4) La multiplication par $2i\pi$ induit un isomorphisme :

$$Map(Is(N), \mathbb{C}), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}.$$

Démonstration.

Pour M égal à $\mathbb{C}^*$, U ou $2i\pi\mathbb{Z}$, le $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-module $Map(Is(N), M)$ (resp. $Map(S_{N,\infty}, M)$) se décompose en somme directe

$$Map(Is(N,\mathbb{R}), M) \oplus Map(Is(N,\mathbb{C}), M)$$

(resp. $Map(S_{N,\mathbb{R}}, M) \oplus Map(S_{N,\mathbb{C}}, M)$).

1) Comme $Map(Is(N,\mathbb{C}), M)$ est un $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-module induit, les groupes de cohomologie H^1 correspondants sont nuls.

2) Les groupes

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)),$$

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N,\mathbb{R}), \mathbb{C}^*))$$

et

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N,\mathbb{R}), U))$$

sont nuls par le théorème 90 de Hilbert.

3) On part de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}) \longrightarrow Map(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

où la deuxième application est donnée par la division par $2i\pi$.

Comme $Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ est nul, la suite de cohomologie donne l'isomorphisme entre

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}))$$

et

$$Map(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Donc

$$\begin{aligned} H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})) &= H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N,\mathbb{R}), 2i\pi\mathbb{Z})) \\ &= H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\mathbb{R}}, 2i\pi\mathbb{Z})) \\ &\simeq Map(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

4) Soit $f \in Map(Is(N), \mathbb{C}^*)$ telle que $\forall \sigma \in Is(N, \mathbb{C})$, $f(\sigma) = \overline{f(\overline{\sigma})}$. Alors $f(\sigma)f(\overline{\sigma}) = 1$ si et seulement si $f(\sigma) \in U$.

5) Le dernier résultat se vérifie directement.

On obtient donc les deux suites exactes suivantes, où les homomorphismes préservent l'action de Γ :

$$0 \to Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \to Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\exp_{Is}}$$
$$Map(Is(N), \mathbb{C}^*)^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\partial} H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})) \to 0,$$

$$0 \to Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\exp_\infty} Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\partial}$$
$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z})) \to 0.$$

Du lemme 6.2 et en utilisant la suite exacte de cohomologie, on déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.3. *Le diagramme de la page suivante est un diagramme commutatif de* Γ*-modules avec suites exactes :*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Map(Is(N,C),Z)^{-} \arrow[r, "\times 2\pi"] \arrow[d] & Map(Is(N,C),R)^{-} \arrow[r, "\exp_{Is}(i.)"] \arrow[d, "\times i"] & Map(Is(N),U)^{Gal(C/R)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Map(Is(N),Z)^{-} \arrow[r, "\times 2i\pi"] \arrow[d] & Map(Is(N),C)^{Gal(C/R)} \arrow[r, "\exp_{Is}"] \arrow[d, "tr_{Is/S}"] & Map(Is(N),C^{*})^{Gal(C/R)} \arrow[r] \arrow[d, "n_{Is/S}"] & Map(S_{N,R},Z/2Z) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & Map(S_{N,\infty},R) \arrow[r, "\exp_S"] \arrow[d] & Map(S_{N,\infty},R^{*}) \arrow[r] \arrow[d] & Map(S_{N,\infty},Z/2Z) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 \arrow[r] & Map(S_{N,C},Z/2Z) \arrow[r] \arrow[d] & Map(S_{N,C},Z/2Z) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

En notant $\exp_{N,\mathbb{R}} = (T_{N,\mathbb{R}})^{-1} \circ \exp_{Is} \circ T_{N,\mathbb{R}}$ et $sign_{\mathbb{R}}$ le composé de $T_{N,\mathbb{R}}$ et de l'homomorphisme $Map(Is(N),\mathbb{C}^*)^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \to Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ du diagramme ci-dessus, on déduit du diagramme précédent la proposition :

THÉORÈME 6.4. *La suite de* Γ*-modules suivante est exacte :*

$$0 \to Map(Is(N),\mathbb{Z})^- \xrightarrow{2i\pi(T_{N,\mathbb{R}})^{-1}} \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} N \xrightarrow{\exp_{N,\mathbb{R}}}$$
$$(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} N)^* \xrightarrow{sign_{N,\mathbb{R}}} Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ,

$$\begin{aligned} Det_\chi([Map(Is(N),\mathbb{C})^-,2i\pi]) &= (2i\pi)^{Tr_\chi(\mathbb{C}[Is(N)])^-} \\ &= (2i\pi)^{r_{2,F}\chi(1)+a_2(\chi)} = (2i\pi)^{a_3(\chi)}, \\ Det_\chi([Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{C}),2]) &= 2^{Tr_\chi(\mathbb{C}[S_{N,\mathbb{R}}])} \\ &= 2^{(r_{1,F}-r'_{1,F})\chi(1)}. \end{aligned}$$

La suite exacte :

$$0 \to Map(S_{N,\infty},\mathbb{R}) \xrightarrow{\exp_S} Map(S_{N,\infty},\mathbb{R}^*) \longrightarrow Map(S_{N,\infty},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0$$

est scindée par l'application ln_S qui à f dans l'ensemble $Map(S_{N,\infty},\mathbb{R}^*)$ associe $w \longmapsto ln(|f(w)|)$.

THÉORÈME 5.3. *Soit* $Ln_{N,\mathbb{R}}$ *(resp.* $sign_{N,\mathbb{R}}$*) l'application de* $(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$ *dans* $Map(S_{N,\infty},\mathbb{R})$ *(resp.* $Map(S_{N,\infty},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$*) définie par*

$$Ln_{N,\mathbb{R}}(\lambda\otimes x) : w \longmapsto ln(|\lambda|^{f_{N,w}}\|x\|_w)$$

respectivement

$$sign_{N,\mathbb{R}}(\lambda\otimes x) : w \longmapsto sign(\lambda\sigma_w(x)).$$

La suite suivante de Γ*-modules est exacte :*

$$0 \to Map(Is(N,\mathbb{C}),\mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2\pi} Map(Is(N,\mathbb{C}),\mathbb{R})^- \xrightarrow{\exp_{N,\mathbb{R}}\circ(T_{N,\mathbb{R}})^{-1}}$$
$$(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} N)^* \xrightarrow{Ln_{N,\mathbb{R}}\oplus sign_{N,\mathbb{R}}} Map(S_{N,\infty},\mathbb{R}) \oplus Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

Remarque. Les conventions choisies entraînent que :

$$\forall\lambda\otimes x \in (\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} N)^*, \sum_{w\in S_{N,\infty}} Ln_{N,\mathbb{R}}(\lambda\otimes x)(w) = [N:\mathbb{Q}]ln|\lambda| + ln(|N_{N/\mathbb{Q}}(x)|)$$

7. Structure galoisienne des racines de l'unité

Soit μ_N le groupe des racines de l'unité contenues dans N. L'ordre de μ_N est noté $|\mu_N|$, c'est un entier pair. On pose :

$m_N = |\mu_N|/2$, si $|\mu_N|/2$ est impair

$m_N = |\mu_N|$ sinon.

En application des paragraphes précédents, la structure galoisienne du groupe des unités peut être décrite. Ce point de vue doit pouvoir permettre d'aborder l'interprétation algébrique de l'équation fonctionnelle des séries L d'Artin d'une façon nouvelle.

Soit σ_0 un automorphisme de N dans $\mathbb{C}$ et soit ζ une racine primitive m_N-ème de l'unité contenue dans N tels que $\sigma_0(\zeta) = e^{2i\pi/m_N}$. Pour tout σ dans $Is(N)$, il existe un unique entier i_σ compris entre 0 et $m_N - 1$, (inversible modulo m_N si $m_N \neq 1$) tel que :

$$\sigma(\zeta) = \sigma_0(\zeta)^{i_\sigma}.$$

L'entier i_σ ne dépend pas du choix de la racine ζ ; si i'_σ est l'entier défini à partir de l'automorphisme σ'_0, alors il existe un entier k inversible modulo m_N, $(ki_{\sigma'_0} \equiv 1 \mod m_N)$, tel que $\forall \sigma \in Is(N)$, $i_\sigma \equiv ki'_\sigma \mod m_N$. Comme $\overline{\sigma_0}(\zeta) = \sigma_0(\zeta)^{-1}, i_{\overline{\sigma}}$ est congru à $-i_\sigma$ modulo m_N, $(i_{\overline{\sigma}} = m_N - i_\sigma)$.

DEFINITION 7.1. *Soit $\{x\}$ la partie fractionnaire du nombre rationnel x ; ainsi $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \{x\} < 1$. On appelle module de Stickelberger, noté $MS(N)$, le sous $\mathbb{Z}$-module de $Map(Is(N), \mathbb{Q})$ engendré par les applications f_τ définies par :*

$$f_\tau(\sigma) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{i_\tau i_\sigma}{m_N}\right\}.$$

Exemples.

1) Soit $N = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ où ζ_m est une racine primitive m-ème de l'unité. Pour tout σ dans $Is(N)$, il existe $\gamma_\sigma \in Gal(N, \mathbb{Q})$ tel que $\sigma \circ \gamma_\sigma = \sigma_0$. L'isomorphisme de $\mathbb{Z}[Gal(N/\mathbb{Q})]$-module

$$f \mapsto \sum_{\tau \in Is(N)} f(\sigma)\gamma_\sigma$$

de $Map(Gal(N, \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$ sur $\mathbb{Q}[Gal(N/\mathbb{Q})]$ transforme $MS(N)$ en l'idéal engendré par l'élément de Stickelberger θ_0, (voir [W], page 95).

2) Si μ_N est d'ordre 2, $\zeta = 1$ et pour tout σ dans $Is(N)$, $\sigma(\zeta) = \sigma_0(\zeta)$, donc $i_\sigma = 0$; $MS(N)$ est le sous $\mathbb{Z}$-module de $Map(Is(N), \mathbb{Q})$ engendré par les applications f_τ telles que $\forall \sigma \in Is(N)$, $f_\tau(\sigma) = \frac{1}{2}$.

3) Si μ_N est d'ordre supérieur à 2, alors $Is(N, \mathbb{R})$ et $S_{N,\mathbb{R}}$ sont vides.

PROPOSITION 7.2. *Supposons que μ_N est d'ordre supérieur à 2. Le module $MS(N)$ est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module inclus dans $Map(Is(N), \mathbb{Q})^-$. Soit*

$$\mu_{N,\infty} = 2i\pi(MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z}))^-.$$

La restriction de $\exp_{N,\mathbb{R}} \circ (T_{N,\mathbb{R}})^{-1}$ à $\mu_{N,\infty}$ transforme

$$F : \sigma \mapsto 2i\pi \sum_{\tau \in Is(N)} \lambda_\tau\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{i_\tau i_\sigma}{m_N}\right\}\right)$$

en

$$(-1)^{\sum_\tau \lambda_\tau} \zeta^{-\sum_\tau \lambda_\tau i_\tau}$$

et donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[\gamma]$-modules :

$$0 \longrightarrow Map(Is(N), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} \mu_{N,\infty} \longrightarrow \mu_N \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Comme $i_{\overline{\sigma}} = m_N - i_\sigma$, on a $\frac{1}{2} - \left\{\frac{i_\tau i_{\overline{\sigma}}}{m_N}\right\} = -\frac{1}{2} + \left\{\frac{i_\tau i_\sigma}{m_N}\right\}$. Donc $MS(N)$ est inclus dans $Map(Is(N), \mathbb{Z})^-$.

Comme $\sigma(\zeta) = \exp(\frac{2i\pi i_\sigma}{m_N})$ et que $\exp_{N,\mathbb{R}} \circ (T_{N,\mathbb{R}})^{-1} = (T_{N,\mathbb{R}})^{-1} \circ \exp_{Is}$, on a

$$\begin{aligned}
\exp_{Is(F)}(\sigma) &= \exp(2i\pi \sum_{\tau \in Is(N)} \lambda_\tau(\frac{1}{2} - \left\{\frac{i_\tau i_\sigma}{m_N}\right\}) \\
&= \exp(2i\pi \sum_{\tau \in Is(N)} \lambda_\tau(\frac{1}{2} - \frac{i_\tau i_\sigma}{m_N})) \\
&= (-1)^{\sum \tau \lambda_\tau} \sigma(\zeta^{-\sum \tau \lambda_\tau i_\tau})
\end{aligned}$$

et cet élément est bien l'image par $(T_{N,\mathbb{R}})^{-1}$ de $(-1)^{\sum \tau \lambda_\tau} \zeta^{\sum \tau \lambda_\tau i_\tau}$. La surjectivité vient du fait que par définition de ζ, $-\zeta$ engendre μ_N.

PROPOSITION 7.3. *Supposons que μ_N est d'ordre 2. Soit*

$$\mu_{N,\infty} = 2i\pi(MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z}))^-$$

C'est le sous-module de $Map(Is(N),\mathbb{R})^-$ formé des éléments f tels que

$\forall\sigma \in Is(N),\ f(\sigma) - f(\overline{\sigma}) \in i\pi\mathbb{Z},$

$\exists\lambda_f \in \mathbb{Z},\ \exists g \in Map(Is(N),\mathbb{Z}),\ \forall\sigma \in Is(N),\ f(\sigma) = i\pi\lambda_f + 2i\pi g(\sigma).$

La restriction de $\exp_{N,\mathbb{R}} \circ (T_{N,\mathbb{R}})^{-1}$ *à* $\mu_{N,\infty}$ *transforme* $f \in \mu_{N,\infty}$ *en* $(-1)^{\lambda_f}$ *et donne une suite exacte de* $\mathbb{Z}[\Gamma]$*-modules :*

$$0 \to Map(Is(N),\mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} \mu_{N,\infty} \to \mu_N \xrightarrow{sign_{N,\mathbb{R}}} Sw(Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z}),2)/2Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z}) \to 0$$

Démonstration. On part de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Map(Is(N),2i\pi\mathbb{Z}) \longrightarrow 2i\pi(MS(N) + Map(Is(N),\mathbb{Z})) \xrightarrow{\exp_{Is}} \mu_N \longrightarrow 0.$$

Puis on applique la suite exacte de cohomologie, l'image de $sign_{N,\mathbb{R}}$ est l'ensemble des f dans $Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui sont constantes. En identifiant $Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z})/2Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z})$, on obtient le résultat.

Remarque. Considérons la suite exacte de $\mathcal{K}$-théorie pour S contenant 2 (voir [Q]) :

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \mathcal{K}^S_{0,rel}(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}^S_0(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{C}[\Gamma]).$$

1) On suppose que μ_N est d'ordre supérieur ou égal à 2. Donc, dans $\mathcal{K}^S_{0,rel}(\mathbb{Z}[\Gamma])$,

$$\begin{aligned}
&[Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, 2i\pi, (MS(N) + Map(Is(N),\mathbb{Z}))^-] \\
&\quad = \quad [Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, 2i\pi, Map(Is(N),\mathbb{Z})^-] \\
&\qquad + [Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, Id, MS(N) + Map(Is(N),\mathbb{Z})^-] \\
&\quad = \delta([\mathbb{C}[Is(N)]^-, 2i\pi]) + [MS(N) \cap Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, Id, MS(N)].
\end{aligned}$$

Soit θ_0 le $\mathbb{Q}[\Gamma]$-endomorphisme de $Map(Is(N),\mathbb{C})$ défini par

$$\forall f \in Map(Is(N),\mathbb{Q}),\ \theta_{0,N}(f) : \tau \longmapsto \sum_{\sigma\in Is(N)} \left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{i_\tau i_\sigma}{m_N}\right\}\right) f(\sigma).$$

Alors $MS(N) = \theta_{0,N}(Map(Is(N),\mathbb{Z}))$.

On a $\theta_{0,N}(\overline{f}) = -\theta_{0,N}(f)$, donc $\theta_{0,N}(Map(Is(N),\mathbb{C})^+) = 0$.

De plus

$$[MS(N)\cap Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, Id, MS(N)] = [MS(N)\cap Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, Id, Map(Is(N),\mathbb{Z})^-] + [Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, Id, MS(N)].$$

Alors $[Map(Is(N),\mathbb{Z})^-, Id, MS(N)] = \delta([Map(Is(N),\mathbb{C})^-, \theta_{0,N}])$.

2) On suppose que μ_N est d'ordre 2. Si $Map(S_{N,\mathbb{R}},\mathbb{Z})$ est non vide, alors pour tout f dans $\mu_{N,\infty}$, le coefficient λ_f est nul. La multiplication par $2i\pi$ est donc un isomorphisme de $Map(Is(N),\mathbb{Z})^-$ sur $\mu_{N,\infty}$. Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $MS(N) + Map(Is(N),\mathbb{Z})$ est isomorphe à $Sw(Map(Is(N),\mathbb{Z}),2)$. Si Γ est d'ordre impair, ce $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module est localement libre, stablement libre sur tout ordre maximal contenant $\mathbb{Z}[\Gamma]$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \oplus Map(Is(N),Z)_0 \arrow[r, "h_2 \oplus Id"] \arrow[d, "\varphi \oplus Id"'] & Z \oplus Map(Is(N),Z)_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi \oplus h_2"'] & \mu_N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Map(Is(N),Z) \arrow[r, "h_2"] & Sw(Map(Is(N),Z),2) \arrow[r] & \mu_N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où h_2 désigne la multliplication par 2 et $Map(Is(N),\mathbb{Z})_0$ désigne le noyau de l'application Tr de $Map(Is(N),\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{Z}$ qui à f associe $\sum_{\sigma\in Is(N)} f(\sigma)$ et φ applique $z \in \mathbb{Z}$ en l'application f telle que $\forall\sigma \in Is(N)$, $f(\sigma) = z$.

Soit la suite exacte de $\mathcal{K}$-théorie pour S contenant 2 :

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{Q}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \mathcal{K}_{0,rel}^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{Q}[\Gamma]).$$

Donc dans $\mathcal{K}_{0,rel}^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$

$$[Map(Is(N),\mathbb{Z}), h_2, MS(N) + Map(Is(N),\mathbb{Z})] = [\mathbb{Z}\oplus Map(Is(N),\mathbb{Z})_0, h_2 \oplus Id, \mathbb{Z}\oplus Map(Is(N),\mathbb{Z})_0] = \delta([\mathbb{Q}, h_2]).$$

Par l'application Det, on a un isomophisme entre

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{Q}[\Gamma])$$

et

$$Hom^+_{G_{\mathbb{Q}}}(R(\Gamma), \overline{\mathbb{Q}}^*)\ ;$$

alors $Det_x([\mathbb{Q}, h_2]) = 2^{<\chi,1>} = Det_\chi([\mathbb{Q}[\Gamma], 2e + 1 - e])$ où e désigne l'idempotent $|\Gamma|^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Pour tout nombre premier p ne divisant pas $2|\Gamma|$, $2e + 1 - e \in \mathbb{Z}_p[\Gamma]^*$. Pour tout nombre premier p different de 2, $2e + 1 - e$ est une unité de tout ordre maximal contenant $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$.

Les deux propositions précédentes se résument en le théorème :

THÉORÈME 7.4. *La suite de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules suivante est exacte*

$$0 \to Map(Is(N), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} \mu_{N,\infty} \to \mu_N \xrightarrow{sign_{N,\mathbb{R}}} Sw(Map(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}), 2)/2Map(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}) \to 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[Q] J. QUEYRUT, *S-groupe des classes d'un ordre arithmétique*, J. Algebra **76** (1982), 234–260.

[Sa] P. SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1971.

[Ta1] J. TATE, Thesis, J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London, 1967.

[Ta2] J. TATE, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en s = 0*, Birkhäuser, 1984.

[W] L. WASHINGTON, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1982.

Jacques Queyrut
Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux
CeReMaB, URA 226
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex 05
FRANCE