JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-FRANÇOIS JAULENT

Théorie ℓ-adique globale du corps de classes

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 10, n^{o} 2 (1998), p. 355-397

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1998__10_2_355_0>

© Université Bordeaux 1, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (http://jtnb.cedram.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **10** (2), 355–397

Théorie ℓ-adique globale du corps de classes

par Jean-François JAULENT

Résumé. Nous établissons les résultats fondamentaux de la théorie ℓ-adique globale du corps de classes pour les corps de nombres.

Abstract. We establish the fundamental results of the ℓ-adic class field theory for number fields.

Sommaire

0. Introduction et notations

0.1. **Position du problème.** La théorie globale du corps de classes, telle qu'elle fut développée notamment par Takagi, Artin et Chevalley, a pour but principal la description arithmétique des extensions abéliennes d'un corps de nombres donné, à l'aide des seuls éléments de ce corps. Dans sa

Manuscrit reçu le 3 octobre 1997.

formulation la plus ancienne, celle de Takagi, elle interprète ainsi le groupe de Galois d'une extension abélienne finie L/K de corps de nombres comme groupe de congruences attaché à un diviseur $\mathfrak{f}_{L/K}$ construit sur les places ramifiées dans cette extension. Cette description, aujourd'hui encore la plus efficace pour apprécier numériquement une situation donnée, souffre cependant d'être limitée au seul cas des extensions finies. L'introduction par Chevalley des groupes d'idèles, qui relie de façon lumineuse point de vue local et point de vue global, permet de pallier agréablement cette difficulté. Mais d'autres problèmes surgissent alors :

- d'abord, l'application de réciprocité d'Artin ψ, définie sur le groupe des classes d'idèles $C_K = J_K/K^\times$ du corps K, à valeurs dans le groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ de l'extension abélienne maximale K^{ab} de K, n'est jamais injective : si $[K : \mathbb{Q}] = r + 2c$ est la décomposition canonique du degré de K en ses contributions réelle et imaginaire, le noyau C_K^0 de ψ est, en effet, le produit d'une droite réelle $\mathbb{R}$, de c tores $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et de $r+c-1$ solénoïdes $(\mathbb{R}\oplus\widehat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z}$, où $\widehat{\mathbb{Z}}$ désigne comme d'ordinaire le complété profini de $\mathbb{Z}$ pour la topologie définie par ses sous-groupes d'indice fini. L'existence de "normes universelles" est ainsi une première source de complications dans la théorie.

- ensuite, la décomposition canonique du groupe de Galois G_K comme produit direct de ses p-composantes $G_K^{(p)} = \varprojlim_n G_K/G_K^{p^n}$, pour tous les premiers p, ne se traduit pas immédiatement en termes de classes d'idèles, puisque ni le numérateur J_K ni le dénominateur $K^\times$ ne sont des $\widehat{\mathbb{Z}}$-modules ; ce qui est une deuxième source de difficultés en particulier dans l'étude des pro-p-extensions.

- enfin, si S est un ensemble d'au moins deux places finies de K, le produit $K_S^\times = \prod_{\mathfrak{p}\in S} K_\mathfrak{p}^\times$ des groupes multiplicatifs des complétés de K aux places contenues dans S s'injecte naturellement dans le groupe C_K, mais la topologie induite sur l'image par la topologie usuelle de C_K n'est pas le produit des topologie des $K_\mathfrak{p}^\times$; ce qui constitue une troisième source de problèmes.

L'approche ℓ-adique de la théorie globale du corps de classes vise précisément à remédier à l'ensemble de ces difficultés ensemblistes, algébriques ou topologiques par une modification convenable du groupe des classes d'idèles et de sa topologie conduisant in fine à un isomorphisme (algébrique et topologique) entre le groupe C_K modifié et le groupe de Galois G_K pleinement compatible avec les opérations de semi-localisation. Quoiqu'il soit naturellement possible de mener cette construction pour tous les premiers simultanément, nous avons choisi, pour des raisons de simplicité, de faire choix une fois pour toutes d'un nombre premier ℓ et de ne travailler que sur les ℓ-parties des groupes précédents : la théorie ℓ-adique ainsi développée fournit donc un isomorphisme (de groupes topologiques) entre le ℓ-adifié $\mathcal{C}_K$ du groupe d'idèles et le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = G_K^{(\ell)}$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K. Bien entendu, il est toujours possible, en prenant tous les ℓ ensemble, d'identifier le produit G_K des divers $\mathcal{G}_K$ avec celui $\widehat{\mathcal{C}}_K$ des $\mathcal{C}_K$, ce qui revient dans les constructions précédentes à remplacer l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques par le produit $\widehat{\mathbb{Z}}$ de tous les $\mathbb{Z}_\ell$. Mais cela a souvent pour conséquence de rendre moins visible les rôles très différents, dans les énoncés du corps de classes, de la ramification modérée et de celle sauvage ; de sorte que c'est la présentation ℓ-adique qui nous parait traduire au mieux la réalité arithmétique.

L'exposé fondateur de la théorie ℓ-adique globale du corps de classes est le chapitre I.1 d'un travail de thèse sur l'arithmétique des ℓ-extensions soutenu en 1986 (cf. [J0]) qui, contrairement à d'autres sections de la thèse, n'avait jamais fait jusqu'ici l'objet d'une publication spécifique. Compte tenu de l'intérêt propre de l'approche ℓ-adique de la théorie du corps de classes, il nous a donc semblé important d'en donner ici une présentation complète en liaison avec quelques développements plus récents.

Notre point de départ est la théorie de Chevalley telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le livre d'Artin et Tate [AT]. Nous construisons d'abord les $\mathbb{Z}_\ell$-modules fondamentaux (section 1) et établissons ensuite les principaux résultats de la théorie ℓ-adique (section 2). Dans une dernière partie, nous abordons enfin des questions de dualité liées notamment aux classes logarithmiques (section 3). Les notations utilisées sont rassemblées dans un index. Un appendice récapitule les groupes de normes attachés à quelques unes des principales pro-ℓ-extensions abéliennes d'un corps de nombres donné.

0.2. **Index des principales notations.** De façon générale, les objets standard sont représentés par un caractère latin ; leurs ℓ-adifiés respectifs (par exemple leur tensorisé par $\mathbb{Z}_\ell$) par un caractère anglais ; leurs co-ℓ-adifiés le sont par un caractère gothique.

Notations latines :

$K^\times$ le groupe multiplicatif d'un corps de nombres K ;
J_K le groupe des idèles (au sens habituel) de K,
U_K le sous-groupe des idèles unités ;
$D_K = J_K/U_K$ le groupe des diviseurs ;
P_K le sous-groupe des diviseurs principaux ;
$Cl_K = D_K/P_K$ le groupe des classes de diviseurs (i.e. le groupe des classes d'idéaux au sens restreint) ;
E_K (resp. E_K^{ord}) le groupe des unités au sens restreint (resp. ordinaire) ;
Pl_K (resp. $Pl_K(\infty), Pl_K(\ell)$) l'ensemble des places de K (resp. à l'infini, divisant ℓ) ;
r, c, l les nombres respectifs de places réelles, complexes ou ℓ-adiques de K ;

S un ensemble fini de places de K et s son cardinal ;
E_K^S le groupe des S-unités (au sens restreint) de K ;
Cl_K^S le groupe des S-classes de diviseurs (au sens restreint) ;
$K_{\mathfrak{p}}$ le complété de K en la place $\mathfrak{p}$;
$\pi_{\mathfrak{p}}$ une uniformisante de $K_{\mathfrak{p}}$;
$K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ le groupe multiplicatif de $K_{\mathfrak{p}}$ et $U_{\mathfrak{p}}$ son sous-groupe unité ;
$\mu_{\mathfrak{p}}^0$ (resp. $\mu_{\mathfrak{p}}^1$) le sous-groupe des racines de l'unité d'ordre étranger à $\mathfrak{p}$ (resp. d'ordre $\mathfrak{p}$-primaire) ;
$v_{\mathfrak{p}}$ (resp. $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$) la valuation (resp. la valuation logarithmique) sur $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$.

Notations anglaises :

$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ le ℓ-groupe des idèles principaux (le rayon) ;
$\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$ le ℓ-groupe des unités (au sens restreint) ;
$\mu_K = \mathcal{R}_K^{\mathrm{tor}}$ le ℓ-groupe des racines de l'unité dans $\mathcal{R}_K$;
$\mathcal{D}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D_K$ le ℓ-groupe des diviseurs ;
$\mathcal{P}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} P_K$ son sous-groupe principal ;
$\mathcal{C}\ell_K = \mathcal{D}_K/\mathcal{P}_K$ le ℓ-groupe des classes de diviseurs de K ;
$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$ le compactifié ℓ-adique du groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$;
$\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{\ell^n}$ le sous-groupe unité de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$;
$\mu_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{tor}}$ le ℓ-groupe des racines de l'unité dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$;
$\mathcal{J}_K = \prod^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ le ℓ-groupe des idèles de K ;
$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$ le ℓ-groupe des classes d'idèles ;
$\mathcal{U}_K = \prod \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe des idèles unités ;
$\tilde{\mu}_K = \prod \mu_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe fermé engendré par les racines de l'unité ;
$\mu_K^{\mathrm{loc}} = \mathcal{R}_K \cap \tilde{\mu}_K$ le sous-groupe de $\mathcal{R}_K$ formé des racines locales de l'unité ;
$\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe des unités logarithmiques de $\mathcal{J}_K$;
$\tilde{\mathcal{J}}_K$ le noyau dans $\mathcal{J}_K$ de la formule du produit pour les valeurs absolues ;
$\tilde{\mathcal{D}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K$ le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques (de degré nul) ;
$\tilde{\mathcal{P}}_K = \mathcal{R}_K\tilde{\mathcal{U}}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K$ son sous-groupe principal ;
$\tilde{\mathcal{C}\ell}_K = \tilde{\mathcal{D}}_K/\tilde{\mathcal{P}}_K$ le ℓ-groupe des classes logarithmiques ;
$\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \tilde{\mathcal{U}}_K$ le ℓ-groupe des unités logarithmiques globales ;
$\mathcal{H}_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K\tilde{\mu}_K$ le quotient de $\mathcal{C}_K$ par l'image de $\tilde{\mu}_K$;
$\mathcal{T}_K = \mathcal{H}_K^{\mathrm{tor}}$ le sous-groupe de torsion de $\mathcal{H}_K$;
$\mathcal{J}_K^S = \mathcal{U}^S\mathcal{R}_S = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ le ℓ-groupe des S-idèles ;
$\mathcal{E}_K^S = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{U}_K^S$ le ℓ-groupe des S-unités globales ;
$\mathcal{C}\ell_K^S = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K\mathcal{U}_K^S$ le ℓ-groupe des S-classes de diviseurs.

Notations gothiques :

$\mathfrak{J}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{J}_K$ le ℓ-groupe des coïdèles de K ;
$\mathfrak{U}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_K$ le sous-groupe des coïdèles unités ;

$\tilde{\mathfrak{U}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{U}}_K$ le sous-groupe des coïdèles unités logarithmiques ;
$\mathfrak{D}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{D}_K$ le ℓ-groupe des codiviseurs ;
$\tilde{\mathfrak{D}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{D}}_K$ le ℓ-groupe des codiviseurs logarithmiques ;
$\mathfrak{R}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K$ le pseudo-radical global ;
$\mathfrak{P}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{P}_K$ le ℓ-groupe des codiviseurs principaux ;
$\tilde{\mathfrak{P}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{P}}_K$ son analogue logarithmique ;
$\mathfrak{E}_K^{\mathrm{ord}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_K^{\mathrm{ord}}$ le ℓ-groupe des coünités (au sens ordinaire) ;
$\tilde{\mathfrak{E}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K$ le ℓ-groupe des coünités logarithmiques ;
$\mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mu_K^{\mathrm{loc}}$;
$\mathfrak{C}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_K$ le ℓ-groupe des classes de coïdèles ;
$\mathfrak{Cl}_K = \mathrm{Ker}(\mathfrak{R}_K \to \mathfrak{J}_K)$ le ℓ-groupe des coclasses d'idèles ;
$\mathfrak{H}_K = \mathrm{Ker}(\mathfrak{R}_K \to \tilde{\mathfrak{D}}_K)$ le pseudo-radical hilbertien ;
$\mathfrak{T}_K = \mathfrak{H}_K/\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}}$ le quotient de $\mathfrak{H}_K$ par son sous-module divisible maximal.

1. Construction des $\mathbb{Z}_\ell$-modules fondamentaux

Le nombre premier ℓ étant fixé, nous désignons par $\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_k \mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers ℓ-adiques.

D'autre part, pour chaque place non complexe $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres K, nous notons $v_\mathfrak{p}$ la valuation associée, à valeurs dans $\mathbb{Z}$ pour $\mathfrak{p}$ ultramétrique, dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $\mathfrak{p}$ réelle.

1.1. Le ℓ-adifié du groupe des idèles.

A chaque corps de nombres K (de degré fini sur $\mathbb{Q}$), nous allons associer deux $\mathbb{Z}_\ell$-modules : le premier $\mathcal{R}_K$ global, défini à partir du groupe multiplicatif $K^\times$ des éléments non nuls de K ; le second $\mathcal{J}_K$ semi-local, construit à partir des groupes multiplicatifs $K_\mathfrak{p}^\times$ des complétés non complexes de K.

Définition 1.1. *Etant donné un corps de nombres K, nous appelons ℓ-groupe des idèles principaux de K et nous notons $\mathcal{R}_K$ le tensorisé ℓ-adique du groupe multiplicatif de ses éléments non nuls :*

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times.$$

Le groupe $\mathcal{R}_K$ est la réunion des ℓ-groupes de S-unités $\mathcal{E}_K^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E_K^S$, lorsque S parcourt les ensembles finis de places de K. Chacun des $\mathcal{E}_K^S$ est compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-module nœthérien et $\mathcal{R}_K$ est lui-même un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique pour la limite inductive des topologies des $\mathcal{E}_K^S$.

Par définition de la topologie limite inductive, les sous-modules ouverts de $\mathcal{R}_K$ sont exactement ceux qui intersectent chacun des $\mathcal{E}_K^S$ suivant un sous-module relatif ouvert, c'est à dire (puisque les $\mathcal{E}_K^S$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}_\ell$) suivant un sous-module d'indice fini. La topologie ainsi obtenue sur $\mathcal{R}_K$ est donc strictement plus fine que celle définie par ses sous-modules d'indice fini.

Remarques 1. (i) L'application canonique de $K^\times$ dans $\mathcal{R}_K$ n'est pas généralement injective. Plus précisément son noyau est le sous-groupe μ'_K de $K^\times$ formé des racines de l'unité dans K d'ordre étranger à ℓ. Le quotient $K^\times/\mu'_K$, qui s'injecte dans $\mathcal{R}_K$, s'identifie à un sous-groupe partout dense de $\mathcal{R}_K$.

(ii) Convenons d'ordonner les places de K en posant $S_n = \{\mathfrak{p} \in Pl_K | N\mathfrak{p} \leq n\}$ (avec la convention $N\mathfrak{p} = \pm 1$ pour les places archimédiennes). Nous avons évidemment $K^\times = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_K^{S_n}$ et chacun des $E_K^{S_n} = \{x \in K^\times | v_\mathfrak{p}(x) = 0,\ \forall\mathfrak{p} \notin S_n\}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. En particulier $\mathcal{R}_K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_K^{S_n}$ est réunion dénombrable de $\mathbb{Z}_\ell$-modules compacts.

(iii) Le groupe $\mathcal{R}_K$ s'identifie à un sous-module strict de la limite projective $\mathcal{K}^\times = \varprojlim_k K^\times/K^{\times\ell^k}$; cependant la topologie de $\mathcal{R}_K$ n'est pas la restriction à $\mathcal{R}_K$ de la topologie naturelle de $\mathcal{K}^\times$ définie par les sous-modules $\mathcal{K}^{\times\ell^k}$.

Définition et proposition 1.2. *Pour chaque place $\mathfrak{p}$ du corps de nombres K, nous notons*

$$\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim_k K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell^k}$$

le ℓ-adifié du groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$ du complété de K en $\mathfrak{p}$. Le groupe $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module nœthérien donc compact pour la topologie définie par ses sous-modules d'indice fini.

(i) Si $\mathfrak{p}$ est archimédienne, deux cas se présentent : si $\mathfrak{p}$ est réelle et ℓ égal à 2, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; il est nul dans tous les autres cas.

(ii) Si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, le choix d'une informisante $\pi_\mathfrak{p}$ permet d'écrire formellement $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \mathcal{U}_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell}$ en notant encore $\pi_\mathfrak{p}$ l'image de $\pi_\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ et en désignant par $\mathcal{U}_\mathfrak{p} = \varprojlim_k U_\mathfrak{p}/U_\mathfrak{p}^{\ell^k}$ la limite projective des quotients d'exposant ℓ-primaire du sous-groupe des unités du corps local $K_\mathfrak{p}$:

- lorsque $\mathfrak{p}$ divise ℓ, le groupe $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ n'est autre que le groupe des unités principales de $K_\mathfrak{p}$;

- lorsque $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, il s'identifie au ℓ-sous-groupe de Sylow $\mu_\mathfrak{p}$ du groupe des racines de l'unité dans $K_\mathfrak{p}$. Dans les deux cas nous disons que $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ est le sous-groupe des unités de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$.

Preuve. (i) Si $\mathfrak{p}$ est une place archimédienne, le groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$ est soit divisible, lorsque $\mathfrak{p}$ est complexe ; soit le produit de $\{\pm 1\}$ par un groupe divisible, lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle. La limite projective $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ est donc nulle dans le premier cas, isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell/2\mathbb{Z}_\ell$ dans le second.

(ii) Si $\mathfrak{p}$ est une place ultramétrique, la décomposition du groupe multiplicatif du complété

$$K_\mathfrak{p}^\times = \mu_\mathfrak{p}^0 U_\mathfrak{p}^1 \pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}}$$

fait intervenir le groupe $\mu_{\mathfrak{p}}^0$ des racines de l'unité d'ordre étranger à $\mathfrak{p}$, le groupe $U_{\mathfrak{p}}^1$ des unités principales, et une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$.

- Si $\mathfrak{p}$ est au-dessus de ℓ, le groupe $\mu_{\mathfrak{p}}^0$ est ℓ-divisible et le groupe $U_{\mathfrak{p}}^1$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module nœthérien, isomorphe comme tel à la limite projective de ses quotients finis. Il vient donc dans ce cas :

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim_k U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{\ell^k} = \varprojlim_k U_{\mathfrak{p}}^1/U_{\mathfrak{p}}^{1\ell^k} \simeq U_{\mathfrak{p}}^1, \text{comme annoncé.}$$

- Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, le groupe $\mu_{\mathfrak{p}}^0$ est le produit direct de son ℓ-sous-groupe de Sylow $\mu_{\mathfrak{p}}$ et de son sous-groupe ℓ-divisible $\mu'_{\mathfrak{p}}$; tandis que le groupe $U_{\mathfrak{p}}^1$, qui est un $\mathbb{Z}_p$-module (avec $p \neq \ell$), est donc ℓ-divisible. Il suit alors :

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim_k U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{\ell^k} \simeq \mu_{\mathfrak{p}}, \text{comme annoncé.}$$

Dans les deux cas, le groupe $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ est le produit direct de $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ et du $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension 1 engendré par l'image de l'uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$. □

Remarques 2. (i) Contrairement à $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, le tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathfrak{p}}^\times$ n'est pas, lui, un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini : la décomposition $U_{\mathfrak{p}}^1 \simeq \mu_{\mathfrak{p}}^1 \mathbb{Z}_p^{d_{\mathfrak{p}}}$ du sous-groupe principal faisant apparaître un $\mathbb{Z}_p$-module libre de dimension $d_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]$, donc un $\mathbb{Z}$-module sans torsion de rang infini, le produit tensoriel $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathfrak{p}}^\times$ est lui-même de rang infini sur $\mathbb{Z}_\ell$.

(ii) Il est commode de poser $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = 1$ lorsque $\mathfrak{p}$ est archimédienne réelle et, pour $\ell = 2$, de prendre $\pi_{\mathfrak{p}} = -1$, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell/2\mathbb{Z}_\ell}, \text{ par analogie avec le cas ultramétrique.}$$

Définition 1.3. *Par ℓ-groupe des idèles d'un corps de nombres K, nous entendons le produit*

$$\mathcal{J}_K = \prod\nolimits_{\mathfrak{p} \in Pl_K}^{\text{res}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$$

des ℓ-adifiés des groupes multiplicatifs des complétés de K, restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in Pl_K}$ dont tous les éléments sont des unités à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Le groupe $\mathcal{J}_K$ est la réunion des ℓ-groupes $\mathcal{J}_K^S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$, lorsque S parcourt les ensembles finis de places de K. Chacun des $\mathcal{J}_K^S$ est compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-module produit et $\mathcal{J}_K$ est lui-même un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique pour la limite inductive des topologies des $\mathcal{J}_K^S$.

Par définition de la topologie limite inductive, les sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ sont ceux qui intersectent chacun des $\mathcal{J}_K^S$ suivant un sous-module relatif ouvert. De fait, il est possible d'exhiber une base de sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ en procédant comme suit : pour chaque place ultramétrique $\mathfrak{p}$ de K, faisons choix d'une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$; si $\mathfrak{p}$ est réelle prenons $\pi_p = -1$; et, si $\mathfrak{p}$ est complexe $\pi_{\mathfrak{p}} = 1$. Cela posé, le groupe $\mathcal{J}_K$ s'écrit comme somme directe topologique du sous-module compact $\mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \mathcal{U}_\mathfrak{p}$, formé des éléments unités, et du $\mathbb{Z}_\ell$-module multiplicatif $\underset{\mathfrak{p}\in Pl_K}{\oplus} \pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell}$ construit sur les $\pi_\mathfrak{p}$, qui s'identifie au ℓ-groupe $\mathcal{D}_K = (\underset{\mathfrak{p}\nmid\infty}{\oplus} \mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell}) \oplus (\underset{\mathfrak{p} \text{ réel}}{\oplus} \mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell/2\mathbb{Z}_\ell})$ des diviseurs de K ;

$$\mathcal{J}_K \simeq \mathcal{U}_K \oplus \mathcal{D}_K.$$

Les produits $(\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \mathcal{U}'_\mathfrak{p}) \oplus (\underset{\mathfrak{p}\in Pl_K}{\oplus} \pi_\mathfrak{p}^{\ell^{n_\mathfrak{p}}\mathbb{Z}_\ell})$ où, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, le facteur $\mathcal{U}'_\mathfrak{p}$ désigne un sous-module d'indice fini de $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ égal à $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ pour presque tout $\mathfrak{p}$, et $n_\mathfrak{p}$ un entier naturel arbitraire, forment une base de sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$.

Remarques 3. (i) L'application canonique du groupe des idèles J_K dans le ℓ-adifié $\mathcal{J}_K$ n'est jamais injective : son noyau est le produit $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_\mathfrak{p}^{\times 2} \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mu_\mathfrak{p}^0 \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell\infty} \mu'_\mathfrak{p} U_\mathfrak{p}^1$; son image est un sous-groupe partout dense de $\mathcal{J}_K$.

(ii) Convenons d'ordonner les places de K en posant $S_n = \{\mathfrak{p} \in Pl_K | N\mathfrak{p} \leq n\}$ (avec la convention $N\mathfrak{p} = \pm 1$ pour les places archimédiennes). Nous avons évidemment $\mathcal{J}_K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_K^{S_n}$, ce qui montre que $\mathcal{J}_K$ est réunion dénombrable de $\mathbb{Z}_\ell$-modules compacts.

(iii) Le groupe $\mathcal{J}_K$ s'identifie naturellement à un sous-module strict du produit $\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$ des compactifiés $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$. Cependant, la topologie de $\mathcal{J}_K$ n'est pas la restriction à $\mathcal{J}_K$ du produit des topologies des $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$.

1.2. Définition du ℓ-groupe des classes d'idèles.

Théorème et définition 1.4. *L'application naturelle du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ du groupe multiplicatif du corps K dans le ℓ-adifié $\mathcal{J}_K$ du groupe des idèles de K, qui est induite par l'injection diagonale de K dans le produit de ses complétés $\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} K_\mathfrak{p}$, est un monomorphisme continu. Le groupe topologique quotient*

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

est un $\mathbb{Z}_\ell$-module compact. Nous disons que c'est le ℓ-groupe des classes d'idèles du corps K.

Preuve. Partons de l'injection diagonale $K^\times \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} K_\mathfrak{p}^\times$ du groupe multiplicatif de K dans le produit de ceux de ses complétés. Par passage au quotient, nous en déduisons, pour chaque entier k, un morphisme naturel

$$K^\times / K^{\times \ell^k} \to \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times \ell^k},$$

qui est injectif lorsque ℓ est impair, et dont le noyau est d'ordre 1 ou 2 dans tous les cas (cf. [AT], Ch. X, §1, th.1). Par passage à la limite projective, nous obtenons par conséquent un morphisme injectif :

$$\mathcal{K}^\times = \varprojlim_k K^\times/K^{\times\ell^k} \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \varprojlim_k K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell^k} = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \mathcal{R}_\mathfrak{p}.$$

Sa restriction au départ à $\mathcal{R}_K$, à l'arrivée à $\mathcal{J}_K$, est le $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme cherché. Comme il est injectif d'après ce qui précède, nous identifierons désormais $\mathcal{R}_K$ avec son image canonique dans $\mathcal{J}_K$. Cela étant, nous allons établir successivement :

(i) que l'application naturelle de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{J}_K$ est continue ;
(ii) que $\mathcal{R}_K$ est fermé dans $\mathcal{J}_K$;
(iii) que le quotient $\mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module compact.

(i) Le premier point résulte de la définition de la topologie limite inductive : pour chaque ensemble fini S de places de K, le groupe $\mathcal{E}_K^S = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^S$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini donc, d'une façon et d'une seule, un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique. En particulier la topologie de $\mathcal{E}_K^S$ est induite par celle de $\mathcal{J}_K^S$. Si donc $\mathcal{O}_K$ est un sous-module ouvert de $\mathcal{J}_K$, les sous-modules $\mathcal{O}_K \cap \mathcal{J}_K^S$ étant ouverts dans les $\mathcal{J}_K^S$, il en est de même des sous-modules $\mathcal{O}_K \cap \mathcal{E}_K^S$ dans les $\mathcal{E}_K^S$; ce qui veut dire que $\mathcal{O}_K \cap \mathcal{R}_K$ est un sous-module ouvert de $\mathcal{R}_K$. En particulier l'injection canonique de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{J}_K$ est bien continue.

(ii) Le second point s'établit comme suit : étant donné un idèle généralisé $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}_K$ qui n'est pas dans $\mathcal{R}_K$, fixons S assez grand contenant les places archimédiennes, pour avoir $\mathfrak{x} \in \mathcal{J}_K^S$; puis, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K n'appartenant pas à S, choisissons $n_\mathfrak{p}$ assez grand, de telle sorte que le diviseur $\mathfrak{p}^{\ell^{n_\mathfrak{p}}}$ soit principal (dans le ℓ-groupe $\mathcal{D}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} D_K$ des diviseurs de K). Cela étant, comme $\mathcal{E}_K^S$ est fermé dans $\mathcal{J}_K^S$, il existe un sous-module ouvert $\mathcal{O}_K^S$ de $\mathcal{J}_K^S$ dont le translaté $\mathfrak{x}\mathcal{O}_K^S$ ne rencontre pas $\mathcal{E}_K^S$. Le $\mathbb{Z}_\ell$-module $\mathcal{O}_K$ engendré dans $\mathcal{J}_K$ par $\mathcal{E}_K^S$ et les éléments $\pi_\mathfrak{p}^{\ell^{n_\mathfrak{p}}}$ pour $\mathfrak{p} \in S$ est alors un sous-module ouvert de $\mathcal{J}_K$ dont le translaté $\mathfrak{x}\mathcal{O}_K$ ne rencontre pas $\mathcal{R}_K$.

(iii) Pour établir le troisième point, nous allons montrer que l'image $\mathcal{U}_K\mathcal{R}_K/\mathcal{R}_K \simeq \mathcal{U}_K/\mathcal{E}_K$ dans $\mathcal{C}_K$ du sous-module compact $\mathcal{U}_K$ de $\mathcal{J}_K$ formé des idèles unités en est un sous-module d'indice fini (de sorte que $\mathcal{C}_K$ sera compact comme réunion finie de compacts). □

Or, cela résulte de la proposition :

Proposition 1.5. *Le quotient $\mathcal{J}_K/\mathcal{U}_K\mathcal{R}_K$ du ℓ-groupe des classes d'idèles du corps K par le sous-groupe formé des classes des idèles unités s'identifie canoniquement au ℓ-groupe fini des classes de diviseurs de K :*

$$\mathcal{J}_K/\mathcal{U}_K\mathcal{R}_K \simeq \mathcal{C}\ell_K.$$

Démonstration. Le groupe des diviseurs d'un corps de nombres est le groupe abélien libre construit sur ses valuations : Comme la valuation $v_\mathfrak{p}$ associée à une place de K est triviale si $\mathfrak{p}$ est complexe, à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si

$\mathfrak{p}$ est réelle, et dans $\mathbb{Z}$ si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, le groupe D_K est le produit direct de r_K exemplaires de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et du groupe Id_K des idéaux de K. Son quotient D_K/P_K par le sous-groupe des diviseurs principaux (i.e. par l'image canonique de $K^\times$ dans D_K) est fini d'après la géométrie des nombres : dans la terminologie des idéaux, c'est le groupe des classes au sens restreint. Son ℓ-sous-groupe de Sylow $\mathcal{C}\ell_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} (D_K/P_K)$ est donc canoniquement le quotient $\mathcal{D}_K/\mathcal{P}_K$ du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{D}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D_K$ du groupe des diviseurs par celui $\mathcal{P}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} P_K$ du sous-groupe principal P_K. Maintenant, $\mathcal{D}_K$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{J}_K/\mathcal{U}_K$, et $\mathcal{P}_K$ est l'image canonique de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{D}_K$. $\square$

La correspondance entre ℓ-groupes de classes d'idèles et de diviseurs peut ainsi se résumer par le diagramme commutatif exact (où toutes les flèches sont des $\mathbb{Z}_\ell$-morphismes) :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}_K/\mathcal{E}_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}_K = \prod^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{P}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} P_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}\ell_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 1

Scolie 1.6. *Pour tout ensemble fini de S de places de K, le quotient $\mathcal{C}\ell_K^S = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K\mathcal{U}_K^S$ du ℓ-groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}_K$ par le sous-groupe $\mathcal{C}_K(S) \simeq \mathcal{J}_K^S/\mathcal{E}_K^S$ (des classes des idèles unités en dehors de S) s'identifie canoniquement au quotient $\mathcal{C}\ell_K/\mathcal{C}\ell_K(S)$ du ℓ-groupe des classes de diviseurs du corps K par le sous-groupe engendré par les classes des diviseurs construits sur les places de S. Nous disons que $\mathcal{C}\ell_K^S$ est le ℓ-groupe des S-classes de diviseurs du corps K.*

1.3. **Valeurs absolues ℓ-adiques principales et formule du produit.** On pourrait craindre que la ℓ-adification des groupes d'idèles fasse disparaître la classique formule du produit pour les valeurs absolues. Il n'en est rien, à condition naturellement de remplacer les valeurs absolues habituelles par des valeurs absolues ℓ-adiques convenables.

Désignons pour cela par $\mathbb{Z}_\ell^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau des nombres ℓ-adiques, par $U_\ell^1 = 1+\ell\mathbb{Z}_\ell$ le sous-groupe des unités principales de $\mathbb{Z}_\ell$, et par $u \mapsto < u >$ la surjection canonique de $\mathbb{Z}_\ell^\times$ sur U_ℓ^1 (de sorte que, pour ℓ impair, le quotient $u/ < u >$ est l'unique racine de l'unité dans $\mathbb{Z}_\ell$ qui est congrue à u modulo ℓ ; tandis que si ℓ vaut 2, $< u >$ est toujours égal à u). Cela étant nous avons :

Définition 1.7. *Etant donnée une place $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres K, nous appelons valeur absolue ℓ-adique principale d'un élément $x_\mathfrak{p}$ du groupe $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ et nous notons $|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$, l'élément du $\mathbb{Z}_\ell$-module multiplicatif $U_\ell^1 = 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$ défini par:*

$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$, *si $\mathfrak{p}$ est complexe ;*
$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} =< sg(x_\mathfrak{p}) >$, *si $\mathfrak{p}$ est réelle ;*
$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} =< N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})} >$, *si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique et étrangère à ℓ ;*
$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} =< N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(x_\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})} >$, *si $\mathfrak{p}$ est au-dessus de ℓ.*
Enfin, nous appelons valeur absolue ℓ-adique principale d'un élément x de $\mathcal{R}_K$ relativement à la place $\mathfrak{p}$, et nous notons $|x|_\mathfrak{p}$ la valeur absolue ℓ-adique principale de l'élément $s_\mathfrak{p}(x)$, où $s_\mathfrak{p}$ est la surjection canonique de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$, induite par l'injection naturelle de $K^\times$ dans $K_\mathfrak{p}^\times$.

Remarques 4. (i) La définition donnée ici diffère de celle de Tate (cf. [Ta], Ch. VI, §1, déf. 1.1), qui ne s'étend pas aux $\mathbb{Z}_\ell$-modules. Plus précisément, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, la quantité $|x|_\mathfrak{p}$ est le crochet de la valeur absolue de Tate ; c'est pourquoi nous parlons de valeur absolue principale.

(ii) L'application $x_\mathfrak{p} \mapsto |x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$ est trivialement un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ dans U_ℓ. En particulier, elle est continue et fermée pour la topologie naturelle de ces deux modules. Si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, son image $|\mathcal{R}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$ est, en outre, un sous-module d'indice fini de U_ℓ.

Proposition 1.8 (Formule du produit pour les valeurs absolues).
L'application

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \longrightarrow \| \mathfrak{x} \| \underset{\text{déf}}{=} \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} |\mathfrak{x}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$$

est un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme continu du ℓ-groupe $\mathcal{J}_K$ des idèles du corps K sur le groupe U_ℓ des unités principales de l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$. Son noyau $\tilde{\mathcal{J}}_K$ est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$ qui contient le tensorisé ℓ-adique $\mathcal{R}_K$ du groupe multiplicatif $K^\times$.

Démonstration. Remarquons d'abord que la quantité $\prod |\mathfrak{x}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$ est bien définie puisque, pour chaque idèle $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}_K$, les composantes $\mathfrak{x}_\mathfrak{p}$ étant des unités pour presque tout $\mathfrak{p}$, le produit infini n'a en fait qu'un nombre fini de facteurs distincts de 1. Cela étant, pour montrer que l'application $\mathfrak{x} \mapsto \| \mathfrak{x} \|$ est continue sur $\mathcal{J}_K$, il nous suffit, d'après la propriété universelle de la topologie limite inductive, de vérifier la continuité de sa restriction au sous-module

$\mathcal{J}_K^S$, pour chaque ensemble fini S assez grand de places de K. Pour cela, nous pouvons supposer que S contient les places au-dessus de ℓ, auquel cas nous avons $\| \mathfrak{x} \| = \prod_{\mathfrak{p}\in S} |\mathfrak{x}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$, pour chaque $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}_K^S$; et la continuité de $\|\cdot\|$ résulte de celle des applications $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ sur chacun des facteurs $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$.

Enfin, pour établir la formule du produit, il suffit de noter qu'elle est trivialement vérifiée sur le corps des rationnels, puis d'écrire que l'on a, pour tout x de $\mathcal{R}_K$:

$$\| x \|_K = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K} |x|_\mathfrak{p} = \prod_{p\in Pl_\mathbb{Q}} \prod_{\mathfrak{p}|p} |x|_\mathfrak{p} = \prod_{p\in Pl_\mathbb{Q}} \prod_{\mathfrak{p}|p} |N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(x)|_p$$
$$= \prod_{p\in Pl_\mathbb{Q}} |N_{K/\mathbb{Q}}(x)| = \| N_{K/\mathbb{Q}}(x) \|_\mathbb{Q} = 1.$$

□

Corollaire 1.9. *Le noyau $\tilde{\mathcal{J}}_K$ de la formule du produit pour les valeurs absolues ℓ-adiques sur K est l'image réciproque par la norme arithmétique $N_{K/\mathbb{Q}}$ du même noyau $\tilde{\mathcal{J}}_\mathbb{Q}$ pour le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.*

Preuve. On a, en effet, $\| \mathfrak{x} \|_K = \| N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{x}) \|_\mathbb{Q}$ pour tout $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}_K$, donc $\tilde{\mathcal{J}}_K = {}^{-1}N_{K/\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{J}}_\mathbb{Q})$. □

Proposition 1.10. *Soit $\mathfrak{p}$ une place de K et $|\cdot|_\mathfrak{p}$ la valeur absolue ℓ-adique principale associée.*

(i) Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, le noyau $\tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ de l'application $|\cdot|_\mathfrak{p}$ est le sous-module des unités de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$:

$$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1 \Leftrightarrow x_\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_\mathfrak{p}.$$

(ii) Si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, le noyau $\tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ de l'application $|\cdot|_\mathfrak{p}$ est caractérisé par la condition :

$$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Log}_\ell N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x_\mathfrak{p}) = \mathrm{Tr}_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{Log}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = 0.$$

Le groupe $\tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ est le produit direct du sous-groupe $\mu_\mathfrak{p}$ des racines de l'unité dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$, et d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $[K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_\ell]$.
Et, dans tous les cas, le groupe $\tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ est l'image réciproque par la norme arithmétique locale $N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}$ du noyau dans $\mathcal{R}_p$ de la valeur absolue ℓ-adique principale sur $\mathbb{Q}_p$.

Preuve. (i) Lorsque $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, la condition $|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$ s'écrit tout aussi bien $v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = 0$; elle caractérise donc les unités de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ (on notera que, du fait des conventions utilisées, -1 n'est pas une unité dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$, si $\mathfrak{p}$ est réelle et ℓ égal à 2).

(ii) Lorsque $\mathfrak{p}$ divise ℓ, la condition $|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$ s'écrit encore $< N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x_\mathfrak{p})/ N\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})} >= 1$. Elle affirme donc que la norme de $x_\mathfrak{p}$ s'écrit comme produit d'une puissance de ℓ (qui est nécessairement $N\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})}$) et d'une racine de l'unité. Mais cette propriété caractérise le noyau du logarithme d'Iwasawa dans $\mathbb{Q}_\ell$, ce qui conduit à l'équivalence annoncée. Enfin, comme $|\mathcal{R}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$ est d'indice fini dans U_ℓ, il vient immédiatement (avec la convention $\dim_{\mathbb{Z}_\ell} X \underset{\text{déf}}{=} \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} X$ pour tout $\mathbb{Z}_\ell$-module X) :

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell}\tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{R}_\mathfrak{p} \; - 1 = \dim_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p} = [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_\ell].$$

□

Corollaire 1.11. *Le noyau dans $\mathcal{J}_K$ des valeurs absolues principales est le sous-module compact $\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell\infty} \mu_\mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{l}$ composé direct du sous-groupe $\prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mu_\mathfrak{p}$ des idèles unités qui sont localement des racines de l'unité, et d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $\sum_{\mathfrak{l}|\ell}[K_\mathfrak{l} : \mathbb{Q}_\ell] = [K : \mathbb{Q}]$.*

Définition 1.12. *Le quotient $\tilde{\mathcal{D}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K$ est, par définition, le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques du corps K. Nous disons que l'image $\tilde{\mathcal{P}}_K$ de $\mathcal{R}_K$ dans $\tilde{\mathcal{D}}_K$ est le sous-groupe principal de $\tilde{\mathcal{D}}_K$. Le quotient*

$$\tilde{C\ell}_K \underset{\text{déf}}{=} \tilde{\mathcal{D}}_K/\tilde{\mathcal{P}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K,$$

est le ℓ-groupe des classes logarithmiques du corps K.

Nota. Comme expliqué plus loin, la conjecture du Gross généralisée postule précisément la finitude du groupe $\tilde{C\ell}_K$.

2. Résultats fondamentaux du corps de classes ℓ-adique

2.1. **Isomorphisme du corps de classes ℓ-adique.** Nous rappelons sans démonstration les résultats fondamentaux du corps classes local pour les ℓ-extensions, puisqu'ils sont essentiellement bien connus sous cette forme (cf. par exemple, [AT], Ch. VI, §4). Nous donnons en revanche la preuve des résultats globaux.

Théorème 2.1 (Corps de classes local). *Étant donné un corps local $K_\mathfrak{p}$, l'application de réciprocité induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules topologiques du compactifié profini $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim_k K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell^k}$ sur le groupe de Galois $D_\mathfrak{p} = \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}/K_\mathfrak{p})$ de la ℓ-extension abélienne maximale du corps $K_\mathfrak{p}$. Dans cet isomorphisme le groupe d'inertie $I_\mathfrak{p} = In(K_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}/K_\mathfrak{p})$ est l'image du sous-groupe $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ des unités de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$.*

- Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, la ramification est modérée et le groupe $I_\mathfrak{p}$ est fini, isomorphe au ℓ-Sylow $\mu_\mathfrak{p}$ du groupe des racines de l'unité dans $K_\mathfrak{p}$.

- Si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, la ramification est sauvage et le groupe $I_\mathfrak{p}$ est infini. Dans ce cas, la suite des sous-groupes supérieurs de ramification est l'image dans $D_\mathfrak{p}$ de la filtration canonique $(U_\mathfrak{p}^i)_{i\geq 1} = (1+\mathfrak{p}^i)_{i\geq 1}$ du groupe $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$.

Remarques 5. (i) L'application de réciprocité locale établit une correspondance bijective entre les sous-modules fermés de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ et les ℓ-extensions abéliennes de $K_{\mathfrak{p}}$. Plus précisément toute sous-extension $L_{\mathfrak{p}}$ de $K_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ est le corps des points fixes d'un unique sous-module fermé de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$. En particulier, si H est un sous-groupe quelconque de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, et $L_{\mathfrak{p}}$ son corps des invariants, la fermeture de H dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ est le sous-module de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ associé à $L_{\mathfrak{p}}$.

(ii) Dans la correspondance obtenue, les ℓ-extensions abéliennes finies de $K_{\mathfrak{p}}$ sont associées aux sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire aux sous-modules ouverts de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$. Ces sous-modules sont donc caractérisés comme groupes de normes associés aux ℓ-extensions finies de $K_{\mathfrak{p}}$:

Scolie 2.2. *Si $L_{\mathfrak{P}}$ est une ℓ-extension finie quelconque de $K_{\mathfrak{p}}$, le sous-module ouvert de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ associé par le corps de classes local à la sous-extension maximale $L_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{ab}}$ de $L_{\mathfrak{P}}$ qui est abélienne sur $K_{\mathfrak{P}}$, est l'image de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim_k L_{\mathfrak{P}}^{\times}/L_{\mathfrak{P}}^{\times \ell^k}$ par la norme arithmétique. Il vient ainsi :*

$$D_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{ab}}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$$

$$I_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) = In(L_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{ab}}/K_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}/N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}.$$

Ce résultat s'étend sans difficulté aux extensions infinies, si l'on convient de dire qu'un élément de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ est norme dans une telle extension lorsqu'il est norme dans chacune de ses sous-extensions finies. Dans ce cas, le théorème d'existence du corps de classes local affirme que tout sous module fermé de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ est le groupe des normes d'une unique ℓ-extension abélienne de $K_{\mathfrak{p}}$.

Théorème 2.3 (Corps de classes global). *Étant donné un corps de nombres K, l'application de réciprocité induit un isomorphisme continu du ℓ-groupe $\mathcal{J}_K$ des idèles de K sur le groupe de Galois $G_K^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ de la ℓ-extension abélienne maximale de K ; le noyau de ce morphisme est le sous-groupe $\mathcal{R}_K$ formé des idèles principaux. Dans la correspondance obtenue, le sous-groupe de décomposition $D_{\mathfrak{p}}$ d'une place $\mathfrak{p}$ de K est l'image dans G_K^{ab} du sous-groupe $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{J}_K$; et son sous-groupe d'inertie $I_{\mathfrak{p}}$ est celle du sous-groupe $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ des unités de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$.*

Démonstration. D'après Artin-Tate (cf. [AT], Ch. XIV, prop. 10), le morphisme surjectif du groupe des idèles de K sur le groupe de Galois G_K de la ℓ-extension abélienne maximale de K est nul sur le sous-groupe ℓ-divisible J_K^{div} de J_K. Comme le ℓ-groupe généralisé $\mathcal{J}_K$ contient canoniquement le quotient J_K/J_K^{div}, il s'agit donc d'établir que le morphisme quotient $J_K/J_K^{\mathrm{div}} \to G_K^{\mathrm{ab}}$ se prolonge de façon unique en un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme ψ de $\mathcal{J}_K$ sur G_K^{ab}, que ce prolongement est continu, et que son noyau est le groupe $\mathcal{R}_K$ des idèles principaux.

(i) existence du prolongement : Pour chaque place ultramétrique $\mathfrak{p}$ de K faisons choix d'une uniformisante $\pi_\mathfrak{p}$; prenons $\pi_\mathfrak{p} = 1$, si $\mathfrak{p}$ est complexe ; $\pi_\mathfrak{p} = -1$, si $\mathfrak{p}$ est réelle. Puisque le sous-groupe $\mathcal{U}_K$ des unités de $\mathcal{J}_K$ est contenu, par construction, dans celui U_K de J_K, l'application ψ cherchée est bien définie sur le sous-groupe dense $\mathcal{U}_K \bigoplus_{\mathfrak{p}\in Pl_K} \pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}}$. Ecrivant alors $\psi(u\cdot\prod_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{a_\mathfrak{p}}) = \psi(u)\prod_\mathfrak{p}\psi(\pi_\mathfrak{p})^{a_\mathfrak{p}}$, pour chaque famille $(a_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ d'entiers ℓ-adiques presque tous nuls, nous obtenons le prolongement cherché.

(ii) continuité de l'application obtenue : Si H est un sous-groupe ouvert de G_K^{ab}, le corps des points fixes qui lui correspond par la théorie de Galois est une ℓ-extension abélienne finie de K ; elle est ramifiée en un nombre fini de places. Par suite, si S est la réunion des places ramifiées et de celles au-dessus de ℓ, nous avons évidemment $\psi(\mathcal{U}_\mathfrak{p}) \subset H$ pour chaque $\mathfrak{p} \in S$. De plus, le quotient G_K^{ab}/H étant un ℓ-groupe fini, il existe un sous-module ouvert $\mathcal{U}'_\ell$ de $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{l}$, et, pour chaque place $\mathfrak{p}$, un sous-module ouvert $\pi_\mathfrak{p}^{\ell^{n_\mathfrak{p}}\mathbb{Z}_\ell}$ de $\pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell}$ dont l'image par ψ est contenue dans H. Le produit $\prod_{\mathfrak{p}\in S}\mathcal{U}_\mathfrak{p}\cdot\mathcal{U}'_\ell\cdot\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K}\pi_\mathfrak{p}^{\ell^{n_\mathfrak{p}}\mathbb{Z}_\ell}$ est alors un sous-module ouvert de $\mathcal{J}_K$ contenu dans $^{-1}\psi(H)$; ce qui prouve que ψ est continue.

(iii) noyau : nous savons déjà que le noyau de ψ est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$, lequel contient l'image de $K^\times$ donc la fermeture de cette image, qui est $\mathcal{R}_K$. Pour voir qu'il n'a pas d'autres éléments, il suffit de remarquer que la construction des idèles généralisés a tué le sous-groupe des normes universelles, dont la structure est bien connue (cf. [AT], Ch. IX, §1), et qui est précisément le noyau dans $J_K/K^\times$ de l'application de réciprocité.

Enfin, le lien entre le corps de classes global et le corps de classes local ne pose aucune difficulté particulière puisque, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, le $\mathbb{Z}_\ell$-module compact $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ s'identifie (algébriquement et topologiquement) avec son image canonique dans le quotient $\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$. □

Plus généralement :

Lemme 2.4. *Si S est un ensemble fini de places de K, la surjection naturelle $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S}\mathcal{R}_\mathfrak{p} \to (\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S}\mathcal{R}_\mathfrak{p}\mathcal{R}_K)/\mathcal{R}_K \subset \mathcal{C}_K$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules compacts.*

Remarque 6. Ce résultat n'est pas vrai dans la théorie classique du corps de classes, puisque l'application $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S}K_\mathfrak{p}^\times \to (\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S}K_\mathfrak{p}^\times)K^\times/K^\times \subset J_K/K^\times$ n'est pas un homéomorphisme pour les topologies habituelles de ces deux groupes, dès que S contient plus d'une place.

Démonstration. Puisqu'un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini est d'une façon et d'une seule un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique, il suffit de vérifier l'injectivité, c'est-à-dire le fait que $\mathcal{R}_K$ rencontre trivialement chaque somme finie $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$. Or cela résulte directement du fait que l'unité est le seul élément de hauteur infinie dans $\mathcal{R}$. En effet, si $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ est un idèle principal contenu dans une somme finie $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$, les conditions $\mathfrak{r}_\mathfrak{p} = 1$ pour $\mathfrak{p} \notin S$, montrent que $\mathfrak{r}$, qui est puissance ℓ^k-ième locale en dehors de S, pour tout k, est puissance ℓ^k-ième globale pour tout k (cf. [AT], Ch. IX, §1, th.1), i.e. de hauteur infinie dans $\mathcal{R}_K$. □

Remarques 7. (i) L'application de réciprocité globale établit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules topologiques du ℓ-groupe $\mathcal{C}_K$ des idèles de K sur le groupe de Galois G_K^{ab} de la ℓ-extension abélienne maximale de K. Elle met ainsi en bijection les sous-modules fermés de $\mathcal{J}_K$ qui contiennent $\mathcal{R}_K$ avec les ℓ-extensions abéliennes de K, chaque sous-extension de K^{ab} étant le corps des points fixes d'un unique sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$.

(ii) Dans la correspondance obtenue, les ℓ-extensions abéliennes finies de K sont associées aux sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$, c'est-à-dire aux sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ qui contiennent $\mathcal{R}_K$. Ces sous-modules sont donc caractérisés comme groupes de normes attachés aux ℓ-extensions finies de K :

Scolie 2.5. *Si L est une ℓ-extension finie quelconque de K, le sous-module ouvert de $\mathcal{C}_K$ associé par le corps de classes global à la sous-extension maximale L^{ab} de L qui est abélienne sur K est l'image de $\mathcal{C}_L$ par la norme arithmétique :*

$$\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/K) \simeq \mathcal{C}_K/N_{L/K}(\mathcal{C}_L) = \mathcal{J}_K/N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K.$$

Dans cette description, les sous-groupes de décomposition et d'inertie d'une place $\mathfrak{p}$ dans l'extension abélienne L^{ab}/K sont donnés par les isomorphismes :

$$D_\mathfrak{p}(L^{\mathrm{ab}}/K) \simeq \mathcal{R}_\mathfrak{p}/\mathcal{R}_\mathfrak{p} \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K$$
et
$$I_\mathfrak{p}(L^{\mathrm{ab}}/K) \simeq \mathcal{U}_\mathfrak{p}/\mathcal{U}_\mathfrak{p} \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K.$$

Remarque 8. Lorsque L est une extension abélienne de K, les groupes de décomposition et d'inertie d'une place $\mathfrak{p}$ dans L/K s'identifient respectivement aux groupes de Galois et d'inertie de l'extension abélienne locale $L_\mathfrak{P}/K$. La correspondance entre le corps de classes local et le corps de classes global se traduit alors par les identités :

$$N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_\mathfrak{P} = \mathcal{R}_\mathfrak{p} \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K$$
et
$$N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{U}_\mathfrak{P} = \mathcal{U}_\mathfrak{p} \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K.$$

Dans le cas général, en revanche, il n'en est pas de même : si L est une ℓ-extension quelconque de K, l'extension galoisienne locale qui lui correspond est l'intersection $L_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{P}}$ des complétés de L pour les places au-dessus de $\mathfrak{p}$ (pris dans une même clôture algébrique de $K_{\mathfrak{p}}$). D'après le corps de classes local, le groupe de Galois $D_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}(L/K) = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/K_{\mathfrak{p}})$ de la sous-extension abélienne $L_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ de $L_{\mathfrak{p}}$ est donné par l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}(L/K) = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/K_{\mathfrak{p}}) &\simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/N_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{\mathfrak{P}} \\ &= \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{\mathfrak{P}}). \end{aligned}$$

Mais il peut arriver que l'on ait $D_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}(L/K) \neq D_{\mathfrak{p}}(L^{\mathrm{ab}}/K)$, puisque l'extension abélienne locale $L_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ peut contenir strictement la localisée de l'extension abélienne globale L^{ab}.

2.2. **Schéma général de la ramification abélienne.** Nous introduisons ici quelques unes des principales pro-ℓ-extensions abéliennes d'un corps de nombres K et nous déterminons les groupes de normes qui leur correspondent. Le corps K étant réputé fixé, nous omettons dans un but de simplification l'indice K dans les notations.

Les extensions étudiées sont définies le plus souvent sous une condition maximale de plongement, de décomposition ou de ramification. Précisons d'abord ce que nous entendons par là :

Définition 2.6. *Etant donnés deux ensembles finis (disjoints) S et T de places d'un corps de nombres, nous disons qu'une ℓ-extension L de K est T-ramifiée et S-décomposée lorsqu'elle est non ramifiée aux places (finies) étrangères à T et complètement décomposée aux places de S ; autrement dit, lorsque pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K et chaque place $\mathfrak{P}$ de L au-dessus de $\mathfrak{p}$, l'extension locale $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ est non-ramifiée si $\mathfrak{p}$ n'appartient pas à T et triviale si $\mathfrak{p}$ appartient à S.*

Convention : lorsque $\mathfrak{p}$ est une place réelle, le groupe multiplicatif $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ est égal à $\mathbb{Z}_\ell/2\mathbb{Z}_\ell$, et son sous-groupe des unités $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ est trivial d'après la définition 2. La place $\mathfrak{p}$ peut donc se *décomposer* dans une ℓ-extension (abélienne) de K, mais non se *ramifier*, sans contredire le théorème 2.1. Lorsqu'une place réelle n'est pas complètement décomposée dans une ℓ-extension de K, nous disons qu'elle se *complexifie*. Nous parlons donc de *complexification* là où d'autres parlent de *ramification à l'infini*, et nous réservons le concept de ramification aux seules places finies. En particulier, une extension est S-ramifiée dès qu'elle est non ramifiée aux places finies (i.e. ultramétriques) n'appartenant pas à S, quel que soit le comportement des places à l'infini (i.e. archimédiennes).

Exemple 2.7. *Extensions maximales respectivement ℓ-ramifiée, modérément ramifiée, non ramifiée, séparément ramifiée.*

• La ℓ-extension abélienne *ℓ-ramifiée* maximale $K^{\ell r}$ de K est la plus grande ℓ-extension abélienne de K qui est non ramifiée en dehors des places ℓ-adiques ; son groupe de normes est ainsi le produit :

$$\mathcal{R}\mathcal{U}'_\ell = \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p} = \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell\infty}\mu_\mathfrak{p}.$$

• La ℓ-extension abélienne *modérément ramifiée* maximale K^{mr} de K est la plus grande ℓ-extension abélienne de K qui est non ramifiée aux places ℓ-adiques ; son groupe de normes est le produit :

$$\mathcal{R}\mathcal{U}_\ell = \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}|\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p}.$$

• L'intersection $K^{\ell r}\cap K^{\mathrm{mr}}$ est la ℓ-extension abélienne maximale *non-ramifiée* K^{nr} (aux places finies) de K ; son groupe de normes est le produit de $\mathcal{R}$ par le sous groupe unité $\mathcal{U}$ de $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{R}\mathcal{U}'_\ell\,\mathcal{U}_\ell = \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p}\prod_{\mathfrak{p}|\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p} = \mathcal{R}\mathcal{U}.$$

• Le compositum $K^{\ell r}K^{\mathrm{mr}}$ est la plus grande ℓ-extension abélienne K^{sr} de K qui est *séparément ramifiée*, i.e. composée d'une extension ℓ-ramifiée et d'une extension modérément ramifiée ; son groupe de normes est ainsi l'intersection

$$\mathcal{R}\mathcal{U}'_\ell\cap\mathcal{R}\mathcal{U}_\ell = \mathcal{R}s'_\ell(\mathcal{E})s_\ell(\mathcal{E}),$$

où $s'_\ell(\mathcal{E})$ (resp. $s_\ell(\mathcal{E})$) est le projecté canonique dans $\mathcal{U}'_\ell = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ (resp. dans $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{p}|\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p}$) du ℓ-adifié $\mathcal{E}$ du groupe des unités de K.

Examinons maintenant les groupes de Galois :

Nous avons immédiatement $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\ell r}) \simeq \mathcal{U}'_\ell\ \mathcal{R}/\mathcal{R} \simeq \mathcal{U}'_\ell/\mathcal{U}'_\ell\cap\mathcal{R}$ et le dénominateur est constitué des unités globales (i.e. des éléments de $\mathcal{E}$) qui sont localement triviales aux places ℓ-adiques. Comme nous allons le voir plus loin, la conjecture de Leopoldt postulant précisément sa trivialité, nous obtenons ainsi

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\ell r}) \simeq \mathcal{U}'_\ell = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p}(\text{sous la conjecture de Leopoldt})$$

De façon semblable, nous avons $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{mr}}) \simeq \mathcal{U}_\ell/\mathcal{U}_\ell\cap\mathcal{R}$ et le dénominateur est constitué ici des unités globales qui sont localement triviales aux places modérées donc presque partout. Le groupe $\mathcal{U}_\ell\cap\mathcal{R}$ est donc toujours trivial et il vient donc dans ce cas en toute généralité :

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{mr}}) \simeq \mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{p}|\ell}\mathcal{U}_\mathfrak{p}$$

Considérons maintenant l'extension composée $K^{\mathrm{sr}} = K^{\ell r}K^{\mathrm{mr}}$. Nous obtenons :

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{sr}}) \simeq (\mathcal{U}_\ell\mathcal{R} \cap \mathcal{U}'_\ell)/\mathcal{R} = \mathcal{R}s_\ell(\mathcal{E})s'_\ell(\mathcal{E})/\mathcal{R} \simeq s_\ell(\mathcal{E})s'_\ell(\mathcal{E})/\mathcal{E}.$$

Comme nous avons $s_\ell(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}$ (sous la conjecture de Leopoldt) et $s'_\ell(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}$ (dans tous les cas), il suit :

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{sr}}) \simeq \mathcal{E},$$

ce qui permet d'identifier le tensorisé ℓ-adique $\mathcal{E}$ du groupe des unités de K au groupe de Galois relatif d'une sous-extension abélienne de K^{ab}.

Enfin, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K)$ a déjà été calculé (cf. prop. 1.5) ; c'est tout simplement le ℓ-groupe des classes de diviseurs du corps K :

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K) \simeq \mathcal{J}/\mathcal{U}_\ell\mathcal{U}'_\ell\mathcal{R} = \mathcal{J}/\mathcal{U}\mathcal{R} \simeq \mathcal{D}/\mathcal{P} = \mathcal{C}\ell.$$

En d'autres termes, le groupe des classes $\mathcal{C}\ell$ et le ℓ-adifié $\mathcal{E}$ du groupe des unités peuvent ainsi s'interpréter comme les obstructions globales à ce que l'extension abélienne maximale K^{ab}/K soit le compositum direct des sous-extensions $K^{\ell r}/K$ et K^{mr}/K.

L'ensemble de cette discussion peut ainsi se résumer (sous la conjecture de Leopoldt) par le diagramme (où sont représentés les corps et les groupes de Galois) :

$$\begin{tikzcd}
 & K^{\mathrm{ab}} \arrow[ddl, dash, bend right, "\mathcal{U}_\ell"'] \arrow[ddr, dash, bend left, "\mathcal{U}'_\ell"] \arrow[d, dash, "\mathcal{E}"'] & \\
 & K^{\mathrm{sr}} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K^{\ell r} \arrow[dr, dash, "\mathcal{U}_\ell/s_\ell(\mathcal{E})"'] & & K^{\mathrm{mr}} \arrow[dl, dash, "\mathcal{U}'_\ell/s'_\ell(\mathcal{E})"] \\
 & K^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash, "\mathcal{C}\ell"'] & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 2

Nota. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\ell r}/K^{\mathrm{nr}}) \simeq \mathcal{U}_\ell/s_\ell(\mathcal{E})$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module nœthérien (en fait de dimension $(r+2c)-(r+c-1) = c+1$, sous la conjecture de Leopoldt). Le groupe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{mr}}/K^{\mathrm{nr}})$ en revanche n'est pas de type fini puisqu'il admet des quotients de rang arbitrairement grand comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.8. *Extensions maximales respectivement S-ramifiée, S-décomposée.*

Soit S un ensemble fini de places de K contenant les places ℓ-adiques.

• La ℓ-extension abélienne *S-ramifiée* maximale $K^{S\mathrm{r}}$ de K est la plus grande ℓ-extension abélienne de K qui est non ramifiée en dehors de S ; son groupe de normes est le produit :

$$\mathcal{R}\mathcal{U}^S = \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\notin S}\mathcal{U}_\mathfrak{p}.$$

• La ℓ-extension abélienne *S-décomposée* maximale de $K^{S\mathrm{d}}$ de K est la plus grande ℓ-extension abélienne de K qui est complétement décomposée aux places de S ; son groupe de normes est le produit :

$$\mathcal{R}\mathcal{R}_S = \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\in S}\mathcal{R}_\mathfrak{p}\ .$$

Les mêmes calculs que ceux conduits dans l'exemple précédent donnent ici
$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{S\mathrm{d}}) \simeq \mathcal{R}\mathcal{R}_S/\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_S/\mathcal{R}\cap\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_S$ (dans tous les cas) ;
$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{S\mathrm{r}}) \simeq \mathcal{R}\mathcal{U}^S/\mathcal{R} \simeq \mathcal{U}^S/\mathcal{R}\cap\mathcal{U}^S = \mathcal{U}^S$ (sous la conjecture de Leopoldt) ;

$$\text{et}\qquad \begin{aligned}\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{S\mathrm{r}}K^{S\mathrm{d}}) &\simeq (\mathcal{R}\mathcal{U}^S\cap\mathcal{R}\mathcal{R}_S)/\mathcal{R} \simeq (\mathcal{E}^S\mathcal{U}^S\cap\mathcal{E}^S\mathcal{R}_S)/\mathcal{E}^S\\ &\simeq s^S(\mathcal{E}^S)s_S(\mathcal{E}^S)/\mathcal{E}^S \simeq \mathcal{E}^S,\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}^S$ est le ℓ-adifié du groupe des S-unités globales et $s^S(\mathcal{E}^S)$ (resp. $s_S(\mathcal{E}^S)$) sa projection dans $\mathcal{U}^S$ (resp. $\mathcal{R}_S$), laquelle est isomorphe à $\mathcal{E}^S$ dans tous les cas (resp. sous la conjecture de Leopoldt) ;

$$\text{enfin}\qquad \mathrm{Gal}(K^{S\mathrm{r}}\cap K^{S\mathrm{d}}/K) \simeq \mathcal{J}/\mathcal{R}_S\mathcal{U}^S\mathcal{R} \simeq Cl^S.$$

En résumé, on obtient ainsi le diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\mathcal{E}^S"'] & & \\
 & & K^{S\mathrm{d}} \cdot K^{S\mathrm{r}} & & \\
K^{S\mathrm{d}} \arrow[uurr, dash, bend left, "\mathcal{R}_S"] \arrow[urr, dash] \arrow[drr, dash, "\mathcal{R}_S/s_S(\mathcal{E}^S)"'] & & & & K^{S\mathrm{r}} \arrow[uull, dash, bend right, "\mathcal{U}^S"'] \arrow[ull, dash] \arrow[dll, dash, "\mathcal{U}^S/s^S(\mathcal{E}^S)"] \\
 & & K^{S\mathrm{d}} \cap K^{S\mathrm{r}} \arrow[d, dash, "\mathcal{C}\ell^S"'] & & \\
 & & K & &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 3

Exemple 2.9. *Extensions maximales respectivement libre, localement libre.*

Une pro-ℓ-extension abélienne de K est dite *libre* lorsque son groupe de Galois est un groupe abélien libre, c'est à dire le produit de copies de $\mathbb{Z}_\ell$. La ℓ-extension abélienne libre maximale de K est donc tout simplement le compositum K^z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K. Or, pour qu'une pro-ℓ-extension soit libre il est évidemment nécessaire qu'elle le soit localement. La plus grande ℓ-extension *localement libre* de K est souvent appelée extension de Bertrandias-Payan, ces deux auteurs l'ayant introduite (sous une autre terminologie) à l'occasion de l'étude d'une condition suffisante de la conjecture de Leopoldt (cf. [BP]) ; c'est pourquoi nous la notons K^{bp}. Et puisque le sous-groupe de torsion de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ est le sous-groupe des racines $\mu_\mathfrak{p}$, le groupe de normes associé à K^{bp} est le produit :

$$\mathcal{R} \prod \mu_\mathfrak{p}$$

Il en résulte immédiatement que le groupe de normes associé à K^z est la racine de celui-ci dans $\mathcal{J}$:

$$\sqrt{\mathcal{R} \prod \mu_\mathfrak{p}}$$

Tous deux contiennent le produit $\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell\infty}\mu_{\mathfrak{p}}$ rencontré plus haut, qui est associé à la ℓ-extension ℓ-ramifiée maximale $K^{\ell r}$ de K : on retrouve là le fait qu'une $\mathbb{Z}_\ell$-extension (et, plus généralement, une ℓ-extension localement $\mathbb{Z}_\ell$-plongeable) est non ramifiée en dehors des places ℓ-adiques. Comme $\mathrm{Gal}(K^{\ell r}/K)$ est de type fini (cf. exemple 2.7), le quotient $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K)$ l'est aussi et le sous-groupe fini

$$\mathcal{T}=\sqrt{\mathcal{R}\prod\mu_{\mathfrak{p}}}/\mathcal{R}\prod\mu_{\mathfrak{p}}\simeq\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K^{z})=\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K)^{\mathrm{tor}}$$

mesure ainsi l'obstruction globale au problème du plongement d'une ℓ-extension abélienne dans une pro-ℓ-extension libre. Le quotient $\mathrm{Gal}(K^{z}/K)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$- module libre qui a même dimension que $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K)$ donc que $\mathrm{Gal}(K^{\ell r}/K)$; comme expliqué, sous la conjecture de Leopoldt, cette dimension est égale au nombre $c+1$ de plongements complexes de K augmenté de 1. Il vient enfin :

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{bp}})\simeq\mathcal{R}\prod\mu_{\mathfrak{p}}/\mathcal{R}\simeq\prod\mu_{\mathfrak{p}}/\mathcal{R}\cap\prod\mu_{\mathfrak{p}}.$$

et, comme exposé plus loin, la conjecture de Leopoldt postule précisément que le dénominateur se réduit au ℓ-groupe μ des racines globales de l'unité. L'ensemble de cette discussion peut donc se résumer (sous la conjecture de Leopoldt) au diagramme ci-dessous où la partie irréductiblement globale est mesurée par le groupe $\mathcal{T}$:

$$\begin{tikzcd}
K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, dash, "\prod\mu_{\mathfrak{p}}/\mu"] \\
K^{\mathrm{bp}} \arrow[d, dash, "\mathcal{T}"] \\
K^{z} \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}_\ell^{c+1}"] \\
K
\end{tikzcd}$$

Diagramme 4

Exemple 2.10. *Extensions cyclotomique, respectivement localement cyclotomique maximale.*

• La $\mathbb{Z}_\ell$-extension *cyclotomique* K^{c} de K est la composée avec K de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{c}$ de $\mathbb{Q}$. Le groupe de normes qui lui correspond est donc la préimage par la norme arithmétique $N_{K/\mathbb{Q}}$ du groupe de normes associé à $\mathbb{Q}^{c}$ dans $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$. Mais, comme $\mathbb{Q}^{c}$ n'est autre que la pro-ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée ∞-décomposée maximale de $\mathbb{Q}$, ce dernier coïncide avec le noyau $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ de la formule du produit dans $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$; et le groupe de normes associé à K^{c} est donc tout simplement le noyau $\tilde{\mathcal{J}}_K = {}^{-1}N_{K/\mathbb{Q}}(\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}})$ de la formule du produit dans $\mathcal{J}_K$ pour les valeurs absolues ℓ-adiques.

• La pro-ℓ-extension *localement cyclotomique* maximale K^{lc} de K est la plus grande pro-ℓ-extension de K^{c} qui est abélienne sur K et complètement décomposée sur K^{c} en chacune de ses places. Si $\mathfrak{p}$ est réelle, toutes les extensions cyclotomiques de $K_{\mathfrak{p}}$ sont complètement décomposées et la composante locale du groupe de normes associé à K^{lc} est triviale : c'est $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} = 1$. Si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique locale $K_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{c}}$ est la composée avec $K_{\mathfrak{p}}$ de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{c}}$ du complété p-adique de $\mathbb{Q}$; le sous-groupe de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ qui lui correspond est donc la préimage par la norme locale $N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}$ du sous-groupe de $\mathcal{R}_p$ associé à $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{c}}$; c'est encore le noyau $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} = {}^{-1}N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(\tilde{\mathcal{U}}_p)$ de la valeur absolue ℓ-adique. En particulier le sous-groupe global associé à K^{lc} est donc le produit :

$$\mathcal{R}\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}.$$

Le quotient $\tilde{\mathcal{C}\ell} = \tilde{\mathcal{D}}/\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{J}}/\tilde{\mathcal{U}}\mathcal{R} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K^{\mathrm{c}})$ mesure ainsi l'obstruction globale au problème de plongement d'une ℓ-extension abélienne dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique :

$$\begin{array}{ll}
K^{\mathrm{ab}} & \\
\,\big| & \Big) \, \tilde{\mathcal{U}}/\tilde{\mathcal{E}} \\
K^{\mathrm{lc}} & \\
\,\big| & \Big) \, \tilde{\mathcal{C}\ell} \\
K^{\mathrm{c}} & \\
\,\big| & \Big) \, \mathbb{Z}_\ell \\
K &
\end{array}$$

Diagramme 5

2.3. **Les conjectures de Leopoldt et de Gross.** Nous donnons ci-dessous la traduction en termes de corps de classes ℓ-adique des conjectures classiques de Leopoldt et de Gross ou, plus précisément, des généralisations naturelles de ces conjectures que nous continuons, suivant l'usage établi, à appeler conjectures et de Leopoldt et de Gross quoique ces auteurs ne les aient pas initialement formulées ainsi mais, pour le premier, dans le cadre des seuls corps de nombres totalement réels et, pour le second, dans celui des extensions quadratiques totalement imaginaires d'un tel corps. Bien entendu, si $K = K_+$ est totalement réel, notre premier énoncé est équivalent à celui de Leopoldt, et si $K = K_+[\sqrt{\alpha}]$ est une extension totalement imaginaire d'un corps totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt, notre second énoncé est équivalent à celui de Gross.

Considérons pour commencer la conjecture de Leopoldt généralisée :

Définition 2.11. *Nous disons qu'un corps de nombres K vérifie la conjecture de Leopoldt (pour le nombre premier ℓ) lorsque les seuls idèles principaux qui sont localement partout des racines de l'unité sont les racines globales de l'unité, ce qui s'écrit :*

$$\mathcal{R} \cap \prod \mu_{\mathfrak{p}} = \mu.$$

Proposition 2.12. *Soit K un corps de nombres ayant r places réelles et c places imaginaires. Les cinq assertions suivantes sont alors équivalentes à la conjecture de Leopoldt :*

(i) K admet au plus (et donc exactement) $(c+1)$ $\mathbb{Z}_\ell$-extensions linéairement indépendantes ;

(ii) Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\ell r}/K)$ attaché à la pro-ℓ-extension ℓ-ramifiée maximale de K est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension $c+1$;

(iii) L'image $\mathcal{E}_\ell = s_\ell(\mathcal{E})$ du ℓ-groupe des unités globales $\mathcal{E} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E$ dans le produit $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$ des ℓ-groupes d'unités locales pour les places ℓ-adiques est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension $r+c-1$;

(iv) L'application de semi-localisation s_ℓ induit un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme injectif de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{U}_\ell$;

(v) Le quotient $\prod \mu_{\mathfrak{p}}/\mu$ s'injecte canoniquement dans le groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}$.

Remarque 9. (i) Lorsque K est totalement réel, la condition (i) affirme qu'il n'est d'autre $\mathbb{Z}_\ell$-extension de K que la cyclotomique K^{c} ;

(ii) Transportée par le logarithme ℓ-adique, l'assertion (iv) se lit sur le régulateur construit sur un système fondamental d'unités de K ; on retrouve dans ce cas l'énoncé initial de Leopoldt pour les corps totalement réels.

Preuve. Examinons successivement les équivalences :

(i)$\Leftrightarrow$(ii) : Immédiat, puisque le compositum K^z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K est contenu avec un degré relatif fini dans la pro-ℓ-extension $K^{\ell r}$ comme expliqué dans l'exemple 2.9.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv) : D'après l'exemple 2.7, le groupe de Galois Gal $(K^{\ell r}/K)$ contient comme sous groupe d'indice fini le groupe $\mathrm{Gal}(K^{\ell r}/K^{\mathrm{nr}}) \simeq \mathcal{U}_\ell/s_\ell(\mathcal{E}) = \mathcal{U}_\ell/\mathcal{E}_\ell$. Maintenant, $\mathcal{U}_\ell$ a pour dimension le degré $r+2c$ du corps K et $\mathcal{E}$ le nombre de Dirichlet $r+c-1$. Il vient donc :

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{Gal}(K^{\ell r}/K) = c+1 \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_\ell = r+c-1 \Leftrightarrow s_\ell|_{\mathcal{E}} \text{est injective.}$$

(iv)$\Leftrightarrow$(v)$\Leftrightarrow$(Leopoldt) : Dans l'identification de $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ avec son image canonique dans $\mathcal{J}$, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{U}_\ell$ induite par l'homomorphisme de semi-localisation n'est autre que la restriction à $\mathcal{E}$ de la projection canonique de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{l}$. Il vient donc :

$$s_\ell|_{\mathcal{E}} \text{ injectif } \quad \Leftrightarrow \mathcal{E} \cap \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} = 1.$$

Et la condition de droite peut encore s'écrire $\mathcal{E} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p} = \mathcal{E} \cap \mu$, puisque le groupe $\prod_{\mathfrak{p}|\ell\infty} \mu_\mathfrak{p}$ est fini. Bien entendu, si ℓ est impair, cette dernière identité s'écrit tout simplement : $\mathcal{E} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p} = \mu$. Cependant, si ℓ vaut 2, la racine de l'unité (-1) n'est pas une unité dès que K possède des places réelles, de sorte que dans ce cas $\mathcal{E} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p}$ peut être strictement contenu dans μ. Pour pallier cette difficulté, il est commode de réécrire la condition précédente sous la forme plus générale

$$\mathcal{R} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p} = \mu$$

qui exprime que l'application naturelle du quotient $\prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p}/\mu$ dans le ℓ-groupe $\mathcal{C} = \mathcal{J}/\mathcal{R}$ des classes d'idèles de K est un monomorphisme. □

Scolie 2.13. *Le quotient du groupe $\mu^{\mathrm{loc}} = \mathcal{R} \cap \prod \mu_\mathfrak{p}$ des idèles principaux qui sont localement des racines de l'unité par le sous-groupe μ des racines globales est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension finie. Nous disons que μ^{loc}/μ est le groupe de défaut de la conjecture de Leopoldt pour le corps K (et le premier ℓ) et que sa dimension $\delta_{\mathrm{Leopoldt}} = \dim_{\mathbb{Z}_\ell}(\mu^{\mathrm{loc}}/\mu)$ est le défaut dans K de cette conjecture.*

Venons en maintenant à la conjecture de Gross généralisée.

Définition 2.14. *Nous disons qu'un corps de nombres K vérifie la conjecture de Gross (pour le nombre premier ℓ) lorsque le ℓ-groupe $\widetilde{C\ell}$ des classes logarithmiques de K est fini.*

Proposition 2.15. *Soit K un corps de nombres ayant r places réelles, c places complexes et l places ℓ-adiques. Les cinq assertions suivantes sont alors équivalentes à la conjecture de Gross :*

(i) la pro-ℓ-extension localement cyclotomique maximale K^{lc} de K est de degré fini sur la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^{c} ;

(ii) le noyau $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{R} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ *des valeurs absolues dans* $\mathcal{R}$ *est un* $\mathbb{Z}_\ell$*-module de dimension* $r + c$ *;*

(iii) l'image $|\mathcal{E}'|_\ell$ *du* ℓ*-adifié* $\mathcal{E}' = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'$ *du groupe des* ℓ*-unités de* K *dans le groupe* $\mathcal{V}_\ell = \bigoplus_{\mathfrak{l}|\ell} |\mathcal{R}_\mathfrak{l}|_\mathfrak{l}$ *construit sur les valeurs absolues attachées aux places* ℓ*-adiques est un* $\mathbb{Z}_\ell$*-module libre de dimension* $l - 1$ *;*

(iv) la famille $|.|_\ell = (|.|_l)_{\mathfrak{l}|\ell}$ *des valeurs absolues attachées aux places* ℓ*-adiques envoie le* ℓ*-groupe* $\mathcal{E}'$ *des* ℓ*-unités sur un sous-module d'indice fini de la somme directe* $\tilde{\mathcal{V}}_\ell = \tilde{\bigoplus} |\mathcal{R}_\mathfrak{l}|_\mathfrak{l}$ *restreinte aux familles* $(\mathfrak{r}_\mathfrak{l})_{\mathfrak{l}|\ell}$ *qui vérifient la formule du produit* $\prod_{\mathfrak{l}|\ell} |\mathfrak{r}_\mathfrak{l}|_\mathfrak{l} = 1$ *;*

(v) la famille $(|.|_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ *des valeurs absolues attachées aux places de* K *envoie le* ℓ*-groupe* $\mathcal{R}$ *des idèles principaux sur un sous-module d'indice fini de la somme directe* $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\bigoplus}_\mathfrak{p} |\mathcal{R}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$ *restreinte aux familles* $(\mathfrak{r}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ *qui vérifient la formule du produit* $\prod_\mathfrak{p} |\mathfrak{r}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$.

Remarque 10. Si K est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K_+ totalement réel, le groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/K_+)$ est un groupe d'ordre 2 engendré par la conjugaison complexe τ. Il est alors possible d'écrire tout $\mathbb{Z}_\ell$-module nœthérien $\mathcal{X}$ comme somme directe $\mathcal{X}^+ \oplus \mathcal{X}^-$ de ses sous-modules propres pour l'action de τ, et ce, de façon exacte si ℓ est impair, à un fini près si ℓ vaut 2. La conjecture de Leopoldt pour K_+ permet ainsi d'affirmer que l'application de $\mathcal{E}^+$ dans $\tilde{\mathcal{V}}^+$ induite par les valeurs absolues est presque surjective, et la condition (iv) postule alors que le même résultat vaut de $\mathcal{E}'^-$ dans $\tilde{\mathcal{V}}^-$. Compte-tenu de l'égalité des dimensions, cela revient à dire que la restriction à $\mathcal{E}'^-$ de la famille des valeurs absolues $(\ |\ |_\mathfrak{l})_{\mathfrak{l}|\ell}$ est injective, ce qui est précisément la conjecture initiale de Gross.

Preuve de la proposition. Remarquons d'abord que le groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}\ell}$ s'identifiant au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K^{\mathrm{c}})$, comme expliqué en 2.1, l'assertion (i) de la proposition est bien équivalente à la conjecture de Gross généralisée.

Examinons maintenant les équivalences :

(i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) : D'après l'exemple 2.10, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K)$ s'identifie au quotient $\mathcal{J}/\mathcal{R}\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{J}/\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \tilde{\mathcal{U}}_L$, et nous obtenons un $\mathbb{Z}_\ell$-module de même dimension en remplaçant $\mathcal{J}$ par le sous module d'indice fini $\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_\mathfrak{l}$. Il vient alors :

$$\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_\mathfrak{l} / \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{l} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_\mathfrak{l} / \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{l} \left(\prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_\mathfrak{l} \cap \mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \right)$$
$$\simeq \mathcal{R}_\ell / \tilde{\mathcal{U}}_\ell \mathcal{E}'_\ell \simeq \mathcal{V}_\ell / |\mathcal{E}'_\ell|_\ell,$$

où $\mathcal{E}'_\ell$ désigne la projection de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{R}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_\mathfrak{l}$ et $|.|_\ell = (|.|_\mathfrak{l})_{\mathfrak{l}|\ell}$ l'application de $\mathcal{R}_\ell$ sur $\mathcal{V}_\ell$ donnée par les valeurs absolues attachées aux places ℓ-adiques.

Maintenant, $\mathcal{V}_\ell = |\mathcal{R}_\ell|_\ell$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension l ; l'image $|\mathcal{E}'_\ell|_\ell$ de $\mathcal{E}'$ est contenue dans le sous-module $\tilde{\mathcal{V}}_\ell$ de dimension $l-1$ formé des familles qui vérifient la formule du produit ; et $\mathcal{E}'$ est lui-même un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension $r+c-1+l$. En résumé, nous avons donc, comme annoncé :

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K) = 1 \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}} = r+c \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{Z}_\ell} |\mathcal{E}'_\ell|_\ell = l-1.$$

(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Leftrightarrow$(v) : l'assertion (iii) affirme que la dimension du $\mathbb{Z}_\ell$-module $|\mathcal{E}'_\ell|_\ell$ coïncide avec celle , $l-1$, du sous-module $\tilde{\mathcal{V}}_\ell$ de $\mathcal{V}_\ell$; elle exprime donc que $|\mathcal{E}'_\ell|_\ell$ est d'indice fini dans $\tilde{\mathcal{V}}_\ell$, ce qui est l'assertion (iv). Enfin, l'assertion (v) affirme que le même résultat vaut pour $|\mathcal{R}|$ dans $\tilde{\mathcal{V}}$, ce qui est encore équivalent, puis que le quotient

$$\mathcal{V}/\mathcal{V}_\ell|\mathcal{R}| \simeq \mathcal{J}/\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_\mathfrak{l},$$

qui s'identifie au groupe de Galois de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale de K, est un ℓ-groupe fini. □

Scolie 2.16. *Le quotient $\tilde{\mathcal{C}\ell}/\tilde{\mathcal{C}\ell}^{\mathrm{tor}}$ du ℓ-groupe des classes logarithmiques par son sous-groupe fini est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension finie. Nous disons que $\tilde{\mathcal{C}\ell}/\tilde{\mathcal{C}\ell}^{\mathrm{tor}}$ est le groupe de défaut de la conjecture de Gross pour le corps K (et le premier ℓ), et que sa dimension $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_{\mathrm{Gross}} = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}\ell}$ est le défaut de cette conjecture.*

3. Eléments de dualité ℓ-adique

3.1. Pseudo-radicaux attachés aux groupes d'idèles. Nous introduisons dans cette section un certain nombre de $\mathbb{Z}_\ell$-modules discrets obtenus par produit tensoriel avec le $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ de divers groupes considérés plus haut et que nous appelons pseudo-radicaux parce que leurs groupes respectifs de ℓ^k-torsion s'interprètent, en présence des racines ℓ^k-ièmes de l'unité, comme les radicaux kummériens associés à des ℓ-extensions abéliennes convenables de K^{c}.

Proposition et définition 3.1. *Pour chaque place $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres K, nous appelons pseudo-radical local et nous notons*

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_\mathfrak{p} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K_\mathfrak{p}^\times$$

le $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion construit sur le compactifié $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ du groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$ du complété de K pour la place $\mathfrak{p}$. Le groupe $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ est donné *par l'isomorphisme*

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \simeq \begin{cases} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} & \text{pour } \mathfrak{p} \nmid \ell\infty \\ 1 & \text{pour } \mathfrak{p}|\infty \\ \mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} & \text{pour } \mathfrak{p}|\ell \end{cases}$$

où, pour $\mathfrak{p}|\ell$, le facteur $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}}$ est le $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible de corang $d_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_\ell]$ construit sur le groupe $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ des unités principales de $K_{\mathfrak{p}}$.

La somme directe des $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ lorsque $\mathfrak{p}$ parcourt toutes les places de K s'identifie au tensorisé par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ du $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique $\mathcal{J}_K$:

$$\mathfrak{J}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{J}_K = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}.$$

Nous disons que $\mathfrak{J}_K$ est le ℓ-groupe des coïdèles de K, et que son sous-groupe $\mathfrak{U}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{U}_K \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{l}|\ell}\mathfrak{U}_{\mathfrak{l}}$ est le ℓ-groupe des coïdèles unités. Le groupe $\mathfrak{U}_K$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion de corang $r + 2c = [K : \mathbb{Q}]$.

Preuve. Observons pour commencer, que le produit tensoriel d'un ℓ-groupe divisible par un ℓ-groupe de torsion est toujours trivial. Le groupe $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ étant simultanément divisible et de torsion nous obtenons :

- lorsque $\mathfrak{p}$ est complexe, $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathfrak{p}}^\times = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^\times = 1$, puisque $\mathbb{C}^\times$ est divisible ;
- lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle, $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathfrak{p}}^\times = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}}(\{\pm1\}\times\mathbb{R}_+^\times) = 1 = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, puisque $\{\pm1\}$ est de torsion et $\mathbb{R}_+^\times$ divisible.

La construction réalisée n'est donc intéressante que pour les places ultramétriques. Cela étant :

- lorsque $\mathfrak{p}$ est étrangère à ℓ, la factorisation $K_{\mathfrak{p}}^\times \simeq \mu_{\mathfrak{p}}^0 U_{\mathfrak{p}}^1 \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}}$ fait apparaitre un groupe de torsion μ_p^0, un groupe ℓ-divisible $U_{\mathfrak{p}}^1$ et un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$; il vient donc comme annoncé :

$$(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathfrak{p}}^\times \simeq \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{R}_{\mathfrak{p}},$$

puisque $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \mu_p\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$ est lui-même produit du ℓ-groupe fini $\mu_{\mathfrak{p}}$ par un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang 1.

- Lorsque $\mathfrak{l}$ divise ℓ, en revanche, la factorisation $K_{\mathfrak{l}}^\times = \mu_{\mathfrak{l}}^0 U_{\mathfrak{l}}^1 \pi_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}_\ell}$ fait intervenir le $\mathbb{Z}_\ell$-module nœthérien des unités principales $U_{\mathfrak{l}}^1 = \mathcal{U}_{\mathfrak{l}} \simeq \mu_{\mathfrak{l}}\mathbb{Z}_\ell^{d_{\mathfrak{l}}}$ et le produit tensoriel par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ donne ici $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathfrak{p}}^\times = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}\pi_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}}) \simeq \mathfrak{U}_{\mathfrak{l}}\pi_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}_\ell}$ avec $\mathfrak{U}_{\mathfrak{l}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{U}_{\mathfrak{l}} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{l}} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{d_{\mathfrak{l}}}$ comme attendu.

En sommant sur toutes les places $\mathfrak{p}$, on obtient ainsi la description annoncée des groupes de coïdèles $\mathfrak{J}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{J}_K$ et du sous-groupe des coünités $\mathfrak{U}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{U}_K$. On constate en particulier que $\mathfrak{U}_K$ est un

$\mathbb{Z}_\ell$-module divisible de torsion, somme directe de $[K:\mathbb{Q}] = r+2c = \sum_{\mathfrak{l}|\ell} d_{\mathfrak{l}}$ exemplaires de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$. □

Remarque 11. Lorsque le complété local $K_\mathfrak{p}$ contient les racines 2ℓ-ièmes de l'unité, sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $K_\mathfrak{p}^c$ contient toutes les racines d'ordre ℓ-primaire de l'unité et la théorie de Kummer met alors en bijection les pro-ℓ-extensions abéliennes de $K_\mathfrak{p}^c$ avec les sous-groupes du produit tensoriel $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} K_\mathfrak{p}^{c\times}$. Cela étant, le produit tensoriel par le groupe divisible $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ ayant tué le sous-groupe de torsion de $K_\mathfrak{p}^\times$ (qui correspond au radical de $K_\mathfrak{p}^c$ sur $K_\mathfrak{p}$), l'application naturelle de $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} K_\mathfrak{p}^\times$ dans $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}^c = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} K_\mathfrak{p}^{c\times}$ est injective, et le groupe $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ décrit donc, par la théorie du Kummer, les ℓ-extensions abéliennes de $K_\mathfrak{p}^c$ dont le radical est représentable par des éléments de $K_\mathfrak{p}^\times$.

Définition et proposition 3.2. *Nous appelons ℓ-groupe des codiviseurs du corps K le tensorisé par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ du ℓ-groupe des diviseurs de K :*

$$\mathfrak{D}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{D}_K \simeq \bigoplus_\mathfrak{p} \mathfrak{D}_\mathfrak{p} \text{ avec } \mathfrak{D}_\mathfrak{p} \simeq \pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \text{pour } \mathfrak{p} \nmid \infty, \mathfrak{D}_\mathfrak{p} = 1 \text{ sinon.}$$

Le groupe $\mathfrak{D}_K$ s'identifie canoniquement au quotient $\mathfrak{J}_K/\mathfrak{U}_K$ du ℓ-groupe des coïdèles par le sous-groupe des coïdèles unités. En particulier, on a (non canoniquement) :

$$\mathfrak{J}_K \simeq \mathfrak{D}_K \oplus \mathfrak{U}_K$$

Preuve. Cela résulte immédiatement de l'isomorphisme non canonique $\mathcal{J}_K \simeq \mathcal{D}_K \oplus \mathcal{U}_K$ obtenu en faisant choix pour chaque place non complexe $\mathfrak{p}$ de K d'une uniformisante locale $\pi_\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$. □

Remarque 12. Contrairement au ℓ-groupe des diviseurs $\mathcal{D}_K$, celui des codiviseurs $\mathfrak{D}_K$ ne fait pas intervenir de composante aux places réelles.

Intéressons nous maintenant au pseudo-radical global $\mathfrak{R}_K$:

Définition et proposition 3.3. *Nous appelons pseudo-radical attaché à un corps de nombres K le $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion obtenu en tensorisant par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ le groupe multiplicatif $K^\times$:*

$$\mathfrak{R}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} K^\times = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K.$$

Nous disons que le produit $\mathfrak{E}_K^{\mathrm{ord}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} E_K^{\mathrm{ord}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_K^{\mathrm{ord}}$ construit sur les unités au sens ordinaire est le sous-groupe unité de $\mathfrak{R}_K$. Le quotient $\mathfrak{R}_K/\mathfrak{E}_K^{\mathrm{ord}}$ s'identifie canoniquement au groupe des codiviseurs principaux $\mathfrak{P}_K \underset{\text{déf}}{=} (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{P}_K^{\mathrm{ord}}$.

Preuve. L'isomorphisme $\mathfrak{R}_K/\mathfrak{E}_K^{\mathrm{ord}} \simeq \mathfrak{P}_K$ est immédiat, le quotient $\mathcal{R}_K/\mathcal{E}_K^{\mathrm{ord}} \simeq \mathcal{P}_K^{\mathrm{ord}}$ étant sans $\mathbb{Z}_\ell$-torsion. Mais ce résultat eût été en défaut si l'on avait pris unités et diviseurs principaux au sens restreint. □

Pour expliciter les relations entre le groupe local $\mathfrak{J}_K = \oplus_\mathfrak{p} \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ et le groupe global $\mathfrak{R}_K$, nous allons regarder successivement les codiviseurs d'une part, les coünités d'autre part. Nous avons ainsi :

Proposition 3.4. *La suite exacte courte* $1 \to \mathcal{P}_K^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{D}_K^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{ord}} \to 1$ *qui définit le ℓ-groupe des classes d'idéaux du corps K conduit à la suite exacte courte canonique qui relie codiviseurs et codiviseurs principaux :*

$$1 \to \mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{ord}} \to \mathfrak{P}_K \to \mathfrak{D}_K \to 1.$$

Preuve. Il s'agit simplement de voir que l'injection à conoyau fini de $\mathcal{P}_K^{\mathrm{ord}}$ dans $\mathcal{D}_K^{\mathrm{ord}}$ induit une surjection à noyau fini (isomorphe à $\mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{ord}}$) de $\mathfrak{P}_K$ dans $\mathfrak{D}_K$. Or cela résulte immédiatement du lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{P}_K^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathcal{D}_K^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{P}_K^{\mathrm{ord}} & = & \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{D}_K^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

L'application naturelle de $\mathfrak{P}_K$ sur $\mathfrak{D}_K$ est donnée par : $\ell^{-k} \otimes (x) \longmapsto \ell^{-k} \otimes \operatorname{div} x$. On notera en particulier que si $\mathfrak{a}$ est un idéal de K dont la puissance ℓ^h-ième est principale, disons $\mathfrak{a}^{\ell^h} = (a)$, l'élément $\ell^{-k} \otimes \mathfrak{a}$ de $\mathfrak{D}_K$ est alors l'image de l'élément $\ell^{-k-h} \otimes (a)$ de $\mathfrak{P}$. □

Proposition 3.5. *L'application de semi-localisation du ℓ-groupe $\mathcal{E}_K^{\mathrm{ord}}$ des unités globales (au sens ordinaire) dans le ℓ-groupe $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{l}$ des unités semi-locales aux places au-dessus de ℓ induit un morphisme naturel du ℓ-groupe des coünités globales $\mathfrak{E}_K^{\mathrm{ord}}$ dans le ℓ-groupe des coünités locales $\mathfrak{U}_K$.*

Son noyau Ker $(\mathfrak{E}_K^{\mathrm{ord}} \to \mathfrak{U}_K)$ *est la somme directe du $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion $\mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_\mathbb{Z} \mu_K^{\mathrm{loc}}$ construit sur le groupe de défaut $\mu_K^{\mathrm{loc}}/\mu_K$ de la conjecture de Leopoldt, et du $\mathbb{Z}_\ell$-module fini $\sqrt{\mathcal{E}_\ell^{\mathrm{ord}}}/\mathcal{E}_\ell^{\mathrm{ord}}\mu_\ell$, où $\sqrt{\mathcal{E}_\ell^{\mathrm{ord}}}$ est la racine dans $\mathcal{U}_\ell$ de l'image $\mathcal{E}_\ell^{\mathrm{ord}}$ de $\mathcal{E}_K^{\mathrm{ord}}$, et μ_ℓ le sous-groupe de torsion de $\mathcal{U}_\ell$.*

Son conoyau Coker $(\mathfrak{E}_K^{\mathrm{ord}} \to \mathfrak{U}_K)$ *est un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion de codimension $c + 1 + \delta$, où c est le nombre de places complexes de K et δ le défaut de la conjecture de Leopoldt.*

Preuve. Partons de l'application naturelle s_ℓ de $\mathcal{E}_K^{\mathrm{ord}}$ dans $\mathcal{U}_\ell$. L'image réciproque ${}^{-1}s_\ell(\mu_\ell)$ du sous-groupe de torsion $\mu_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mu_\mathfrak{l}$ est formée des idèles principaux qui sont localement partout des racines de l'unité ; d'après le scolie 2.13, c'est le noyau μ_K^{loc} de la conjecture de Leopoldt dans K. Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{E}_K^{\mathrm{ord}}/\mu_K \simeq \mu_K^{\mathrm{loc}}/\mu_K \oplus \mathcal{E}_\ell \mu_\ell/\mu_\ell,$$

comme somme directe du $\mathbb{Z}_\ell$-module libre $\mu_K^{\mathrm{loc}}/\mu_K \simeq \mathbb{Z}_\ell^\delta$ d'image triviale dans $\mathcal{U}_\ell/\mu_\ell$ et du sous-module $\mathcal{E}_\ell\mu_\ell/\mu_\ell \simeq \mathbb{Z}_\ell^{r+c-1-\delta}$ de $\mathcal{U}_\ell/\mu_\ell$. Introduisons maintenant la racine $\sqrt{\mathcal{E}_\ell}$ de $\mathcal{E}_\ell$ dans $\mathcal{U}_\ell$. Nous avons semblablement

$$\mathcal{U}_\ell/\mu_\ell \simeq \mathcal{U}_\ell/\sqrt{\mathcal{E}_\ell} \oplus \sqrt{\mathcal{E}_\ell}/\mu_\ell,$$

où le dernier terme est libre de dimension $r+c-1-\delta$ et le premier de dimension $(r+2c)-(r+c-1-\delta) = c+1+\delta$.
Passant maintenant aux tensorisés par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$, nous voyons que le noyau cherché s'identifie à la somme directe du $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible

$$\mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} \underset{\text{déf}}{=} (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_K^{\mathrm{loc}}/\mu_K \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_K^{\mathrm{loc}}$$

construit sur les racines locales de l'unité, et du $\mathbb{Z}_\ell$-module fini $\sqrt{\mathcal{E}_\ell}/\mathcal{E}_\ell\mu_\ell$; tandis que le conoyau s'identifie, lui, au $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\mathcal{U}_\ell/\sqrt{\mathcal{E}_\ell})$ de codimension $c+1+\delta$. □

Enonçons sans démonstration les analogues logarithmiques de ces résultats :

Proposition 3.6. *La suite exacte courte* $1 \to \tilde{\mathcal{P}}_K \to \tilde{\mathcal{D}}_K \to \tilde{\mathcal{C}\ell}_K \to 1$ *qui définit le ℓ-groupe des classes logarithmiques du corps K conduit à la suite exacte à quatre termes qui relie le ℓ-groupe des codiviseurs logarithmiques* $\tilde{\mathfrak{D}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{D}}_K$ *au ℓ-groupe* $\tilde{\mathfrak{P}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{P}}_K$ *des codiviseurs logarithmiques principaux :*

$$1 \to \tilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathrm{tor}} \to \tilde{\mathfrak{P}}_K \to \tilde{\mathfrak{D}}_K \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\tilde{\delta}} \to 1$$

Dans celle-ci, le premier terme $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathrm{tor}}$ *s'identifie au sous-groupe de $\mathbb{Z}_\ell$-torsion de* $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K$, *et le dernier au quotient divisible* $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K/\tilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathrm{tor}}$ *de codimension* $\tilde{\delta}$.

Proposition 3.7. *L'application de semi-localisation du ℓ-groupe $\tilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques globales dans le ℓ-groupe* $\tilde{\mathcal{U}}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{l}}$ *des unités logarithmiques semi-locales aux places au-dessus de ℓ induit un morphisme naturel du ℓ-groupe* $\tilde{\mathfrak{E}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K$ *des coünités logarithmiques globales dans le ℓ-groupe* $\tilde{\mathfrak{U}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{U}}_K \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{U}}_\ell$ *des coünités logarithmiques locales.*

Son noyau $\mathrm{Ker}(\tilde{\mathfrak{E}}_K \to \tilde{\mathfrak{U}}_K)$ *est la somme directe du $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion* $\mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mu_K^{\mathrm{loc}}$, *construit sur le groupe de défaut* $\mu_K^{\mathrm{loc}}/\mu_K$ *de la conjecture de Leopoldt, et du $\mathbb{Z}_\ell$-module fini* $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_\ell}/\tilde{\mathcal{E}}_\ell\mu_\ell$, *où* $\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_\ell}$ *est la racine dans* $\tilde{\mathcal{U}}_\ell$ *de l'image* $\tilde{\mathcal{E}}_\ell$ *de* $\tilde{\mathcal{E}}_K$.

Son conoyau $\mathrm{Coker}(\tilde{\mathfrak{E}}_K \to \tilde{\mathfrak{U}}_K)$ *est un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion de codimension* $c+\delta-\tilde{\delta}$.

Remarques 13. Soit S un ensemble fini de places du corps K contenant les places réelles. Alors :

(i) L'injection canonique du sous-groupe principal $\mathcal{P}_K^S$ dans le ℓ-groupe de S-idéaux $\mathcal{D}_K^S$ induit une surjection naturelle du tensorisé $\mathfrak{P}_K^S = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{P}_K^S$ sur le tensorisé $\mathfrak{D}_K^S = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{D}_K^S$ de noyau isomorphe à $\mathcal{C}\ell_K^S$. En particulier on a $\mathfrak{P}_K^S = \mathfrak{D}_K^S$ pour S assez grand

$(\tilde{i})$ Si K vérifie la conjecture de Gross, un résultat analogue vaut au sens logarithmique c'est à dire qu'il existe une surjection naturelle de $\tilde{\mathfrak{P}}_K^S$ sur $\tilde{\mathfrak{D}}_K^S$ de noyau $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K^S$ qui est une bijection pour S assez grand.

(ii) L'application de semi-localisation envoie de même le ℓ-groupe $\mathcal{E}_K^S$ des S-unités globales dans le ℓ-groupe $\mathcal{U}_K^S$ des S-unités locales et induit donc un morphisme du tensorisé global $\mathfrak{E}_K^S = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_K^S$ dans le tensorisé local $\mathfrak{U}_K^S = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{U}_K^S$. Sous la conjecture de Leopoldt son noyau est fini et son conoyau divisible de corang $1 + c$.

$(\tilde{ii})$ Ici encore un résultat analogue vaut au sens logarithmique : sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, le tensorisé $\tilde{\mathfrak{E}}_K^S = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K^S$ du ℓ-groupe des unités logarithmiques globales s'envoie avec un noyau fini dans le tensorisé $\tilde{\mathfrak{U}}_K^S = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{U}}_K^S$ du ℓ-groupe local, et le conoyau de cette application est divisible de corang égal à c.

3.2. **Isomorphismes de dualité.** Nous réunissons dans cette section des isomorphismes canoniques entre groupes de classes de coïdèles et groupes de classes d'idèles, que nous appelons isomorphismes de dualité parce qu'ils identifient (en présence des racines de l'unité) les radicaux kummériens correspondant à certaines extensions aux groupes de Galois correspondant à d'autres.

Du point de vue arithmétique ces groupes de classes apparaissent naturellement lorsqu'on compare le pseudo-radical global $\mathfrak{R}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K$ au ℓ-groupe des coïdèles $\mathfrak{J}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{J}_K$ ou à celui des codiviseurs logarithmiques $\tilde{\mathfrak{D}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{D}}_K$:

Proposition 3.8. *L'injection canonique du ℓ-groupe principal $\mathcal{R}_K$ dans le ℓ-groupe des idèles $\mathcal{J}_K$ induit un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme naturel du pseudo-radical global $\mathfrak{R} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{R}_K$ dans le ℓ-groupe des coïdèles $\mathfrak{J}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{J}_K$, dont le noyau et le conoyau sont de cotype fini.*

Le noyau $\mathfrak{Cl}_K = \mathrm{Ker}\,(\mathfrak{R}_K \to \mathfrak{J}_K)$ a pour sous-groupe divisible maximal le tensorisé $\mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\mu_K^{\mathrm{loc}}/\mu_K) = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mu_K^{\mathrm{loc}}$ du groupe de défaut de la conjecture de Leopoldt. C'est donc le produit d'un ℓ-groupe fini et de δ exemplaires de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$.

Le conoyau $\mathfrak{C}_K = \mathrm{Coker}(\mathfrak{R}_K \to \mathfrak{J}_K) \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{C}_K$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion de codimension $c + 1 + \delta$ (isomorphe comme tel au produit de $c + 1 + \delta$ exemplaires de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$).

Preuve. Ecrivons la suite exacte du serpent à partir du diagramme commutatif exact où interviennent à gauche les ℓ-groupe des coünités et à droite ceux des codiviseurs (conformément aux propositions 3.4 et 3.5).

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} \oplus \sqrt{\mathcal{E}_\ell}/\mathcal{E}_\ell\mu_\ell \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Cl}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{ord}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{E}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{R}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{P}_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{U}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{J}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{D}_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
\cdots \arrow[r] & (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c+1+\delta} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{C}_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 & \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 6

Nous obtenons :

$$1 \to \mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} \oplus \sqrt{\mathcal{E}_\ell}/\mathcal{E}_\ell\mu_\ell \to \mathfrak{Cl}_K \to \mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{ord}} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c+1+\delta} \to \mathfrak{C}_K \to 1.$$

Et puisque les groupes $\sqrt{\mathcal{E}_\ell}/\mathcal{E}_\ell\mu_\ell$ et $\mathcal{C}\ell_K^{\mathrm{ord}}$ sont finis, il vient comme annoncé :

$$\mathfrak{Cl}_K^{\mathrm{div}} \simeq \mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{C}_K \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{c+1+\delta}.$$

□

Corollaire 3.9. *Sous la conjecture de Leopoldt (pour le corps K et le nombre ℓ) le noyau $\mathfrak{Cl}$ est un ℓ-groupe fini et le conoyau $\mathfrak{C}_K$ un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion de codimension $c+1$.*

Proposition et définition 3.10. *Le morphisme naturel $\widetilde{\mathrm{div}}$ du ℓ-groupe $\mathcal{R}_K$ des idèles principaux dans le ℓ-groupe $\tilde{\mathfrak{D}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K$ des diviseurs logarithmiques (de degré nul) induit un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme du pseudo-radical global $\mathfrak{R}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_K$ dans le ℓ-groupe $\tilde{\mathfrak{D}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}_K$ des codiviseurs logarithmiques, dont le noyau et le conoyau sont de cotype fini.*

Le noyau $\mathfrak{H}_K = \mathrm{Ker}(\mathfrak{R}_K \to \tilde{\mathfrak{D}}_K)$ a pour sous-module divisible maximal $\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}}$ le tensorisé $\tilde{\mathfrak{E}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K$ du ℓ-groupe des unités logarithmiques. Il est donc isomorphe au produit de $r+c+\tilde{\delta}$ exemplaires de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ et du quotient fini $\mathfrak{T}_K \underset{\text{déf}}{=} \mathfrak{H}_K/\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}}$.

Le conoyau $\mathrm{Coker}(\mathfrak{R}_K \to \tilde{\mathfrak{D}}_K) \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{C\ell}_K$ *est le* $\mathbb{Z}_\ell$*-module divisible et de torsion construit sur le groupe de défaut* $\tilde{C\ell}/\tilde{C\ell}_K^{\mathrm{tor}}$ *de la conjecture de Gross ; c'est donc le produit de* $\tilde{\delta}$ *exemplaires de* $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$.

Preuve. Partons de la suite exacte à quatre termes donnée par la proposition 3.6 :

$$1 \to \tilde{C\ell}_K^{\mathrm{tor}} \to \tilde{\mathfrak{P}}_K \to \tilde{\mathfrak{D}}_K \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{C\ell}_K \to 1$$

Dans celle-ci le premier groupe $\tilde{C\ell}_K^{\mathrm{tor}}$ est fini et le groupe $\tilde{\mathfrak{P}}_K$ des codiviseurs logarithmiques principaux s'identifie au quotient de $\mathfrak{R}_K$ par le sous-groupe $\tilde{\mathfrak{E}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K$ construit sur les unités logarithmiques. Nous pouvons donc réécrire la suite précédente sous la forme :

$$1 \to \tilde{C\ell}_K^{\mathrm{tor}} \to \mathfrak{R}_K/\tilde{\mathfrak{E}}_K \to \tilde{\mathfrak{D}}_K \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{C\ell}_K \to 1$$

Et il ne reste plus qu'à observer que le groupe à gauche n'est autre que le quotient $\mathfrak{H}_K/\tilde{\mathfrak{E}}_K$. □

Corollaire 3.11. *Sous la conjoncture de Gross (pour le corps K et le nombre ℓ) le morphisme naturel de $\mathfrak{R}_K$ dans $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ est un épimorphisme et son noyau est le produit direct d'un ℓ-groupe fini et d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible et de torsion de codimension $r + c$.*

Nous pouvons maintenant énoncer les deux isomorphismes de dualité :

Théorème 3.12. *Soit K un corps de nombres ; K^{c} sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique et K^{lc} sa pro-ℓ-extension localement cyclotomique maximale ; K^{bp} sa pro-ℓ-extension localement libre maximale et K^{z} le compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K. Alors :*

(i) Si K vérifie la conjecture de Leopoldt, le noyau $\mathfrak{Cl}_K$ du morphisme naturel de $\mathfrak{R}_K$ dans $\mathfrak{J}_K$ s'identifie au sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_K = \mathcal{H}_K^{\mathrm{tor}}$ du groupe de Galois $\mathcal{H}_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K)$, i.e.

$$\mathfrak{Cl}_K \simeq \mathcal{T}_K = \mathcal{H}_K^{\mathrm{tor}}.$$

(ii) Si K vérifie la conjecture de Gross, le quotient $\mathfrak{T}_K = \mathfrak{H}_K/\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}}$ du noyau $\mathfrak{H}_K$ du morphisme naturel de $\mathfrak{R}_K$ dans $\mathfrak{J}_K$ par son sous-module divisible maximal $\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}}$ s'identifie au groupe de Galois $\tilde{C\ell}_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K^{\mathrm{c}})$, i.e.

$$\tilde{C\ell}_K \simeq \mathfrak{T}_K = \mathfrak{H}_K/\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}}.$$

Preuve. (i) Partons de la caractérisation $\mathfrak{Cl}_K = \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K |\ x \in \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{J}_K^{\ell^k}\}$ du noyau $\mathfrak{Cl}_K$. Ecrivant $x = \zeta \mathfrak{x}^{\ell^k}$ pour un ζ de $\prod \mu_{\mathfrak{p}}$ et un $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}_K$, et associant à l'élément $\ell^k \otimes x$ de $\mathfrak{Cl}_K$ la classe $\mathfrak{x} \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K$ de l'élément $\mathfrak{x}$ dans le quotient $\sqrt{\prod \mu_p \mathcal{R}_K}/\prod \mu_p \mathcal{R}_K \simeq \mathcal{T}_K$, nous définissons un morphisme surjectif de $\mathfrak{Cl}_K$ dans $\mathcal{T}_K$ qui a pour noyau le sous-groupe divisible $\mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mu_K^{\mathrm{loc}}$ construit sur le ℓ-groupe des idèles principaux qui sont localement des racines de l'unité : pour $\mathfrak{x} = \xi y \in \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K$, nous avons, en effet : $x = (\zeta\xi^{\ell^k}) y^{\ell^k}$ donc $\ell^{-k} \otimes x = \ell^{-k} \otimes (\zeta\xi^{\ell^k})$ avec $\zeta\xi^{\ell^k} \in \prod \mu_{\mathfrak{p}} \cap \mathcal{R}_K = \mu_K^{\mathrm{loc}}$. Nous obtenons donc la suite exacte courte (cf. [J0], th. 2.7) :

$$1 \to \mathfrak{Cl}_K^{\mathrm{div}} = \mathfrak{E}_K^{\mathrm{loc}} \to \mathfrak{Cl}_K \to \mathcal{T}_K = \mathcal{H}_K^{\mathrm{tor}} \to 1;$$

d'où l'isomorphisme annoncé $\mathfrak{Cl}_K \simeq \mathcal{T}_K$, sous la conjecture de Leopoldt.

(ii) Partons de la caractérisation $\mathfrak{H}_K = \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K |\ x \in \tilde{\mathcal{U}} \mathcal{J}_K^{\ell^k}\}$ du noyau $\mathfrak{H}_K$. Ecrivant $x = \tilde{u}\mathfrak{x}^{\ell^k}$ avec $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}$ et $\mathfrak{x} \in \mathcal{J}_K$, et associant à l'élément $\ell^{-k} \otimes x$ de $\mathfrak{H}_K$ la classe de $\mathfrak{x}$ dans le quotient $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K = \mathcal{J}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$, nous obtenons, conformément à la proposition 3.9, un morphisme surjectif de $\mathfrak{H}_K$ dans $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathrm{tor}}$ qui a pour noyau le sous-groupe divisible $\tilde{\mathfrak{E}}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K$ construit sur les unités logarithmiques locales. En d'autres termes, nous obtenons la suite exacte courte (cf. [J0], th. 2.9) :

$$1 \to \mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}} = \tilde{\mathfrak{E}}_K \to \mathfrak{H}_K \to \tilde{\mathcal{C}\ell}_K^{\mathrm{tor}} \to 1\ ;$$

d'où l'isomorphisme annoncé $\mathfrak{T}_K = \mathfrak{H}_K/\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}} \simeq \tilde{\mathcal{C}\ell}_K$, sous la conjecture de Gross. □

Scolie 3.13. *Si K contient en outre les racines ℓ^k-ièmes de l'unité (pour un $k \geq 1$), les sous-groupes de ℓ^k-torsion de $\mathfrak{Cl}_K$ et de $\mathfrak{T}_K$ s'interprètent respectivement comme radicaux kummériens attachés respectivement aux pro-ℓ-extensions abéliennes maximales localement cyclotomique K^{lc} et localement libre K^{bp} relativement à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^{c} et à la composé K^z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K :*

$${}_{\ell^k}\mathfrak{Cl}_K = {}_{\ell^k}\,\mathrm{Rad}(K^{\mathrm{lc}}/K^{\mathrm{c}}) \qquad \textit{et} \qquad {}_{\ell^k}\mathfrak{T}_K = {}_{\ell^k}\,\mathrm{Rad}(K^{\mathrm{bp}}/K^z).$$

En d'autres termes, ce sont les duaux de Kummer respectifs

$${}_{\ell^k}\mathfrak{Cl}_K = \mathrm{Hom}({}^{\ell^k}\tilde{\mathcal{C}\ell}_K, \mu_{\ell^k}) \qquad\qquad {}_{\ell^k}\mathfrak{T}_K = \mathrm{Hom}({}^{\ell^k}\mathcal{T}_K, \mu_{\ell^k})$$

des quotients d'exposants ℓ^k du ℓ-groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K =$ $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K^{\mathrm{c}})$ et du sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K^z)$ du groupe de Galois $\mathcal{H}_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K)$.

Preuve. On a, en effet, immédiatement :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Cl}_K &= \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K |\ x \in \textstyle\prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{J}_K^{\ell^k}\} \\
&= \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times | K^{\mathrm{c}}(\sqrt[\ell^k]{x}) \subset K^{\mathrm{lc}}\} \qquad \text{et} \\
\mathfrak{H}_K &= \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K |\ x \in \tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K^{\ell^k}\} \\
&= \{\ell^{-K} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times |\ K^{\mathrm{c}}(\sqrt[\ell^k]{x}) \subset K^{\mathrm{bp}}\}\ ;
\end{aligned}$$

d'où

$$_{\ell^k}\mathfrak{Cl}_K = \mathrm{Hom}({}^{\ell^k}\tilde{\mathcal{C}\ell}_K, \mu_{\ell^k}) \text{ et}$$

$$_{\ell^k}\mathfrak{T}_K = _{\ell^k}\tilde{\mathcal{C}\ell}_K = \mathrm{Hom}({}^{\ell^k}\mathfrak{Cl}_K, \mu_{\ell^k}) = \mathrm{Hom}({}^{\ell^k}\mathcal{T}_K, \mu_{\ell^k}),$$

comme annoncé. □

On prendra garde toutefois que $_{\ell^k}\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}} = _{\ell^k}\tilde{\mathfrak{E}}_K$ n'est pas, en général, le radical initial du compositum K^z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K en présence de capitulation cyclotomique (cf. [J2], §5).

3.3. Corps coprincipaux et corps logarithmiquement principaux. Les résultats de dualité précédents permettent d'éclairer sensiblement diverses conditions suffisantes de la conjecture de Leopoldt (CSL) ou de la conjecture de gross (CSG) étudiées par de nombreux auteurs dans des contextes variés, et notamment de les hiérarchiser clairement.

Commençons par énoncer la condition suffisante de la conjecture de Gross :

Proposition et définition 3.14. *Nous disons qu'un corps de nombres K est logarithmiquement principal (pour le premier ℓ) lorsqu'il vérifie les quatre conditions équivalentes suivantes :*

(CSG, i) Le ℓ-groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est trivial ;

(CSG, ii) K vérifie la conjecture de Gross (pour le premier ℓ) et le ℓ-groupe $\mathfrak{T}_K = \mathfrak{H}_K/\mathfrak{H}_K^{\mathrm{div}}$ est trivial ;

(CSG, iii) toute (pro-)ℓ-extension localement cyclotomique de K est contenue dans la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K^{c} ;

(CSG, iv) l'application naturelle du sous-groupe principal $\mathcal{R}_K/\tilde{\mathcal{E}}_K$ dans le quotient $\tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K$ est surjective.

Preuve. Nous avons $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{R}_K\tilde{\mathcal{U}}_K \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K^{\mathrm{c}})$ d'où immédiatement (i)$\iff$ (iii)$\iff$(iv) ; et, sous la conjecture de Gross, qui postule précisément la finitude de $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K$, l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq \mathfrak{T}_K$ (cf. théorème 3.11.ii), d'où (i)$\iff$(ii). □

Analoguement, nous avons pour la conjecture de Leopoldt :

Proposition et définition 3.15. *Nous disons qu'un corps de nombres K est coprincipal pour le premier ℓ ou ℓ-coprincipal lorsqu'il vérifie les quatre conditions équivalentes suivantes :*

(CSL, i) Le noyau $\mathfrak{Cl}_K$ est trivial (autrement dit le pseudo-radical $\mathfrak{R}$ s'injecte dans le groupe des coïdèles $\mathfrak{J}_K$) ;

(CSL, ii) K vérifie la conjecture de Leopoldt (pour le premier ℓ) et le ℓ-groupe $\mathcal{T}_K = \mathcal{H}_K^{\mathrm{tor}}$ est trivial ;

(CSL, iii) toute (pro-)ℓ-extension localement libre de K est contenue dans une $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{c}+1}$-extension ;

(CSL, iv) l'application naturelle de $\mathcal{R}_K/\mu_K$ dans le quotient $\tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mu}_K$ est une injection à conoyau libre.

Preuve. Rappelons que la conjecture de Leopoldt (pour le corps K et le premier ℓ) postule indifféremment la finitude du noyau $\mathfrak{Cl}_K$ (cf. prop. 3.8), l'existence d'au plus $(c+1)$ $\mathbb{Z}_\ell$-extensions linéairement indépendantes sur K (cf. prop. 2.12. i), et l'injectivité de l'application naturelle de $\mathcal{R}_K/\mu_K$ dans $\tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mu}_k$ (cf. déf. 2.11). Chacune des quatre conditions énoncées la contient donc. De plus, lorsqu'elle est vérifiée nous avons l'isomorphisme $\mathfrak{Cl}_K \simeq \mathcal{T}_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K^z)$ d'après le théorème 3.11 et l'exemple 2.9. D'où l'équivalence (i)$\Longleftrightarrow$(ii) $\Longleftrightarrow$(iii). L'équivalence manquante (i)$\Longleftrightarrow$(iv) s'obtient en remarquant que la trivialité de $\mathfrak{Cl}_K$, i.e. l'injectivité de l'application naturelle de $\mathfrak{R}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{R}_K$ dans $\mathfrak{J}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{J}_K$ affirme précisément que le conoyau du morphisme canonique $\mathcal{R}_K/\mu_K \to \tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mu}_K$ est sans $\mathbb{Z}_\ell$-torsion. □

Les isomorphismes de dualité précédents (cf. scol. 3.12) montrent directement qu'en présence des racines ℓ-ièmes de l'unité les conditions suffisantes (CSL) et (CSG) sont rigoureusement équivalentes. Plus précisément (cf. [J3], Appendice), si K contient les racines 2ℓ-ièmes de l'unité, elles se lisent encore sur le noyau $H_2(K)$ des symboles de Hilbert dans le ℓ-groupe universel $K_2(K)$ pour les ℓ-symboles sur K (i.e. les symboles à valeurs dans un ℓ-groupe) :

Proposition 3.16. *Si K contient les racines ℓ-ièmes de l'unité, il y a équivalence entre :*

(CSG) le corps K est coprincipal, i.e. $\mathfrak{Cl}_K = 1$; et

(CSL) le corps K est logarithmiquement principal, i.e. $\tilde{C\ell}_K = 1$.

Et si K contient les racines 2ℓ-ièmes de l'unité, ces deux conditions reviennent à affirmer la trivialité du ℓ-noyau hilbertien $H_2(K)$, en d'autres termes que le ℓ-groupe $K_2(K)$ s'identifie à la somme directe $\tilde{\oplus}\mu_{\mathfrak{p}}$ des groupes locaux de racines de l'unité restreinte aux familles $(\zeta_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ qui vérifient la formule du produit $\prod \zeta_{\mathfrak{p}}^{|\mu_{\mathfrak{p}}|/|\mu|} = 1$.

Nota. Si ℓ est impair et K contient ζ_ℓ, on a donc $\mathfrak{Cl}_K = 1 \Longleftrightarrow H_2(K) = 1$. Mais cette dernière équivalence peut être effectivement en défaut pour $\ell = 2$ si K ne contient pas les racines quatrièmes de l'unité (cf. [J0]). Lorsqu'on veut construire des familles de corps qui vérifient les conditions suffisantes des conjectures de Leopoldt et de Gross, on est naturellement amené à étudier la propagation de l'une quelconque des trois propriétés $\mathfrak{Cl}_K = 1$ ou $\tilde{C\ell}_K = 1$ ou $H_2(K) = 1$ dans une ℓ-extension L/K. Or celle-ci ne se laisse pas caractériser facilement (cf. [J4] où est discutée une formule de points fixes pour les classes logarithmiques, ou encore [T2] pour le noyau hilbertien de certains corps biquadratiques). Il peut être alors judicieux de remplacer la condition de trivialité choisie par une condition plus forte mais arithmétiquement plus simple et, si possible, héréditaire. C'est ainsi qu'en présence des racines ℓ-ièmes de l'unité, si l'on exige non seulement la trivialité du ℓ-noyau hilbertien $H_2(K)$ mais celle du ℓ-noyau régulier $R_2(K)$, on tombe sur la notion de corps ℓ-régulier étudiée dans [GJ] et [JN]. En l'absence éventuelle des racines ℓ-ièmes de l'unité, il faut évidemment choisir celles des deux propriétés (CSG) ou (CSL) que l'on souhaite conserver. L'analogue immédiat de la notion de corps ℓ-régulier est alors celle de corps ℓ-rationnel introduite dans [MN] :

Définition 3.17 ([MN], [JN]). *Un corps de nombres K est dit ℓ-rationnel lorsque le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(M/K)$ de sa pro-ℓ-extension ℓ-ramifiée ∞-décomposée maximale est un pro-ℓ-groupe libre (nécessairement sur $c+1$ générateurs) ou, de façon équivalente lorsque sont réunies les deux conditions*

$$V_K = K^{\times\ell} \qquad et \qquad \sum_{\mathfrak{l}|\ell} \mathrm{rg}\ \mu_{\mathfrak{l}} = \mathrm{rg}\ \mu_K,$$

où $V_K = \{x \in K^\times | x \in K_{\mathfrak{l}}^{\times\ell}, \forall \mathfrak{l}|\ell \text{ et } v_{\mathfrak{p}}(x) \equiv 0 \pmod{\ell}, \forall \mathfrak{p} \nmid \ell\infty\}$ désigne le sous-groupe des éléments ℓ-hyperprimaires de $K^\times$).

De fait, il est possible de relier très simplement ℓ-rationalité et ℓ-coprincipalité. Plus précisément :

Théorème 3.18. *Pour tout corps de nombres K, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) K est ℓ-rationnel ;

(ii) K est ℓ-coprincipal et on a $\mu_K \simeq \oplus_{\mathfrak{l}|\ell}\mu_{\mathfrak{l}}$.

Preuve. Observons que les deux conditions entraînent $\mathrm{rg}\ \mu_K = \sum_{\mathfrak{l}|\ell} \mathrm{rg}\ \mu_{\mathfrak{l}}$ et distinguons deux cas suivant que cette quantité vaut 0 ou 1.

Si elle est nulle, le sous-groupe V_K des éléments ℓ-hyperprimaires s'écrit tout aussi bien :
$V_K = \{x \in K^\times |\ x \in \mu_{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}}^{\times\ell}\ \forall \mathfrak{p} \in Pl_K\}$; et le quotient $V_K/K^{\times\ell} = V_K/\mu_K K^{\times\ell}$ s'identifie donc au sous-groupe de ℓ-torsion ${}_\ell\mathfrak{Cl}_K$ du noyau $\mathfrak{Cl}_K = \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K \mid x \in \tilde{\mu}_K \mathcal{J}_K^{\ell^k}\}$. Il suit dans ce cas :

$$V_K = K^{\times\ell} \iff V_K/\mu_K K^{\times\ell} = 1 \iff {}_\ell\mathfrak{Cl}_K = 1 \iff \mathfrak{Cl}_K = 1.$$

Si elle est non nulle, K contient les racines ℓ-ièmes de l'unité, et la théorie de Kummer interprète la quotient $V_K/K^{\times\ell}$ comme le radical initial associé à la ℓ-extension abélienne ℓ-décomposée non ramifiée (aux places finies) maximale, disons K', de K. Il vient donc $V_K = K^{\times\ell} \iff [K' : K] = 1 \iff \mathcal{C}\ell'_K = 1$, où $\mathcal{C}\ell'_K \simeq \mathrm{Gal}(K'/K)$ est le ℓ-groupe de ℓ-classes de diviseurs de K (i.e. le ℓ-groupe $\mathcal{C}\ell_K^S$ pour $S = Pl_K(\ell)$ comme expliqué dans l'exemple 2.8, avec ici $S = \{\mathfrak{l}\}$, puisque K possède alors une unique place au-dessus de ℓ). En particulier, sous la condition $V_K = K^{\times \ell}$, la place $\mathfrak{l}$ ne se décompose dans aucune extension cyclotomique non triviale $K[\zeta_{\ell^m}]/K$, ce qui montre que l'on a $\mu_K = \mu_{\mathfrak{l}} = \oplus_{\mathfrak{l}|\ell}\mu_{\mathfrak{l}}$. Reste donc simplement à vérifier l'équivalence $\mathcal{C}\ell'_K = 1 \iff \tilde{\mathcal{C}}\ell_K = 1$ (puisque $\tilde{\mathcal{C}}\ell_K$ et $\mathfrak{Cl}_K$ sont simultanément triviaux dans ce cas). Or cela résulte de la théorie des genres dans la $\mathbb{Z}_\ell$-tour cyclotomique $K_\infty = \cup K_n$. La formule des classes ambiges donne à chaque étage fini $\mathcal{C}\ell'_{K_n} = 1 \iff \mathcal{C}\ell'_K = 1$ donc finalement $\mathcal{C}\ell'_K = 1 \iff \varprojlim \mathcal{C}\ell'_{K_n} = 1 \iff \tilde{\mathcal{C}}\ell_K = 1$ puisque $\tilde{\mathcal{C}}\ell_K$ n'est autre que le quotient des genres associé à $\varprojlim \mathcal{C}\ell'_{K_n}$ dans l'extension procyclique K_∞/K. $\square$

Remarque 14. Si K est ℓ-coprincipal, le schéma d'extensions décrit à l'exemple 2.9 prend la forme

$$\begin{array}{cl}
K^{\mathrm{ab}} & \\
| & \Big)\ \tilde{\mu}_K/\mu_K \\
K^{\mathrm{bp}} = K^{z} & \\
| & \Big)\ \mathbb{Z}_\ell^{c} \\
K^{\mathrm{c}} & \\
| & \Big)\ \mathbb{Z}_\ell \\
K &
\end{array}$$

Diagramme 7

La condition de ℓ-rationalité affirme alors que l'on a de plus $\tilde{\mu}_K/\mu_K \simeq \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell}\mu_{\mathfrak{p}}$; en d'autres termes que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{bp}})$ est le produit direct des sous groupes d'inertie $I_{\mathfrak{p}}(K^{\mathrm{ab}}/K) \simeq In(K_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mu_{\mathfrak{p}}$ attachés aux places ultramétriques modérés et des sous-groupes de décomposition $D_{\mathfrak{p}}(K^{\mathrm{ab}}/K) \simeq \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ attachés aux places réelles.

Les considérations précédentes se généralisent sans difficulté aux corps S-rationnels introduits dans [JS] :

Définition 3.19 ([JS]). *Soit S un ensemble non vide de places ℓ-adiques d'un corps de nombres K. On dit que K est S-rationnel lorsque le groupe de Galois $\mathcal{G}_K$ de la pro-ℓ-extension ℓ-ramifiée ∞-décomposée maximale M de K est isomorphe au pro-ℓ-produit libre des groupes de Galois locaux $\mathcal{G}_{\mathfrak{l}} = \mathrm{Gal}(\overline{K}_{\mathfrak{l}}/K_{\mathfrak{l}})$ attachés aux places ℓ-adiques qui ne sont pas dans S et d'un pro-ℓ-groupe libre $\mathcal{F}$, i.e.*

$$\mathcal{G}_K \simeq (\underset{\mathfrak{l}\notin S}{*}\mathcal{G}_{\mathfrak{l}}) * \mathcal{F}$$

ou, de façon équivalente, lorsque sont réunies les deux conditions (avec ici $V_K^S \underset{\text{déf}}{=} \{x \in K^\times | x \in K_{\mathfrak{l}}^{\times\ell}\ \forall \mathfrak{l} \in S$ *et* $v_{\mathfrak{p}}(x) \equiv 0 \pmod{\ell}\ \forall \mathfrak{p} \nmid \ell\infty\}$*)*

(a) $V_K^S = K^{\times\ell}$

(b) $\mu_K \simeq \bigoplus_{\mathfrak{l}\in S} \mu_{\mathfrak{p}}$.

Nota. Lorsque S est le singleton $\{\mathfrak{l}\}$, les corps S-rationnels sont dits $\mathfrak{l}$-rationnels. Si, au contraire, S est l'ensemble $Pl_K(\ell)$ de toutes les places ℓ-adiques, ce sont tout simplement les corps ℓ-rationnels.
Cela posé, nous avons analoguement à ce qui précède :

Théorème et définition 3.20. *Convenons de dire qu'un corps de nombres* K *est* $\overline{S}$*-coprincipal (pour un sous-ensemble non vide de places* ℓ*-adiques* S *de complémentaire* $\overline{S} = Pl_K(\ell) \setminus S$*) lorsque le pseudo-radical global* $\mathcal{R}_K$ *s'injecte dans la somme directe des pseudo-radicaux locaux* $\bigoplus_{\mathfrak{p}\notin\overline{S}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$.
Cela étant, les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :

(i) Le corps K *est* S*-rationnel ;*

(ii) K *est* $\overline{S}$*-coprincipal, et on a* $\mu_K = \bigoplus_{\mathfrak{l}\in S} \mu_{\mathfrak{l}}$.

Récapitulatif des principaux groupes de normes

Nous récapitulons ci-contre les groupes de normes associés aux principales ℓ-extensions abéliennes d'un corps de nombres K rencontrées dans l'article. Celles-ci apparaissent sur la première colonne, suivies de leur définition dans la seconde colonne. Nous omettons l'indice K dans la troisième.
Nota : L'astérisque indique que l'isomorphisme vaut sous réserve de la conjecture de Leopoldt.

ℓ-extension abélienne considérée	Définition de l'extension	Groupe de normes associé	Commentaire
K K^{ab}	corps de base maximale	$\mathcal{J} = \prod^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$	 $\mathrm{Gal}\ (K^{\mathrm{ab}}/K) = \mathcal{C}$
$K^{\ell\mathrm{r}}$ K^{mr} $K^{\mathrm{nr}} = K^{\ell\mathrm{r}} \cap K^{\mathrm{mr}}$ $K^{\mathrm{sr}} = K^{\ell\mathrm{r}} \cdot K^{\mathrm{mr}}$	ℓ-ramifiée maximale modérément ramifiée maximale non ramifiée maximale séparément ramifiée maximale	$\mathcal{R}\mathcal{U}'_\ell = \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell\infty} \mu_{\mathfrak{p}}$ $\mathcal{R}\mathcal{U}_\ell = \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{l}\mid\ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$ $\mathcal{R}\mathcal{U} = \mathcal{R}\mathcal{U}'_\ell \mathcal{U}_\ell$ $\mathcal{R}\mathcal{U}'_\ell \cap \mathcal{R}\mathcal{U}_\ell$	$*\ \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\ell\mathrm{r}}) \simeq \mathcal{U}'_\ell$ $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{mr}}) \simeq \mathcal{U}_\ell$ $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K) \simeq \mathcal{C}\ell$ $*\ \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{sr}}) \simeq \mathcal{E}$
$K^{S\mathrm{r}}$ $K^{S\mathrm{d}}$ $K^{S\mathrm{r}} \cap K^{S\mathrm{d}}$ $K^{S\mathrm{r}} \cdot K^{S\mathrm{d}}$	S-ramifiée maximale S-décomposée maximale non ramifiée S-décomposée maximale compositum de $K^{S\mathrm{r}}$ et de $K^{S\mathrm{d}}$	$\mathcal{R}\mathcal{U}^S = \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ $\mathcal{R}\mathcal{R}_S = \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ $\mathcal{R}\mathcal{U}^S \mathcal{R}_S$ $\mathcal{R}\mathcal{U}^S \cap \mathcal{R}\mathcal{R}_S$	$*\ \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{S\mathrm{r}}) \simeq \mathcal{U}^S$ $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{S\mathrm{d}}) \simeq \mathcal{R}_S$ $\mathrm{Gal}(K^{S\mathrm{r}} \cap K^{S\mathrm{d}}/K) = \mathcal{C}\ell^S$ $*\ \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{S\mathrm{r}} \cdot K^{S\mathrm{d}}) = \mathcal{E}^S$
K^{bp} K^{z} K^{c} K^{lc}	localement libre maximale compositum des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique localement cyclotomique maximale	$\mathcal{R}\tilde{\mu} = \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}$ $\sqrt{\mathcal{R}\tilde{\mu}}$ $\tilde{\mathcal{J}}$ $\mathcal{R}\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$	$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K) = \mathcal{H}$ $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{bp}}/K^{\mathrm{z}}) = \mathcal{H}^{\mathrm{tor}} = \mathcal{T}$ $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{c}}/K) = \mathcal{J}/\tilde{\mathcal{J}} \simeq \mathbb{Z}_\ell$ $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{lc}}/K^{\mathrm{c}}) = \tilde{\mathcal{C}\ell}$

BIBLIOGRAPHIE

[AT] E. Artin, J. Tate, *Class field theory*, Benjamin, New York, 1967.

[BP] F. Bertrandias, J.-J. Payan, *Γ-extensions et invariants cyclotomiques*. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup **5** (1972), 517–548.

[FG] L.J. Federer, B.N. Gross, *Regulators and Iwasawa modules*. Inv. Math. **62** (1981), 443–457.

[Gi] R. Gillard, *Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante*. Abh. Math. Sem. Hamburg **48** (1979), 125–138.

[GJ] G. Gras, J.-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*. Math. Z. **202** (1989), 343–365.

[Gr] G. Gras, *Plongements kummériens dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*. Composito Math. **55** (1985), 383–395.

[JN] J.-F. Jaulent, T. Nguyen Quang Do, *Corps p-rationnels, corps p-réguliers et ramification restreinte*. J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.

[J0] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extension* (Thèse d'Etat), Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1985/86 (1986).

[J1] J.-F. Jaulent, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*. Journées arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.

[J2] J.-F. Jaulent, *Noyau universel et valeurs absolues* Journées arithmétiques de Marseille-Luminy, Astérisque **198-200** (1990), 187–209.

[J3] J.-F. Jaulent, *La Théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres*. J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377–411 .

[J4] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*. J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[JS] J.-F. Jaulent, O. Sauzet, *Pro-ℓ-extensions de corps de nombres ℓ-rationnels*. J. Numb. Th. **65** (1997), 240–267.

[Ko] M. Kolster, *An idelic approach to the wild kernel*. Invent. Math. **103** (1991), 9–24.

[M2] H. Miki, *On the Leopoldt conjecture on the p-adic regulators*. J. Numb. Th. **26** (1987), 117–128.

[Mi] H. Miki, *On the maximal abelian ℓ-extension of a finite algebraic number field with given ramification*. Nagoya Math. J. **70** (1978), 183–202.

[MN] A. Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*. Sém. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (1990), 155–200.

[Mo] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*. Mat. Nachr. **149** (1990), 163–176.

[Ng] T. Nguyen Quang Do, *Lois de réciprocité primitives*. Manuscripta Math. **72** (1991), 307–324.

[Se] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*. Lect. Notes in Math., Springer Verlag (1994).

[So] F. Soriano, *Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques*. Acta Arith. **78** (1997), 201–219.

[T1] H. Thomas, *Premier étage d'une $\mathbb{Z}_\ell$-extension*. Manuscripta Math. **81** (1993), 413–435.

[T2] H. Thomas, *Trivialité du 2-rang du noyau hilbertien*. J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 459–483.

[Ta] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'artin en $s = 0$*. Prog. in Math. **47**, Birkhaüser, 1984.

[W1] K. Wingberg, *On Galois groups of p-closed algebraic number fields with restricted ramification*. J. reine angew. Math. **400** (1989), 185–202.

[W2] K. Wingberg, *On Galois groups of p-closed algebraic number fields with restricted ramification II*. J. reine angew. Math. **416** (1991), 187–194.

[Ya] M. Yamagishi, *A note on free pro-p-extensions of algebraic number fields*. J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 165–178.

Jean-François JAULENT
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
F - 33405 Talence Cedex
E-mail : jaulent@math.u-bordeaux.fr