Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Valérie Berthé
Laurent Vuillon

Suites doubles de basse complexité

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 12, n^o 1 (2000), p. 179-208

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2000__12_1_179_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **12** (2000), 179–208

Suites doubles de basse complexité

par Valérie BERTHÉ et Laurent VUILLON

Résumé. Nous donnons une représentation géométrique des suites doubles uniformément récurrentes de fonction de complexité rectangulaire $mn+n$. Nous montrons que ces suites codent l'action d'une $\mathbb{Z}^2$-action définie par deux rotations irrationnelles sur le cercle unité. La preuve repose sur une étude des suites doubles dont les lignes sont des suite sturmiennes de même langage.

Abstract. We give a geometric representation of uniformly recurrent two-dimensional sequences of rectangular complexity function $mn + n$. We show that these sequences code a $\mathbb{Z}^2$-action defined by two irrational rotations on the unit circle. The proof is based on a study of double sequences the lines of which are Sturmian sequences of same language.

1. Introduction

On associe classiquement à une suite prenant un nombre fini de valeurs, une mesure de son désordre, appelée **fonction de complexité**, qui compte le nombre de facteurs de longueur donnée. Cette fonction permet non seulement de caractériser les suites périodiques mais aussi de donner une représentation géométrique de certaines suites en fonction de leur complexité, par exemple les suites de complexité $n + 1$, appelées **suites sturmiennes** [13]. Dès que l'on passe en dimension supérieure se pose la question de la définition de la fonction de complexité. Nous nous intéresserons ici pour les suites doubles (indexées sur $\mathbb{Z}^2$) à la notion de **fonction de complexité rectangulaire**, qui compte le nombre de facteurs rectangulaires de taille donnée. Pour une définition plus générale de la complexité, voir par exemple [16].

Les questions suivantes sont alors naturelles. Quelles fonctions de complexité (rectangulaires) existent ? Peut-on obtenir une caractérisation géométrique d'une suite à partir de sa fonction de complexité ? Que se passe-t-il dans le cas périodique ?

Une suite double est dite **périodique** si elle admet un vecteur de périodicité non nul, c'est-à-dire si elle est invariante par translation. La fonction

Manuscrit reçu le 6 mai 1999.

de complexité rectangulaire ne permet pas de caractériser les suites périodiques : on peut en effet construire des suites doubles admettant un vecteur de périodicité non nul, et de complexité arbitrairement grande. Réciproquement, il est conjecturé que s'il existe un couple d'entiers non nuls (m_0, n_0) tel que $P(m_0, n_0) \leq m_0 n_0$, alors la suite double admet un vecteur de périodicité non nul. Notons que cette conjecture est fausse en dimension supérieure (voir le contre-exemple produit dans [16]).

Le but de cet article est double : nous construisons, d'une part, des suites bidimensionnelles de basse complexité, où, par basse complexité, nous entendons une complexité proche de la fonction conjecturée dans le cas périodique. Nous donnons d'autre part une représentation géométrique de certaines suites en fonction de leur complexité.

Comment obtenir des suites doubles qui soient à la fois de basse complexité et non périodiques ? Une idée naturelle consiste à disposer en ligne des suites unidimensionnelles de basse complexité et non périodiques, par exemple des suites sturmiennes. Rappelons qu'une suite sturmienne code l'orbite d'un point ρ du cercle unité sous l'action d'une rotation d'angle irrationnel α, selon la partition du cercle unité (identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) en deux intervalles semi-ouverts d'extrémités 0 et $1-\alpha$ (voir [13]). Supposons donc que l'on dispose en ligne des suites sturmiennes de même angle, afin de réduire le "désordre". Soit ρ_i le point dont l'orbite est codée par la ligne d'indice i. Nous allons considérer deux situations extrêmes. Les points de départ correspondant à chaque ligne sont des itérés de la rotation d'angle α ($\forall i,\ \rho_i = i\alpha$), ou bien ils sont gouvernés par une seconde rotation irrationnelle d'angle β ($\forall i,\ \rho_i = i\beta$), où $1, \alpha, \beta$ sont rationnellement indépendants. Dans le premier cas, on obtient une suite périodique de complexité $m+n$. Dans le second cas, on a une suite uniformément récurrente et non périodique de complexité $mn+n$, pour m assez grand. Inversement, nous montrons que ces deux fonctions de complexité admettent la représentation géométrique suivante.

Théorème. *Une suite double U sur $\mathbb{Z}^2$ a pour complexité $m+n$ si et seulement s'il existe une suite u (sur $\mathbb{Z}$) de complexité $n+1$ telle que l'on a*

$$\forall (m,n),\ U(m,n) = u(m+n)$$

ou

$$\forall (m,n),\ U(m,n) = u(m-n).$$

Les suites de complexité $m+n$ sont donc périodiques et sont obtenues en décalant d'un cran de ligne en ligne une suite donnée de complexité $n+1$. La preuve de ce théorème est purement combinatoire et repose sur l'étude des facteurs de petite taille.

On appelle suite uniformément récurrente une suite telle pour pour tout entier n, il existe un entier $N(n)$ pour lequel tout facteur carré de côté $N(n)$ de la suite contienne tous les facteurs carrés de côté n.

Théorème. *Une suite double uniformément récurrente U, définie sur l'alphabet $\{0,1\}$, a pour complexité $mn+n$, pour m assez grand, si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, tels que $1, \alpha, \beta$ sont rationnellement indépendants, et $\rho \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait*
soit

$$\forall (m,n), \quad (U(m,n) = 0 \Longleftrightarrow \{m\alpha + n\beta + \rho\} \in [0, 1-\alpha[),$$

soit

$$\forall (m,n), \quad (U(m,n) = 0 \Longleftrightarrow \{m\alpha + n\beta + \rho\} \in]0, 1-\alpha]),$$

où $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

La preuve de ce théorème est basée sur des techniques de calcul de complexité pour des codages de rotation. L'étude de telles suites permet de plus de tester la conjecture sur la périodicité. Nous étudions en particulier de manière systématique les suites dont le langage en ligne est sturmien et dont la complexité satisfait $P(2,m) \leq 2m+2$, pour m assez grand. Nous montrons que ces suites sont ou bien périodiques, ou ont pour complexité $P(m,n) = mn+n$, pour m assez grand.

Les suites uniformément récurrentes de complexité $mn+n$ ont été introduites dans [4]. Elles sont obtenues comme une projection lettre à lettre de suites doubles définies sur un alphabet à trois lettres, codant un plan discret. Ces dernières ont pour complexité $mn+m+n$ et peuvent être considérées comme une généralisation bidimensionnelle des suites sturmiennes (voir aussi [23]). Nous construisons également des exemples de suites de complexité $mn+n$ non uniformément récurrentes.

Cet article est organisé comme suit. Nous rappelons dans la partie 2 quelques propriétés élémentaires des suites sturmiennes. Dans la partie 3, nous introduisons des définitions et notations concernant l'étude des suites doubles. En particulier, nous énonçons quelques propriétés suffisantes, comme l'uniforme récurrence, pour que le langage des facteurs en ligne d'une suite dont la complexité satisfait : $\forall m$, $P(m,1) = m+1$, soit sturmien, c'est-à-dire que toutes les suites en ligne sont des suites sturmiennes de même angle. Dans la section 3.5, nous établissons une bijection entre les facteurs rectangulaires de taille donnée (suffisamment grande) et une partition finie du cercle unité en intervalles. Les théorèmes principaux sont énoncés dans la partie 4.1 et les preuves se trouvent dans les paragraphes suivants.

2. Suites sturmiennes

2.1. **Quelques définitions.** Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini appelé **alphabet**. Soit $u = (u_n)$ une suite à valeurs dans $\mathcal{A}$ (indexée par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$). On appelle **facteur** de la suite infinie u un bloc fini w de lettres apparaissant de manière consécutive dans la suite : $w = u_{n+1} \cdots u_{n+d}$; d est appelé la longueur de w et est noté $|w|$. L'ensemble des facteurs de la suite u est appelé **langage** de la suite et est noté $\mathcal{L}_u$.

La suite u est dite **strictement périodique** si : $\exists T > 0,\ \forall n,\ u_{n+T} = u_n$. La suite u est dite **ultimement périodique** si : $\exists n_0, \exists T > 0,\ \forall |n| \geq n_0,\ u_{n+T} = u_n$.

Une suite est dite **récurrente** si tous ses facteurs apparaissent infiniment souvent. Elle est dite **uniformément récurrente** si tout facteur apparaît infiniment souvent et si toutes ses occurrences sont à lacunes bornées.

On appelle **fonction de complexité** de u la fonction p, définie sur les entiers, qui compte le nombre de facteurs de u de longueur donnée :

$$p(n) = \mathrm{Card}\{w;\ w \text{ est facteur de } u \text{ et } |w| = n\}.$$

La fonction de complexité permet de caractériser les suites périodiques. On a en effet le résultat classique suivant (voir [12, 7]) :

$$\exists n,\ \ p(n) \leq n \Longleftrightarrow \exists C,\ \forall n\ \ p(n) \leq C \Longleftrightarrow u \text{ est périodique.}$$

Plus précisément, si la suite u est unidirectionnelle, c'est-à-dire indexée par $\mathbb{N}$, la suite est alors ultimement périodique et si la suite u est bidirectionnelle, c'est-à-dire indexée par $\mathbb{Z}$, la suite est strictement périodique. La preuve de ce résultat repose sur le fait que s'il existe n tel que $p(n) \leq n$, alors il existe n_0 tel que $p(n_0+1) = p(n_0)$, et tout facteur de longueur n_0 admet une unique extension (on appelle **extension** d'un facteur w une lettre x telle que wx est aussi facteur). Pour tout entier k, le "futur" de la suite, c'est-à-dire $(u_n)_{n\geq k}$, est donc déterminé par la donnée de $u_{k-n_0} \dots u_{k-1}$. Il suffit de considérer un facteur de longueur n_0 qui apparaît deux fois dans la suite pour en déduire la périodicité. La période est alors inférieure ou égale à n_0. Pour plus d'informations sur la notion de fonction de complexité, voir le survol [3] pour une approche combinatoire, et le survol [9], pour les relations avec la dynamique symbolique.

2.2. **Suites sturmiennes.** Il apparaît alors naturel de s'intéresser aux suites de complexité $n+1$, c'est-à-dire telles que, pour tout n, $p(n) = n+1$. De telles suites existent sur $\mathbb{N}$ et sur $\mathbb{Z}$. Les suites de complexité $n+1$ indexées par $\mathbb{N}$ sont appelées **suites sturmiennes**. Les suites sturmiennes sont donc les suites de complexité minimale parmi les suites non-ultimement périodiques. L'exemple le plus classique de suite sturmienne est la suite de Fibonacci, point fixe de la substitution σ définie par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$. Les suites sturmiennes sont définies de manière purement combinatoire mais ce qui est remarquable, c'est qu'elles peuvent être également représentées géométriquement (voir [13]) : les suites sturmiennes sont exactement les suites obtenues en codant l'orbite d'un point ρ du cercle unité sous la rotation d'angle irrationnel α, par rapport à des intervalles complémentaires du cercle unité de longueurs α et $1-\alpha$.

Dans tout ce qui suit R_α désigne la rotation définie sur le cercle unité (identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) par : $R_\alpha(x) = x + \alpha$ modulo 1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettrons de préciser que nous travaillons modulo 1.

Théorème 1 (Morse-Hedlund). *Soit u une suite sturmienne à valeurs dans $\{0,1\}$. Il existe alors α irrationnel et ρ tels que l'on ait :*
soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n = 0 \Longleftrightarrow R_\alpha^n(\rho) = \rho + n\alpha \in [0, 1-\alpha[),$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n = 0 \Longleftrightarrow R_\alpha^n(\rho) = \rho + n\alpha \in]0, 1-\alpha]).$$

On appelle **angle** *d'une suite sturmienne le réel α qui lui est ainsi associé. On note (I_0, I_1) la* **partition** *correspondante : on a donc $I_0 = [0, 1-\alpha[$ ou $I_0 =]0, 1-\alpha]$.*

Notons que les suites sturmiennes ont de nombreuses autres caractérisations, tant géométriques que combinatoires (voir, par exemple, les survols [5, 10]).

Un des intérêts de cette représentation géométrique est qu'elle fournit une description simple en termes d'intervalles du cercle unité des facteurs de longueur donnée. Rappelons la propriété classique suivante (voir par exemple [11]). Nous utiliserons des raisonnements analogues par la suite.

Lemme 1. *Soit u une suite sturmienne d'angle α et de partition (I_0, I_1). Il existe une bijection entre les facteurs de longueur n de la suite u et les $n+1$ intervalles de la partition du cercle unité par les points $-k\alpha$, $0 \le k \le n$. Nous noterons $I_{w_1 \ldots w_n}$ l'unique intervalle du cercle unité ainsi associé au facteur $w_1 \ldots w_n$. On a*

$$I_{w_1 \ldots w_n} = \bigcap_{1 \le i \le n} R_\alpha^{-i+1} I_{w_i}.$$

Preuve. Un bloc $w = w_1 \ldots w_n \in \{0,1\}^n$ est facteur de la suite u si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall i,\ 1 \le i \le n,\ \ k\alpha + \rho + (i-1)\alpha \in I_{w_i},$$

c'est-à-dire

$$k\alpha + \rho \in I(w) := \bigcap_{1 \le i \le n} R_\alpha^{-i+1} I_{w_i}.$$

Par conséquent, si w est facteur, alors $I(w) \neq \emptyset$.

Réciproquement, soit $w = w_1 \ldots w_n \in \{0,1\}^n$ tel que $I(w) \neq \emptyset$. L'intérieur de $I(w)$ est donc non vide, et par densité de la suite $(k\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$, il existe k tel que $k\alpha + \rho \in I(w)$, et donc w apparaît à l'indice k.

Par conséquent, w est facteur si et seulement si $I(w) \neq \emptyset$.

On montre de plus que les ensembles $I(w)$ sont connexes. La preuve se fait par récurrence (voir par exemple [1]) et utilise la propriété suivante : si I et J sont deux semi-intervalles (de même sens d'ouverture) du cercle unité dont l'intersection n'est pas connexe, alors la somme de leurs longueurs est strictement supérieure à 1 et les extrémités de I (respectivement J) appartiennent à l'intérieur de J (respectivement I).

Enfin, on voit que ces intervalles sont délimités par les points $-k\alpha$, $0 \leq k \leq n$.

□

Notons que les longueurs des intervalles délimités par les points $-k\alpha$, $0 \leq k \leq n$, prennent trois valeurs au plus : il s'agit du théorème des trois longueurs (voir [19, 20, 21] ou le survol [2]). Soit δ_n la plus grande de ces longueurs. On a alors $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Nous utiliserons cette propriété dans la suite de cet article.

Une suite sturmienne est donc déterminée par la donnée de son angle α, du point de départ de l'orbite codée et du sens d'ouverture des intervalles de la partition du cercle unité par les points 0 et $1-\alpha$, ces trois éléments étant cités dans un ordre d'influence décroissant.

Plus précisément, on déduit du lemme précédent que toutes les suites sturmiennes de même angle ont même langage.

Définition 1. On désigne par $\mathcal{L}_\alpha$ le langage des facteurs des suites sturmiennes d'angle α.

Réciproquement, toute suite ayant pour langage $\mathcal{L}_\alpha$ est une suite sturmienne d'angle α (voir par exemple [10]). En d'autre termes, pour toute suite sturmienne u, le système dynamique $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$ est minimal, T désignant le décalage unilatéral : $T((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, et $\overline{\mathcal{O}(u)}$ désignant la clôture de l'orbite de u sous l'action de T dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni du produit des topologies discrètes. Ceci implique en particulier [12] qu'une suite sturmienne est uniformément récurrente. Enfin, notons que deux suites sturmiennes de même angle α et de même point de départ ρ mais codées par deux partitions de sens d'ouverture inverses l'un de l'autre, soit sont égales (si $\rho \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$), soit ne diffèrent qu'en au plus deux indices qui sont alors consécutifs.

2.3. **Langage sturmien.** Nous nous intéresserons dans les paragraphes suivants à des suites doubles dont le langage des facteurs en ligne est de la forme $\mathcal{L}_\alpha$. Nous aurons donc besoin de caractériser les langages factoriels et biprolongeables de complexité $n+1$. Rappelons qu'un langage est dit

factoriel si tout facteur d'un mot du langage appartient encore au langage. Un langage est dit **biprolongeable** si tout facteur se prolonge à gauche et à droite en un mot du langage.

Lemme 2. *Un langage $\mathcal{L}$ factoriel et biprolongeable de complexité $n+1$ est le langage d'une suite de complexité $n+1$, indexée par $\mathbb{Z}$.*

Preuve. Nous allons construire une suite u de complexité $n+1$ telle que son langage $\mathcal{L}_u$ soit égal à $\mathcal{L}$. Pour tout n, il existe un unique facteur G_n de longueur n de $\mathcal{L}$ tel que $0G_n$ et $1G_n$ appartiennent à $\mathcal{L}$. Le facteur G_n est alors un préfixe de G_m, pour tout $m \geq n$.

Supposons qu'il existe $x_0, x_1, \ldots, x_k$ tels que

$$\forall n,\ x_k \ldots x_0 G_n \in \mathcal{L}.$$

Par biprolongeabilité, il existe une lettre x_{k+1} telle que pour une infinité d'entiers n, on ait $x_{k+1}x_k \ldots x_0 G_n \in \mathcal{L}$. Cette propriété est alors vraie pour tout n, puisque le langage est factoriel et puisque G_n est un préfixe de G_m, pour tout $m \geq n$. On peut donc définir par récurrence une telle suite de lettres x_k. On définit alors sur $\mathbb{Z}$ une suite v de la façon suivante :

$$\forall n,\ v_1 \ldots v_n = G_n,$$

$$\forall k \geq 0,\ v_{-k} = x_k.$$

Le langage $\mathcal{L}_v$ des facteurs de la suite v est bien inclus dans $\mathcal{L}$ par factorialité. Si la complexité de la suite v satisfait : $\forall n,\ p_v(n) = n+1$, alors la suite v convient.

Dans le cas contraire, la suite v, et par conséquent, la suite unidirectionnelle $(v_n)_{n\geq 1}$, sont purement périodiques, et donc récurrentes. Pour tout n, il existe alors une lettre y_n telle que y_nG_n soit facteur de la suite unidirectionnelle $(v_n)_{n\geq 1}$. Il existe une même valeur y prise par la lettre y_n pour une infinité d'entiers $n \geq 1$. On pose $x = 0$, si $y = 1$ et $x = 1$, sinon. On définit alors une suite u sur $\mathbb{N}$ de la manière suivante : $u_0 = x$ et $\forall n,\ u_1 \ldots u_n = G_n$. Par factorialité, le langage $\mathcal{L}_u$ est encore inclus dans $\mathcal{L}$. On prolonge alors comme précédemment u en une suite définie sur $\mathbb{Z}$ dont le langage reste inclus dans $\mathcal{L}$. Par construction, il existe n arbitrairement grand tel que xG_n et yG_n soient facteurs de la suite u. La complexité de u n'est donc pas bornée et par conséquent, $p_u(n) = n+1$, pour tout n. $\square$

Rappelons qu'une suite est dite **récurrente** si tous ses facteurs apparaissent infiniment souvent. Les suites de complexité $n+1$ définies sur $\mathbb{Z}$ peuvent être décrites de manière explicite (voir [13]). En particulier, les suites récurrentes de complexité $n+1$ sont les extensions sur $\mathbb{Z}$ des suites de complexité $n+1$ définies sur $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire les codages d'orbites bilatères) mais il existe également des suites non récurrentes comme les exemples suivants de suites de complexité $n+1$:

$$\ldots 0001000 \ldots$$

$$\ldots 0001111 \ldots$$

Théorème 2 (Morse-Hedlund). *Une suite récurrente u définie sur $\mathbb{Z}$ a pour complexité $n+1$ si et seulement s'il existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $\rho \in \mathbb{R}$, tels que*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (u(n) = 0 \Longleftrightarrow n\alpha + \rho \in [0, 1-\alpha[),$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (u(n) = 0 \Longleftrightarrow n\alpha + \rho \in \,]0, 1-\alpha]).$$

Dans tout ce qui suit, nous nous intéresserons à des suites récurrentes de complexité $n+1$ définies sur $\mathbb{Z}$ ainsi qu'aux langages factoriels, biprolongeables correspondants d'après le lemme 2.

Définition 2. Nous appellerons **suite sturmienne** une suite **récurrente** de complexité $n+1$.

3. Suites doubles

3.1. **Notations et définitions.** Nous étudierons dans tout ce qui suit des suites doubles indexées par $\mathbb{Z}^2$. Soit $U = (U(m,n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une telle suite. On appelle **facteur rectangulaire** de taille (m,n) de la suite U un tableau $W = [w_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} w_{1,n} & \cdots & w_{m,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1,1} & \cdots & w_{m,1}, \end{array}$$

tel qu'il existe k, l satisfaisant $w_{i,j} = U_{k+i-1, l+j-1}$, pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Nous représenterons les suites doubles avec la convention utilisée classiquement pour la représentation en coordonnées dans le plan : le premier indice désigne l'abcisse, donc l'indice de colonne (de gauche à droite) et le second indice désigne l'ordonnée, donc l'indice de ligne (de bas en haut). Nous garderons cette même convention pour la représentation des facteurs, ce qui ne correspond plus à la notation matricielle habituelle.

Définition 3. On note $\mathcal{L}(m,n)$ l'ensemble des facteurs rectangulaires de taille (m,n) de la suite double U et $\mathcal{L}_l$ le langage en ligne, c'est-à-dire l'ensemble des facteurs de toutes les suites (unidimensionnelles) en ligne $(U(m,n))_{m\in\mathbb{Z}}$:

$$\mathcal{L}_l = \bigcup_{m\geq 1} \mathcal{L}(m,1).$$

La **fonction de complexité rectangulaire** est alors définie, pour tout couple d'entiers (m,n), comme

$$P(m,n) = \mathrm{Card}(\mathcal{L}(m,n)).$$

Définition 4. Une suite double U est dite **récurrente** si pour tout facteur W, pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, il existe une occurrence de W dans chacun des quatre quadrants d'origine (m,n).

Une suite double U est dite **uniformément récurrente** si pour tout entier n, il existe un entier $N(n)$ tel que tout facteur carré de côté $N(n)$ de la suite contienne tous les facteurs de taille (n,n).

3.2. **Complexité minimale.** Il est naturel de s'interroger sur les liens entre complexité rectangulaire et périodicité. Une suite double est dite **périodique** si elle est invariante par translation, c'est-à-dire si elle admet un **vecteur de périodicité** non nul et à coordonnées entières :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2/\{0,0\},\ \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2,\ U(i+a,j+b) = U(i,j).$$

Notons que la complexité rectangulaire est bornée si et seulement si le réseau des vecteurs de périodicité est de rang 2. Comment caractériser alors le fait qu'il existe au moins un vecteur de péridodicité non nul ? Rappelons la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Soit $U(m,n)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite double et soit $P(m,n)$ sa fonction de complexité rectangulaire. S'il existe (m_0,n_0) tel que*

$$P(m_0,n_0) \leq m_0 n_0,$$

alors la suite double U est périodique.

Sanders et Tijdeman ont prouvé la conjecture dans [17] pour des facteurs de taille $(2,n)$ ou $(n,2)$: s'il existe n tel que $P(2,n) \leq 2n$ ou $P(n,2) \leq 2n$, alors la suite est périodique. Notons qu'une conjecture plus générale est énoncée dans [15, 16, 17], en étendant la notion de complexité. Un contre-exemple à la conjecture analogue pour des suites k-dimensionnelles, avec $k \geq 3$, est donné dans [16]. Epifanio, Koskas et Mignosi montrent de plus dans [8] une version affaiblie de la conjecture : s'il existe (m_0,n_0) tel que $P(m_0,n_0) \leq \alpha m_0 n_0$, avec $\alpha = 1/100$, alors la suite est périodique. Le cas limite $mn+1$ a été étudié en détails par Cassaigne dans [6].

On voit aisément que s'il existe deux entiers positifs m_0, n_0 tels que

$$P(m_0,n_0) < m_0 + n_0 + d - 2,$$

pour une suite double définie sur un alphabet de cardinal d, alors cette suite est périodique, soit par rapport aux lignes, soit par rapport aux colonnes, c'est-à-dire que l'un des vecteurs $(1,0)$ ou $(0,1)$ est un vecteur de périodicité [14]. Il suffit pour obtenir ce résultat de calquer la preuve du cas unidimensionnel. Nous étudions le cas limite de la complexité $m+n$ dans la partie 4.3.

3.3. **Une condition sur le langage en ligne.** Le but de ce paragraphe est d'énoncer des conditions qui impliquent la propriété suivante sur le langage en ligne $\mathcal{L}_l$ de la suite double U :

$$\exists \alpha \notin \mathbb{Q} \text{ tel que } \mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha, \tag{1}$$

avec $\mathcal{L}_\alpha$ défini dans la définition 1.

Lemme 3. *Soit U suite double fixée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$;*
2. *chaque ligne est une suite sturmienne d'angle α ;*
3. *il existe une ligne qui est sturmienne d'angle α, et $\forall m$, $P(m,1) = m+1$.*

Preuve. Rappelons qu'une suite sturmienne est **uniformément récurrente** (tout facteur apparaît infiniment souvent et à lacunes bornées). Comme une suite sturmienne est de plus non périodique, il n'existe pas de puissances arbitrairement grandes d'un même facteur. Supposons que le langage d'une ligne soit strictement inclus dans $\mathcal{L}_l$. Cette ligne possède alors au plus n facteurs de taille n, pour un certain entier n. Elle est donc purement périodique, ce qui contredit l'uniforme récurrence. □

Lemme 4. *On considère une suite double U dont la fonction de complexité satisfait $P(m,1) = m+1$, pour tout m. Si la suite U satisfait l'une ou l'autre des deux conditions suivantes, à savoir,*

1. *la suite U est uniformément récurrente,*
2. *la suite U admet soit une ligne, soit une colonne, non ultimement périodique,*

alors il existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$.

Preuve.

1. Supposons la suite U uniformément récurrente. Montrons que toute suite u associée au langage $\mathcal{L}_l$ selon le lemme 2 (c'est-à-dire telle que $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_l$) est récurrente. Supposons au contraire que $\mathcal{L}_l$ soit le langage d'une suite non récurrente. Il existe alors $W_m \in \mathcal{L}(m,1)$ facteur de longueur m tel que $W_m X W_m \notin \mathcal{L}_l$, pour tout mot X. Il existe $N(m)$ tel que tout facteur de taille $(N(m), N(m))$ contienne W_m, par récurrence uniforme. Considérons les lignes d'indice $1, 2, \ldots, N(m)$. Il existe k_m tel que W_m n'apparaisse plus dans les lignes d'indice 1 à $N(m)$, pour un indice de colonne plus grand que k_m. Il suffit de considérer une fenêtre rectangulaire de taille $(N(m), N(m))$ placée à l'indice de ligne 1 et à un indice de colonne plus grand que k_m, pour obtenir une contradiction.

   Par conséquent, d'après le théorème 2, il existe α irrationnel tel que $\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$.

2. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que la suite U admet soit une ligne, soit une colonne, non ultimement périodique. Il suffit de raisonner sur les lignes par symétrie. On suppose qu'il existe une ligne non ultimement périodique à droite. Soit i son indice de ligne. Considérons la suite unidirectionelle $(u(m,i))_{m\in\mathbb{N}}$. Cette suite est non ultimement périodique par hypothèse (donc sa fonction de complexité p satisfait : $\forall m$, $p(m) \geq m+1$) et son langage que l'on note $\mathcal{L}^i$ est inclus dans $\mathcal{L}_l$ (par conséquent $\forall m$, $p(m) \leq m+1$). On a donc : $\forall m$, $p(m) = m+1$, $\mathcal{L}^i = \mathcal{L}_l$, et d'après le théorème 1, il existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$. □

Remarque. Considérons la suite double définie par $U(m,n) = 1$, si $m = n = 0$ et $U(m,n) = 0$ sinon. On a alors : $\forall (m,n)$, $P(m,n) = mn+1$. On voit que la seule condition $\forall m$, $P(m,1) = m+1$, n'implique pas la récurrence uniforme.

De même, si l'on affaiblit l'hypothèse de récurrence uniforme en la remplaçant par la simple hypothèse de récurrence, on peut construire un exemple de suite dont le langage en ligne $\mathcal{L}_l$ ne satisfait pas la condition (1). Nous allons construire une suite double U récurrente dont les lignes sont de la forme $\cdots 0001000 \cdots$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_l = 0^*10^* \cup 0^*$.

Comme nous travaillons sur une suite double U dont les lignes sont des suites de la forme $\cdots 0001000 \cdots$, il suffit pour définir U, de donner pour chaque ligne, la position de la lettre 1. Nous allons construire la suite U par récurrence.

On place sur la première ligne un 1 en position $(0,0)$. Afin d'avoir une occurrence de la lettre 1 dans chacun des quatre quadrants d'origine $(0,0)$, on place quatre suites $\cdots 0001000 \cdots$, avec les 1 en positions $(1,1)$, $(-1,2)$, $(-1,-1)$ et $(1,-2)$.

On vient de construire le facteur

$$w_1 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

centré en $(0,0)$.

On définit par récurrence le facteur de taille $(3^{i+1}, 5^{i+1})$

$$w_{i+1} = \begin{matrix} w_i & 0_i & 0_i \\ 0_i & 0_i & w_i \\ 0_i & w_i & 0_i \\ w_i & 0_i & 0_i \\ 0_i & 0_i & w_i \end{matrix} \; ,$$

0_i étant un facteur de la même taille que w_i (c'est-à-dire de taille $(3^i, 5^i)$).

Notons qu'une autre façon de définir les facteurs w_i consiste à considérer la substitution suivante :

$$\sigma(1) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,, \quad \sigma(0) = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,.$$

On a $w_i = \sigma^i(1)$.

On définit alors la suite U comme la suite dont les facteurs centrés en $(0,0)$ de taille $(3^i, 5^i)$ sont les facteurs w_i.

On vérifie aisément qu'il existe un et un seul 1 par ligne. Montrons de plus que la suite U est récurrente. Soit W un facteur de la suite U et soit (m,n) un point de $\mathbb{Z}^2$. Par construction, il existe i assez grand pour que W soit facteur de w_i et pour que $\frac{3^i-1}{2} \geq \sup(|m|,|n|)$. Si maintenant l'on considère le facteur w_{i+1}, alors w_i (et donc W) apparaît dans chacun des quatre quadrants d'origine (m,n).

Notons que la condition (1) appliquée aux lignes **et** aux colonnes implique que l'angle associé est alors le même.

Lemme 5. *Soit U une suite double. Soit $\mathcal{L}_c$ le langage des facteurs qui apparaissent en colonne :*

$$\mathcal{L}_c = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{L}(1,n).$$

Supposons que la condition (1) s'applique aussi bien aux lignes qu'aux colonnes, c'est-à-dire :

$$\textit{il existe } \alpha \notin \mathbb{Q} \textit{ tel que } \mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha,$$

$$\textit{il existe } \beta \notin \mathbb{Q} \textit{ tel que } \mathcal{L}_c = \mathcal{L}_\beta.$$

On a alors $\alpha = \beta$.

Preuve. Il suffit pour cela de considérer la fréquence $f(0)$ d'apparition de la lettre 0 : cette fréquence est définie comme la limite, si elle existe, du nombre d'occurrences de la lettre 0 dans le facteur "central" carré de la suite de taille $(2n+1, 2n+1)$

$$\begin{matrix} U_{-n,n} & \cdots & U_{n,n} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{-n,-n} & \cdots & U_{n,-n}, \end{matrix}$$

divisé par $(2n+1)^2$. Or, pour tout intervalle fixé I du cerle unité, la convergence quand n tend vers $+\infty$ de

$$\frac{\mathrm{Card}\{-n \leq i \leq n,\ i\alpha + \rho \in I\}}{2n+1}$$

vers la longueur de I est uniforme en ρ (en d'autres termes, une rotation irrationnelle est **uniquement ergodique**). Par conséquent, on en déduit que la fréquence de la lettre 0 existe et vaut α, en comptant le nombre d'occurrences de la lettre 0 par ligne. En appliquant le même raisonnement aux colonnes, on obtient $\alpha = \beta$. □

Remarque. R. Tijdeman a montré [22] de manière combinatoire qu'une suite satisfaisant les conditions du lemme 5, par exemple une suite uniformément récurrente telle que $P(m,1) = P(1,m) = m+1$, pour tout m, satisfait alors :
soit

$$\forall (m,n),\ U(m,n) = U(m+n,0),$$

soit

$$\forall (m,n),\ U(m,n) = U(m-n,0),$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'une suite sturmienne que l'on a décalé d'un cran de ligne en ligne. Une telle suite a donc pour complexité $m+n$. Nous reviendrons sur cette fonction de complexité au paragraphe 4.3.

3.4. **Facteurs et intervalles.** *Nous supposerons dans tout ce paragraphe que nous sommes dans les conditions étudiées précédemment, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$, et donc que chaque suite en ligne de la suite double U est une suite sturmienne d'angle α.*

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des facteurs de taille donnée (suffisamment grande) qui apparaissent infiniment souvent dans la suite double U avec un indice en ligne fixé, et une partition en intervalles du cercle unité. Cette étude est analogue à l'étude classique faite dans le cas des suites sturmiennes (lemme 1), ou plus généralement, des codages de rotations (voir par exemple [1, 2, 4, 11]). Une difficulté supplémentaire apparaît du fait que l'on code l'itinéraire des rotations selon des partitions en intervalles semi-ouverts qui sont éventuellement différentes d'une ligne à l'autre. Nous allons travailler dans un premier temps avec les lignes prises deux à deux. Nous généraliserons ensuite les résultats obtenus à des facteurs de taille quelconque.

Définition 5. On note I_0^i l'intervalle $[0, 1-\alpha[$ ou $]0, 1-\alpha]$ qui code la suite en ligne d'indice i. On définit alors I_1^i comme le complémentaire de I_0^i dans le cercle unité.

Pour toute ligne d'indice i, soit ρ_i tel que l'on ait

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ (U(m,i) = 0 \Longleftrightarrow m\alpha + \rho_i \in I_0^i).$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose de plus $\beta_i = \rho_{i+1} - \rho_i$.

On considère un entier i fixé. Soit $\mathcal{L}_i(m,2)$ l'ensemble des facteurs rectangulaires de taille $(m,2)$ dont l'indice d'occurrence en ligne est i.

Lemme 6. *Un facteur rectangulaire* $W = \begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{matrix}$ *apparaît dans la suite double* U *avec un indice de ligne* i *et de colonne* k *si et seulement si*

$$\rho_i + k\alpha \in I_i(W) := \Big(\bigcap_{1 \le j \le m} R_\alpha^{-j+1} I_{v_j}^i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{1 \le j \le m} R_{-\beta_i} R_\alpha^{-j+1} I_{w_j}^{i+1}\Big).$$

Soient $I_0 =]0, 1-\alpha[$ *et* $I_1 =]1-\alpha, 1[$. *Un facteur rectangulaire* $W = \begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{matrix}$ *apparaît infiniment souvent dans la suite double* U *avec un indice de ligne* i *si et seulement si*

$$I_i'(W) := \Big(\bigcap_{0 \le j \le m-1} R_\alpha^{-j+1} I_{v_j}\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{0 \le j \le m-1} R_\alpha^{-j+1} R_{-\beta_i} I_{w_j}\Big) \neq \emptyset.$$

Il existe de plus un entier m_0 *qui ne dépend que de* α *(et qui ne dépend donc pas de l'indice* i*), tel que pour* $m \ge m_0$*, les ensembles* $I_i(W)$ *et* $I_i'(W)$ *sont des intervalles.*

Preuve. Soit $W = \begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{matrix}$ un facteur et soit (k,i) un indice d'occurrence pour ce facteur. On a alors

$$\rho_i + k\alpha \in \bigcap_{1 \le j \le m} R_\alpha^{-j+1} I_{v_j}^i,$$

et de même

$$\rho_{i+1} + k\alpha = \rho_i + \beta_i + k\alpha \in \bigcap_{1 \le j \le m} R_\alpha^{-j+1} I_{w_j}^{i+1}.$$

Par conséquent

$$\rho_i + k\alpha \in I_i(W) := \Big(\bigcap_{1 \le j \le m} R_\alpha^{-j+1} I_{v_j}^i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{1 \le j \le m} R_{-\beta_i} R_\alpha^{-j+1} I_{w_j}^{i+1}\Big).$$

On a donc montré que si W est facteur, alors $I_i(W) \neq \emptyset$.

Reprenons les notations du lemme 1. Soit $I_{v_1 \dots v_n}^i = \bigcap_{1 \le j \le m} R_\alpha^{-j+1} I_{v_j}^i$ et $I_{w_1 \dots w_n}^{i+1} = \bigcap_{1 \le j \le m} R_\alpha^{-j+1} I_{w_j}^{i+1}$. Notons que l'on a alors

$$I_i(W) = I_{v_1 \dots v_n}^i \bigcap R_{-\beta_i} I_{w_1 \dots w_n}^{i+1}.$$

Réciproquement, soit $W = \begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{matrix}$ bloc rectangulaire de taille $(m,2)$ défini sur l'alphabet $\{0,1\}$. Deux situations peuvent se présenter, selon que les partitions (I_0^i, I_1^i) et (I_0^{i+1}, I_1^{i+1}) (correspondant aux suites sturmiennes d'indices i et $i+1$ en ligne) sont les mêmes ou non.

- Supposons que ces partitions soient les mêmes. On a alors, avec les notations du lemme 6, $I_i'(W) \neq \emptyset$ si et seulement si $I_i(W) \neq \emptyset$. Supposons $I_i(W) \neq \emptyset$. Par densité de la suite $(k\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ ($\alpha \notin \mathbb{Q}$), il existe k tel que $\rho_i + k\alpha \in I_i(W)$. Par conséquent, $W \in \mathcal{L}_i(m,2)$. On a donc montré que

$$W \in \mathcal{L}_i(m,2) \text{ si et seulement si } I_i'(W) \neq \emptyset.$$

  Notons de plus, que si $W \in \mathcal{L}_i(m,2)$, alors W apparaît infiniment souvent à l'indice de ligne i.
- Supposons maintenant que les partitions ne soient pas les mêmes. On peut alors éventuellement avoir $I_i(W)$ réduit à un point. Cela ne peut se produire que si les intervalles semi-ouverts $I_{v_1\ldots v_n}^i$ et $R_{-\beta_i}(I_{w_1\ldots w_n}^{i+1})$ (définis dans le lemme 1) qui sont alors de sens d'ouverture contraires, ont une extrémité commune. Cette extrémité est de la forme $-l_i\alpha$, avec $0 \leq l_i \leq n$. De plus, cette extrémité ne correspond à un facteur, que si $\rho_i \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$; ce facteur apparaît alors (avec un indice de ligne i) à l'unique indice k_i de colonne tel que

$$\rho_i + k_i\alpha = -l_i\alpha \text{ modulo } 1.$$

  Par conséquent, si $\rho_i \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, on a encore équivalence entre W est facteur et $I_i(W) \neq \emptyset$.

  Dans le cas où $\rho_i \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, on n'a plus équivalence entre W est facteur et $I_i(W) \neq \emptyset$. Seule l'implication suivante subsiste : si W est facteur alors $I_i(W)$ est non vide, et dans ce cas, W apparaît une et une seule fois à l'indice de ligne i.

  Néanmoins, si $I_i'(W) \neq \emptyset$, alors W apparaît infiniment souvent à un indice de ligne égal à i, toujours par un argument de densité.

Il reste à montrer que les ensembles $I_i(W)$ sont connexes pour m assez grand. Pour tout m, les $m+1$ ensembles de la forme $I_{v_1\ldots v_m}^i$, avec $v_1 \ldots v_m$ facteur, sont connexes (lemme 1). Il en va de même pour les $m+1$ ensembles de la forme $I_{w_1\ldots w_m}^{i+1}$. On a $I_i(W) = I_{v_1\ldots v_m}^i \cap R_{-\beta_i} I_{w_1\ldots w_m}^{i+1}$. Il existe un entier m_0 tel que pour $m \geq m_0$, la plus grande des longueurs de chacun de ces intervalles, notée δ_m, satisfait $\delta_m < 1/2$. Cet entier m_0 ne dépend pas de i et peut être exprimé explicitement en fonction du développement en fraction continue de α (voir par exemple [2]). Or si l'intersection de deux intervalles I et J du cercle unité est non connexe, alors la somme des longueurs de ces deux intervalles est supérieure à 1. Les ensembles $I_i(W)$ sont donc connexes. Il en est de même pour les ensembles $I_i'(W)$. □

Par conséquent on obtient une description de l'ensemble des facteurs rectangulaires de taille $(m,2)$ en termes de partition finie du cercle unité en intervalles. Ceci nous permettra donc d'évaluer la fonction de complexité $P(m,2)$ d'une suite double satisfaisant la condition (1).

Plus généralement, on montre de manière analogue le lemme suivant pour les facteurs de taille quelconque.

Lemme 7. *Un facteur rectangulaire $W = [w_{j,l}]_{1\le j\le m, 1\le l\le n}$ apparaît dans la suite double U à un indice de ligne i si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$\rho_i + k\alpha \in I_i(W) := \Big(\bigcap_{1\le j\le m, 0\le l\le n-1} R_\alpha^{-j+1} R_{\rho_{l+i}-\rho_i} I^l_{w_{j,l}} \Big)$$

Soient $I_0 =]0, 1-\alpha[$ et $I_1 =]1-\alpha, 1[$. Un facteur rectangulaire $W = [w_{j,l}]$ apparaît infiniment souvent dans la suite double U avec un indice de ligne i si et seulement si

$$I_i'(W) := \Big(\bigcap_{1\le j\le m, 0\le l\le n-1} R_\alpha^{-j+1} R_{\rho_{l+i}-\rho_i} I_{w_{j,l}} \Big) \neq \emptyset.$$

De plus, les ensembles $I_i(W)$ et $I_i'(W)$ sont des intervalles, pour m assez grand.

4. Complexité et représentation géométrique

Le but de ce paragraphe est d'une part de montrer quelles fonctions de complexité sont réalisables sous la condition (1) (énoncée au paragraphe 3.3), et d'autre part de donner une représentation géométrique pour certaines suites de basse complexité. Nous énoncerons dans le paragraphe 4.1 les résultats obtenus. Les paragraphes 4.2 et 4.3 contiennent les preuves correspondantes.

4.1. **Énoncé des résultats.** Nous allons montrer qu'une étude précise du langage des facteurs de taille $(m,2)$ dans le cas où $P(m,2) \le 2m+2$, pour m assez grand, permet de caractériser les fonctions de complexité compatibles avec la condition (1). On a, plus précisément, le résultat suivant.

Théorème 3. *Soit U suite double indexée par $\mathbb{Z}^2$, satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *il existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$ (condition (1)) ;*
2. *$P(m,2) \le 2m+2$, pour m assez grand.*

Alors, ou la suite U est périodique, ou bien sa fonction de complexité satisfait

$$\exists m_1,\ \forall m \ge m_1,\ P(m,n) = mn + n.$$

Rappelons que s'il existe m tel que $P(m,2) \le 2m$, alors la suite est périodique [17].

On déduit de ce théorème et du lemme 4, le résultat d'impossibilité suivant pour une suite uniformément récurrente.

Corollaire 1. *Il n'existe pas de suite uniformément récurrente telle que*

$$\forall (m,n),\ P(m,n) = mn + 1$$

ou telle que

$$\forall (m,n),\ P(m,n) = mn + \min(m,n).$$

Le cas des suites de complexité $mn + 1$ a également été traité dans [6] par une approche purement combinatoire.

Au cours de la preuve du théorème 3 (paragraphe 4.2), nous serons amenés à démontrer le résultat suivant de caractérisation des suites de complexité $mn + n$ satisfaisant la condition (1).

Théorème 4. *Soit U suite* **uniformément récurrente** *de complexité mn $+n$, pour m assez grand, définie sur $\{0,1\}$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que 1, α, β sont rationellement indépendants, il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :*
soit

$$\forall (m,n),\ (U_{m,n} = 0 \Longleftrightarrow m\alpha + n\beta + \rho \in [0, 1 - \alpha[),$$

soit

$$\forall (m,n),\ (U_{m,n} = 0 \Longleftrightarrow m\alpha + n\beta + \rho \in]0, 1 - \alpha]).$$

Soit U suite **non uniformément récurrente** *définie sur $\{0,1\}$, de complexité $mn + n$, pour m assez grand, et satisfaisant la condition (1) ($\exists \alpha \notin \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$). Reprenons les notations de la définition 5. Il existe alors $\rho \in \mathbb{R}$, $k, i_0 \in \mathbb{Z}$ tels que l'on ait*

$$\forall (m,n),\ (U_{m,n} = 0 \Longleftrightarrow (m + k(n-1))\alpha + \rho \in I_0^n),$$

avec : $\forall i < i_0,\ \forall j < i_0,\ I_0^i = I_0^j,\ \forall i \geq i_0,\ \forall j \geq i_0,\ I_0^i = I_0^j$ et $I_0^{i_0} \neq I_0^{i_0 - 1}$.

On trouve d'une part des suites uniformément récurrentes correspondant à des suites sturmiennes en ligne d'angle α dont les différences entre deux points de départ ρ_i consécutifs sont égales à un réel β, tel que 1, α, β sont rationnellement indépendants ($\forall i,\ \rho_{i+1} - \rho_i = \beta$). On obtient d'autre part des suites sturmiennes en ligne d'angle α dont les différences entre deux points de départ ρ_i consécutifs sont égales à un multiple de α, mais les partitions (I_i^0, I_i^1) définissant les suites sturmiennes en ligne sont inversées à partir d'un certain indice de ligne. Notons qu'en aucun cas on n'obtient de suites périodiques. On trouve donc deux situations extrêmes : dans un cas, on a des suites régulièrement "perturbées" de ligne en ligne ; dans l'autre cas, on a des suites a priori de complexité $m + n$ perturbées par le changement de sens de la partition, on passe alors à une complexité égale à $mn + n$. L'exemple suivant montre de plus qu'il existe des suites de complexité $mn+n$ ne satisfaisant pas la condition (1) :

$$\begin{array}{c}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\ldots 00000000000000000 \ldots\\
\ldots 00000000000000000 \ldots\\
\ldots 11111111100000000 \ldots\\
\ldots 00000000011111111 \ldots\\
\ldots 00000000000000000 \ldots\\
\ldots 00000000000000000 \ldots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

La preuve des théorèmes 3 et 4 repose sur l'étude des lignes prises consécutivement 2 à 2. Nous montrons qu'une contrainte sur le langage en ligne puis sur la complexité $P(m,2)$ suffit à caractériser les suites non périodiques.

Enfin, nous montrons également de manière purement combinatoire dans le paragraphe 4.3 que les suites de complexité $m+n$ sont obtenues en décalant d'un cran de ligne en ligne une suite donnée de complexité $n+1$.

Théorème 5. *Une suite double $U=(U(m,n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ a pour fonction de complexité $m+n$ si et seulement s'il existe une suite u (définie sur $\mathbb{Z}$) de complexité $n+1$ telle que*
soit

$$\forall (m,n),\ U(m,n)=u(m+n),$$

soit

$$\forall (m,n),\ U(m,n)=u(m-n).$$

4.2. **Preuve des théorèmes 3 et 4.** Soit U suite double telle qu'il existe α irrationnel pour lequel $\mathcal{L}_l=\mathcal{L}_\alpha$ et telle que $P(m,2)\le 2m+2$, pour m assez grand. Reprenons les notations de la définition 5. Pour toute ligne d'indice i, il existe ρ_i tel que l'on ait

$$\forall m\in\mathbb{Z},\ (U(m,i)=0 \Longleftrightarrow m\alpha+\rho_i\in I_0^i).$$

Rappelons que $I_0^i=[0,1-\alpha[$ ou $]0,1-\alpha]$. Pour tout $i\in\mathbb{Z}$, on pose $\beta_i=\rho_{i+1}-\rho_i$.

Nous allons considérer, dans un premier temps, le cas où pour tout i, $\beta_i\in\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ puis, dans un second temps, le cas où il existe i tel que $\beta_i\notin\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$.

Premier cas : $\forall i,\ \beta_i\in\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$. À i fixé, soit k_i l'unique entier relatif tel que $\beta_i=k_i\alpha$ modulo 1. Soit $\mathcal{L}_i(m,2)$ l'ensemble des facteurs rectangulaires de taille $(m,2)$ dont l'indice d'occurrence en ligne est i et $\mathcal{L}'_i(m,2)$ l'ensemble des facteurs rectangulaires de taille $(m,2)$ qui apparaissent infiniment souvent avec un indice d'occurrence en ligne i. Selon le lemme 6, le bloc $W = \begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{matrix} \in \mathcal{L}'_i(m,2)$ si et seulement si $I'_i(W) \neq \emptyset$, avec

$$I'_i(W) = (\bigcap_{1\le j\le m} R_\alpha^{-j+1} I_{v_j}) \bigcap (\bigcap_{1\le j\le m} R_\alpha^{-k_i} R_\alpha^{-j+1} I_{w_j}).$$

Il existe de plus m_0 (ne dépendant que de α et non de i) tel que les ensembles $I'_i(W)$ sont connexes pour $m \geq m_0$. Supposons $m \geq m_0$ et $m \geq |k_i| - 1$. On voit alors qu'il y a autant de facteurs dans $\mathcal{L}'_i(m,2)$ que d'intervalles du cercle unité partitionné par les points

$$-j\alpha, \text{ avec } 0 \le j \le m + k_i, \text{ si } k_i \ge 0$$

(respectivement, par les points

$$-j\alpha, \text{ avec } -k_i \le j \le m - k_i, \text{ si } k_i \le 0).$$

On a donc

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \ \forall m \ge \sup(|k_i| - 1, m_0), \ \mathrm{Card}(\mathcal{L}'_i(m,2)) = m + |k_i| + 1.$$

Le traitement de ce premier cas ($\forall i$, $\beta_i \in \alpha + \alpha\mathbb{Z}$) se décompose alors à son tour en deux étapes. Nous allons montrer dans un premier temps que $k_i = k_j$, pour tout (i,j). Dans un second temps, nous prendrons en compte le fait que les sens d'ouverture des intervalles des partitions (I_0^i, I_1^i) et (I_0^{i+1}, I_1^{i+1}) diffèrent ou non.

Première étape. Nous allons montrer que $k_i = k_j$, pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$. Pour cela, nous allons utiliser la récurrence uniforme du langage sturmien $\mathcal{L}_\alpha$ correspondant aux suites sturmiennes d'angle α ($\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_l$) pour montrer que si $k_i \neq k_j$, il existe alors m arbitrairement grand tel que

$$\mathcal{L}'_i(m,2) \cap \mathcal{L}'_j(m,2) = \emptyset,$$

ce qui implique, pour m assez grand :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}'_i(m,2) \cup \mathcal{L}'_j(m,2)) = 2m + |k_i| + |k_j| + 2.$$

Comme, pour m assez grand :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}'_i(m,2) \cup \mathcal{L}'_j(m,2)) \le \mathrm{Card}(\mathcal{L}_i(m,2) \cup \mathcal{L}_j(m,2)) \le P(m,2) \le 2m+2,$$

on en déduira la contradiction souhaitée.

Supposons $k_i \neq k_j$ et $\mathcal{L}'_i(m,2) \cap \mathcal{L}'_j(m,2) \neq \emptyset$, avec $m \ge \sup(|k_i|+1, |k_j|+1, m_0)$. Soit $W \in \mathcal{L}'_i(m,2) \cap \mathcal{L}'_j(m,2)$. On pose $W = \begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{matrix}$.

Supposons $k_i \geq 0$. On a donc

$$I_{v_1 \dots v_m} \bigcap R_\alpha^{-k_i} I_{w_1 \dots w_n} \neq \emptyset,$$

avec

$$I_{v_1\ldots v_m} = \bigcap_{0\leq j\leq m-1} R_\alpha^{-j} I_{v_{j+1}},\ I_{w_1\ldots w_m} = \bigcap_{0\leq j\leq m-1} R_\alpha^{-j} I_{w_{j+1}}.$$

On a en particulier, comme $m \geq k_i + 1$:

$$R_\alpha^{-k_i} I_{v_{k_i+1}} \bigcap R_\alpha^{-k_i} I_{w_1} \neq \emptyset,$$

ce qui implique

$$w_1 = v_{k_i+1},$$

et de même

$$w_2 = v_{k_i+2}, \ldots, w_{m-k_i} = v_m.$$

Le raisonnement est analogue si $k_i \leq 0$. On a alors

$$v_1 = w_{-k_i+1}, \ldots, v_{m+k_i} = w_m.$$

On a en définitive

$$v_{l+k_i} = w_l, \text{ pour } 1 \leq l, l+k_i \leq m,$$

de même

$$v_{l+k_j} = w_l, \text{ pour } 1 \leq l, l+k_j \leq m,$$

et donc

$$v_{l+k_i} = v_{l+k_j}, \text{ pour } 1 \leq l, l+k_j, l+k_i \leq m.$$

Soit $k = |k_i - k_j|$. Le facteur $v_1 \ldots v_m$ admet donc k comme période. Or le langage sturmien $\mathcal{L}_\alpha$ est uniformément récurrent. Cela implique qu'il n'existe pas de puissance arbitrairement grande d'un facteur donné, et donc qu'il n'existe pas de facteur arbitrairement long de période donnée. Par conséquent, la condition

$$v_{l+k_i} = v_{l+k_j}, \text{ pour } 1 \leq l, l+k_j, l+k_i \leq m$$

ne peut être réalisée pour m assez grand.

On a donc montré que $k_i = k_j$, pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$. Soit k cette valeur commune. La suite U satisfait alors :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2,\ (U(j,i) = l \Longleftrightarrow j\alpha + i(k\alpha) + \rho_0 \in I_l^i).$$

Deuxième étape. Nous allons prendre en compte maintenant le sens d'ouverture des intervalles des partitions (I_0^i, I_1^i).

Supposons que pour tout i, j, on ait : $I_0^i = I_0^j$. La suite admet alors le vecteur $(-k, 1)$ comme vecteur de périodicité. Comme $\rho_i = \rho_0 + i\alpha$, pour tout i, si $\rho_0 \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, on peut également supposer que pour tout i, j, on a : $I_0^i = I_0^j$.

Il reste à considérer le cas où $\rho_0 \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et où il existe un entier i tel que $I_0^i \neq I_0^{i+1}$. Montrons qu'il existe au plus un tel entier. Supposons au contraire qu'il existe $i \neq i'$ tels que $I_0^i \neq I_0^{i+1}$, $I_0^i \neq I_0^{i'}$ et $I_0^{i'} \neq I_0^{i'+1}$. Montrons qu'il existe alors m arbitrairement grand tel que $P(m, 2) > 2m+2$, ce qui nous donnera la contradiction cherchée.

On a vu que pour m assez grand ($m \geq \sup(m_0, |k| - 1)$), on a

$$\operatorname{Card}(\mathcal{L}_l'(m, 2)) = m + |k| + 1.$$

On suppose désormais $m \geq \sup(m_0, |k| - 1)$.

Il reste à minorer le nombre de facteurs $W = \begin{matrix} w_1 & \ldots & w_m \\ v_1 & \ldots & v_m \end{matrix}$ de $\mathcal{L}_i(m, 2)$ $-\mathcal{L}_i'(m, 2)$: ce sont les facteurs pour lesquels $I_{v_1 \ldots v_n}^i \bigcap R_\alpha^{-k} I_{w_1 \ldots w_n}^{i+1}$ est réduit à un point et pour lesquels il existe un indice de colonne c tel que

$$\{\rho_i + c\alpha\} = I_{v_1 \ldots v_n}^i \bigcap R_\alpha^{-k} I_{w_1 \ldots w_n}^{i+1}.$$

On note pour $0 \leq j \leq m$, $I_{-j\alpha}^+$ (respectivement $I_{-j\alpha}^-$) l'unique intervalle d'extrêmité gauche (respectivement droite) $-j\alpha$, dans la partition du cercle unité orienté par les points $-j\alpha$, $0 \leq j \leq m$, correspondant aux facteurs de $\mathcal{L}_\alpha$ de longueur m (voir le lemme 1).

Supposons sans perte de généralité que $I_0^i = [0, 1-\alpha[$. L'ensemble $I_{v_1 \ldots v_n}^i \bigcap R_\alpha^{-k} I_{w_1 \ldots w_n}^{i+1}$ est réduit à un point si et seulement s'il existe j tel que

$$I_{v_1 \ldots v_m}^i = I_{-j\alpha}^+ \text{ et } I_{w_1 \ldots w_m}^{i+1} = I_{(-j+k)\alpha}^-,$$

avec $0 \leq j \leq m$ et $0 \leq j - k \leq m$, c'est-à-dire $k \leq j \leq m$ (si $k \geq 0$) et $0 \leq j \leq k + m$ (si $k \leq 0$). On obtient donc $m - |k| + 1$ tels facteurs. Par conséquent, on a

$$\operatorname{Card}(\mathcal{L}_i(m, 2) - \mathcal{L}_i'(m, 2)) = m - |k| + 1.$$

On a de même : $\operatorname{Card}(\mathcal{L}_{i'}(m, 2) - \mathcal{L}_{i'}'(m, 2)) = m - |k| + 1$. Or on vérifie que si $I_{-j\alpha}^+ = I_{-j'\alpha}^-$ (avec $0 \leq j, j' \leq m$), alors $I_{(-j+k)\alpha}^- \neq I_{(-j'+k)\alpha}^+$; on a donc :

$$(\mathcal{L}_i(m, 2) - \mathcal{L}_i'(m, 2)) \cap (\mathcal{L}_{i'}(m, 2) - \mathcal{L}_{i'}'(m, 2)) = \emptyset.$$

Par conséquent, on a pour m assez grand

$$P(m, 2) \geq 3m - |k| + 3 > 2m + 2,$$

ce qui nous donne la contradiction cherchée.

Il existe donc un unique indice de ligne i pour lequel la partition change. Supposons sans perte de généralité que $i = 0$. Calculons alors $P(m,n)$. D'après le lemme 7, pour m assez grand, les ensembles $I_i'(W)$ sont des intervalles ; on suppose donc dans ce qui suit m assez grand pour que cette condition soit réalisée ; on a de plus

$$I_i'(W) = \bigcap_{1\leq j\leq m, 1\leq l\leq n} R_\alpha^{-j+1-k(l-1)} I_{w_{j,l}},$$

pour $W = [w_{j,l}]$ facteur de taille (m,n) apparaissant infiniment souvent à l'indice de ligne i. Il y a donc autant de facteurs dans $\mathcal{L}_i'(m,n)$ que de points de la forme $(-j-k(l-1))\alpha$, avec $0 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n$. Supposons de plus $m \geq |k| - 1$. On a donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}_i'(m,n)) = m + |k|(n-1) + 1.$$

Il reste à compter le nombre de facteurs W pour lesquels $I_i(W)$ est réduit à un point. Ceci ne se produit que si W apparaît à un indice de ligne i, avec $-(n-2) \leq i \leq 0$. Fixons un tel indice i. On a

$$I_i(W) = \Big(\bigcap_{1\leq j\leq m, 1\leq l\leq -i+1} R_\alpha^{-j+1-k(l-1)} I^l_{w_{j,l}} \Big) \bigcap \cdots$$

$$\cdots \Big(\bigcap_{1\leq j\leq m, -i+2\leq l\leq n} R_\alpha^{-j+1-k(l-1)} I^l_{w_{j,l}} \Big).$$

Soit $\mathcal{P}_i^{(1)}$ la partition par les points $(-j-k(l-1))\alpha$, avec $0 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq -i+1$ et soit $\mathcal{P}_i^{(2)}$ la partition par les points $(-j-k(l-1))\alpha$, avec $0 \leq j \leq m$, $-i+2 \leq l \leq n$; $I_i(W)$ est l'intersection d'un intervalle de la partition $\mathcal{P}_i^{(1)}$ et d'un intervalle de la partition $\mathcal{P}_i^{(2)}$. Ceci implique que $I_i(W)$ est réduit à un point si et seulement si $I_i(W)$ est égal à un point commun aux deux partitions : or il existe $m - |k| + 1$ points communs. On obtient donc $(n-1)(m-|k|+1)$ tels facteurs, en considérant les $n-1$ indices de ligne possibles, d'où

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}_i(m,n) - \mathcal{L}_i'(m,n)) = (n-1)(m-|k|+1).$$

Par conséquent, on a pour m assez grand

$$P(m,n) = m + |k|(n-1) + 1 + (n-1)(m-|k|+1) = mn + n.$$

Notons que la suite U est alors non récurrente, puisqu'un facteur W tel que $I_i(W)$ est réduit à un point n'a qu'un nombre fini d'occurrences.

On a donc montré que si, pour tout i, $\beta_i \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors la suite est soit périodique, soit a une fonction de complexité qui satisfait :

$$\exists m_1,\ \forall m \geq m_1,\ P(m,n) = mn + n.$$

Deuxième cas : $\exists i,\ \beta_i \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Soit donc i tel que $\beta_i \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

Montrons que l'on a $\mathrm{Card}(\mathcal{L}_i(m, 2)) = 2m + 2$, pour tout m. On a vu (lemme 6) que W apparaît dans la suite double U avec un indice de ligne i si et seulement si

$$I_i'(W) := \Big(\bigcap_{1\le j\le m} R_\alpha^{-j+1} I_{v_j} \Big) \bigcap \Big(\bigcap_{1\le j\le m} R_{-\beta_i} R_\alpha^{-j+1} I_{w_j} \Big)$$

est non vide. Les ensembles $I_i'(W)$ (qui sont non vides) sont de plus connexes pour m assez grand.

On peut donc évaluer le nombre de facteurs de $W \in \mathcal{L}_i(m,2) (= \mathcal{L}_i'(m, 2))$. Il y en a en effet autant que d'intervalles de la partition du cercle unité par les points $-j\alpha$, $-l\alpha - \beta$, avec $0 \le j, l \le m$, soit $2m + 2$ facteurs.

Nous allons montrer que $\beta_j = \beta_i$ modulo 1, pour tout j. Supposons au contraire qu'il existe $\beta_j \neq \beta_i$. On note $d(-\beta_i, -\beta_j)$ la distance de $-\beta_i$ à $-\beta_j$ sur le cercle unité unité orienté.

Soit δ_m la plus grande des (trois) longueurs obtenues quand on place sur le cercle unité les points $-j\alpha$, pour $0 \le j \le m$, correspondant aux $m + 1$ intervalles de longueur m du langage sturmien $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_l$ (lemme 1). Soit $\mathcal{P}_m$ la partition ainsi obtenue. On suppose m assez grand pour que $\delta_m < 1/2$ et

$$\inf\{d(-\beta_i, -\beta_j), d(-\beta_i, -\beta_j)\} > 2\delta_m.$$

Soit $v_1 \dots v_m$ le facteur de longueur m de $\mathcal{L}_\alpha$ tel que l'intervalle de la partition $\mathcal{P}_m$ associé à $I_{v_1\dots v_m}$ contienne $-\beta_i$. Comme $\beta_i \notin \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, $-\beta_i$ appartient à l'intérieur de $I_{v_1\dots v_m}$. Soit $w_1 \dots w_m$ le facteur associé à l'intervalle I_0^+ de $\mathcal{P}_m$ d'extrémité gauche 0. On a alors

$$I_{v_1\dots v_m} \bigcap R_{-\beta_i} I_{w_1\dots w_m} \neq \emptyset,$$

ce qui implique que le facteur $W = \begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{matrix}$ apparaît à un indice de ligne égal à i. On a $I_{v_1\dots v_m} \subset [-\beta_i - \delta_m, -\beta_i + \delta_m]$ et $R_{-\beta_j} I_{w_1\dots w_m} \subset [-\beta_j, -\beta_j + \delta_m]$. Or par hypothèse

$$[-\beta_j, -\beta_j + \delta_m] \cap [-\beta_i - \delta_m, -\beta_i + \delta_m] = \emptyset.$$

Par conséquent, $I_{v_1\dots v_m} \cap R_{-\beta_j} I_{w_1\dots w_m} = \emptyset$, et $W \notin \mathcal{L}_j(m, 2)$. On a donc pour m assez grand

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}_i(m, 2) \cup \mathcal{L}_j(m, 2)) > \mathrm{Card}(\mathcal{L}_i(m, 2)) = 2m + 2.$$

On obtient ainsi la contradiction souhaitée avec l'hypothèse $P(2, m) \le 2m + 2$, pour m assez grand.

Soit donc β, la valeur commune prise par les β_j, pour $j \in \mathbb{Z}$.

Supposons $(1, \alpha, \beta)$ rationnellement dépendants. Il existe alors un triplet non nul $(p, q, r) \in \mathbb{Z}$ tel que $r + p\alpha + q\beta = 0$. La suite U admet donc le vecteur $(p, -q)$ comme vecteur de périodicité.

Supposons maintenant $1, \alpha, \beta$ rationnellement indépendants. Soit $\rho = \rho_0$. On a alors $\rho_i = \rho + i\beta$, pour tout i. On a donc

$$\forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2,\ (U(j,i) = l \Longleftrightarrow j\alpha + i\beta + \rho \in I_l).$$

La complexité de la suite U satisfait alors

$$\exists m_1,\ \forall m \geq m_1,\ P(m,n) = mn + n,$$

d'après le lemme 7. En effet, soit m assez grand pour que les ensembles $I(W)$ soient des intervalles ; il y a autant d'intervalles de la forme $I(W)$, avec W facteur rectangulaire de taille (m, n) que de points $-k\alpha - l\beta$, avec $0 \leq k \leq m$, $0 \leq l \leq n-1$.

On a donc montré que la suite U est soit périodique soit de complexité $mn + n$, pour m assez grand, ce qui achève la preuve du théorème 3. □

Preuve du théorème 4. Soit U suite double de complexité $mn + n$, pour m assez grand, à valeurs dans l'alphabet $\{0, 1\}$. Cette suite est alors non périodique. En effet, en reprenant la preuve de la proposition 4 de [6], on montre plus généralement qu'une suite dont la fonction de complexité satisfait

$$\forall (m,n),\ mn \leq P(m,n) \leq mn + n$$

est non périodique. Supposons au contraire que le vecteur (a, b) soit un vecteur de périodicité, avec par exemple, $a > 0$, $b \geq 0$. Un facteur de taille (am, n) (avec $n \geq b$) situé en (i, j) détermine et est déterminé par le facteur de taille $(a, n + mb)$ situé en $(i, j - mb)$. On a donc

$$\forall n \geq b,\ P(am, n) = P(a, n + mb),$$

ce qui implique

$$amn \leq a(n + mb) + n + mb,$$

d'où la contradiction pour (m, n) assez grand.

Notons que l'on a $P(m, 1) = m+1$, pour tout m. En effet, supposons qu'il existe m_1 tel que $P(m, 1) = m + 1$, pour $m \geq m_1$. Il existe un facteur D_{m_1} du langage $\mathcal{L}_l$ de longueur m_1 admettant deux extensions distinctes dans $\mathcal{L}_l$. Tout préfixe de longueur $m \leq m_1$ de D_{m_1} admet encore deux extensions distinctes dans $\mathcal{L}_l$. Par conséquent, $P(m, 1) \geq m+1$, pour $m \leq m_1$. On a de plus, pour tout m : $P(m + 1, 1) \geq P(m, 1) + 1$; il existerait sinon un entier m tel que tout facteur de longueur supérieure ou égale à m admette une unique extension, chaque suite ligne serait périodique de période inférieure ou égale à $P(m, 1)$ et la suite double U serait elle-même périodique. Par conséquent, $P(m, 1) = m + 1$, pour tout m.

Supposons de plus la suite U uniformément récurrente. Par conséquent, la suite double U satisfait les hypothèses du théorème 3 (d'après le lemme 4) et est non périodique. Elle correspond donc soit au cas 1 de la preuve précédente ($\forall i,\ \beta_i = k\alpha$), avec existence d'un unique indice de changement de la partition, soit au cas 2 ($\forall i,\ \beta_i = \beta$, avec $1, \alpha, \beta$ rationnellement indépendants). Or nous avons vu qu'une suite correspondant au cas 1 n'est pas récurrente. En revanche, une suite correspondant au cas 2 est uniformément récurrente par minimalité de la $\mathbb{Z}^2$-action (voir également [4]). Par conséquent, la suite U correspond bien au cas 2. Supposons maintenant la suite U non uniformément récurrente et satisfaisant la condition (1) ($\exists \alpha \notin \mathbb{Q},\ \mathcal{L}_l = \mathcal{L}_\alpha$). Alors elle correspond au cas 1. □

Notons le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit U une suite double qui satisfait la condition (1), alors la suite U est périodique de période (a, b) si et seulement si la suite (ρ_n) (voir définition 5) satisfait*

$$\forall n,\ \rho_{n+b} + a\alpha \equiv \rho_n \ \textit{ modulo } 1.$$

Cette condition implique en particulier que la suite ($\beta_n = \rho_{n+1} - \rho_n$) est périodique de période b.

Preuve. Supposons qu'il existe n tel que $\rho_{n+b} + a\alpha \neq \rho_n$. Alors il existe m tel que $m\alpha + (\rho_{n+b} + a\alpha)$ et $m\alpha + \rho_n$ n'appartiennent pas au même intervalle de la partition, ce qui contredit $U(m + a, n + b) = U(m, n)$. □

4.3. **Suites de complexité $m + n$.** Le but de ce paragraphe est de montrer de manière purement combinatoire que les suites de complexité $m + n$ sont obtenues en décalant d'un cran de ligne en ligne une suite donnée de complexité $n + 1$: ce sont donc des suites périodiques de vecteur de périodicité $(1, 1)$ ou $(1, -1)$. La preuve repose sur l'étude des facteurs de petite taille. Notons que l'on travaille ici sans l'hypothèse (1) sur le langage en ligne.

Théorème 5. *Une suite double $U = (U(m, n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ a pour fonction de complexité $m + n$ si et seulement s'il existe une suite u de complexité $n + 1$ telle que l'on a*
soit

$$\forall (m, n),\ U(m, n) = u(m + n),$$

soit

$$\forall (m, n),\ U(m, n) = u(m - n).$$

Preuve. On voit aisément que la condition est suffisante. Supposons que

$$\forall (m,n),\ U(m,n) = u(m+n),$$

avec u suite de complexité $n+1$. On a alors pour tout (m,n) :

$$P(m,n) = P(m+n-1,1) = m+n.$$

Réciproquement, soit $U = (U(m,n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite de complexité $m+n$. La suite U prend donc deux valeurs. Soit $\{0,1\}$ l'alphabet sur lequel elle est définie.

Nous allons montrer que les facteurs de taille $(2,2)$ sont soit tous de la forme $\begin{matrix} zx \\ xy \end{matrix}$ (on dira alors qu'ils **coïncident sur la diagonale droite**), soit de la forme $\begin{matrix} yz \\ xy \end{matrix}$ (on dira alors qu'ils **coïncident sur la diagonale gauche**). Cette propriété peut être aisément étendue par récurrence, et implique le résultat cherché : si les facteurs de taille $(2,2)$ coïncident sur la diagonale gauche (respectivement sur la diagonale droite), alors, pour tout n, on a

$$(U(m,n))_{m\in\mathbb{Z}} = (U(m+n,0))_{m\in\mathbb{Z}}$$

(respectivement

$$(U(m,n))_{m\in\mathbb{Z}} = (U(m-n,0))_{m\in\mathbb{Z}}).$$

Soit $\mathcal{L}(m,n)$ l'ensemble des facteurs rectangulaires de U de taille (m,n). Dans toute cette preuve, nous entendrons par **extension** du facteur xy un facteur de la forme $\begin{matrix} z\ t \\ xy \end{matrix}$. On a $P(2,1) = 3$ and $P(2,2) = 4$. Il existe donc un unique facteur de taille $(2,1)$ (appelé **expansif**) ayant deux extensions.

Supposons qu'à la fois 00 et 11 soient facteurs. L'un des blocs 01 ou 10 (disons 10) n'est donc pas facteur. On a alors, pour tout n, $(U(m,n))_{m\in\mathbb{Z}}$ de la forme $\ldots 0 \ldots 0011 \ldots 1 \ldots$ ou de la forme $\ldots 000 \ldots$ Soit $k(n)$ le plus petit indice d'ocurrence de la lettre 1 dans la ligne d'indice n ($k(n)$ vaut $+\infty$ si la lettre 1 n'apparaît pas). Supposons $k(n+1) - k(n) \geq 2$ (respectivement $k(n+1) - k(n) \leq -2$), alors 11 (respectivement 00) aurait trois extensions, ce qui est impossible. Par conséquent on a
soit

$$\forall n,\ k(n+1) = k(n) + 1 \text{ (et } (U(m,n+1))_{m\in\mathbb{Z}} = (U(m-1,n))_{m\in\mathbb{Z}}),$$

soit

$$\forall n,\ k(n+1) = k(n) - 1 \text{ (et } (U(m,n+1))_{m\in\mathbb{Z}} = (U(m+1,n))_{m\in\mathbb{Z}}).$$

On applique le même raisonnement si 01 n'est pas facteur.

Supposons que l'un des deux blocs 00 ou 11, disons 11, ne soit pas facteur. D'après ce qui précède et en échangeant les rôles de m et n, l'un des blocs $\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ n'est pas facteur. Nécessairement, $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ n'est pas facteur, sinon 00 ne pourrait pas avoir d'extension.

On suppose donc dans ce qui suit que

$$\mathcal{L}(2,1) = \{00, 01, 10\},$$

$$\mathcal{L}(1,2) = \left\{ \begin{matrix}1\\0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \right\}.$$

Nous allons distinguer différents cas selon le facteur expansif et ses extensions.

- Nous allons montrer dans un premier temps que l'on ne peut pas avoir 00 comme facteur expansif avec pour extensions 10 et 01. Supposons que l'on soit dans cette situation. L'un des deux facteurs 10 et 01 admet alors 00 comme extension.
  - Supposons que seul 01 admette 00 comme extension. Le facteur 10 admet alors 01 comme extension. On a donc

    $$\mathcal{L}(1,2) = \left\{ \begin{matrix}01\\10\end{matrix}, \begin{matrix}10\\00\end{matrix}, \begin{matrix}00\\01\end{matrix}, \begin{matrix}01\\00\end{matrix} \right\}.$$

    Nécessairement, les blocs $\begin{matrix}01\\10\\00\end{matrix}$, $\begin{matrix}00\\01\\10\end{matrix}$ et $\begin{matrix}00\\01\\00\end{matrix}$ sont facteurs. Ni $\begin{matrix}01\\00\\01\end{matrix}$ ni $\begin{matrix}10\\00\\01\end{matrix}$ ne sont facteurs de la suite : on aurait sinon $P(1,3) = 5$, ce qui est en contradiction avec la valeur attendue $P(1,3) = 4$. On vérifie alors que $\begin{matrix}00\\01\end{matrix}$ n'admet pas d'extension en un facteur de taille $(2,3)$, ce qui est impossible. Le même raisonnement s'applique si l'on remplace 01 par 10.
  - Supposons qu'à la fois 01 et 10 admettent 00 comme extension. Nécessairement le bloc $\begin{matrix}00\\10\\00\end{matrix}$ est facteur. Les blocs $\begin{matrix}10\\00\\10\end{matrix}$ et $\begin{matrix}01\\00\\10\end{matrix}$ (respectivement $\begin{matrix}01\\00\\01\end{matrix}$ et $\begin{matrix}10\\00\\01\end{matrix}$) ne peuvent être simultanément facteurs, sinon $P(1,3) = 5$. Tout facteur de taille $(2,2)$ admet donc une unique extension : on a alors $P(2,2) = 4$, ce qui nous donne la contradiction souhaitée.

- Supposons que 00 est expansif d'extensions 00 et 10. Puisque l'extension de 01 est de la forme $x0$, 01 doit être l'extension de 10. Par conséquent, les facteurs de taille $(2,2)$ coïncident sur la diagonale droite. Le même raisonnement s'applique si 00 est expansif d'extensions 00 et 01.
- Supposons que 01 est expansif. Ses extensions sont alors 00 et 10.
  - Supposons que 10 admet comme extension 01. Le facteur 00 ne peut avoir 01 comme extension, sinon il n'existerait aucun bloc de la forme $\begin{smallmatrix} y0 \\ x0 \end{smallmatrix}$. Par conséquent les facteurs de taille $(2,2)$ coïncident sur la diagonale droite.
  - Supposons que 10 admet comme extension 00. On se ramène au cas où 00 est expansif d'extensions 10 et 01, en considérant la suite $(U(m,-n))_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$. Or nous avons vu que ce cas est impossible.
- Le même raisonnement s'applique si 10 est expansif, ce qui conclut la preuve.

5. Conjectures

Le théorème 4 donne une caractérisation des suites uniformément récurrentes de complexité $mn+n$. Ce résultat est un premier pas vers une preuve de la conjecture suivante : les suites doubles uniformément récurrentes de complexité $mn+m+n$ sont obtenues comme codage selon une partition en trois intervalles d'une $\mathbb{Z}^2$-action définie par deux rotations irrationnelles sur le cercle unité. Plus précisément, nous conjecturons le résultat suivant : *si U suite à valeurs dans $\{1,2,3\}$ est une suite double uniformément récurrente de complexité $mn+m+n$, alors il existe α,β,ρ, avec $1,\alpha,\beta$ rationnellement indépendants, tels que l'on ait*

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ U(m,n) = l \Longleftrightarrow m\alpha + n\beta + \rho \in I_l,$$

avec (I_1, I_2, I_3) partition du cercle unité en trois intervalles semi-ouverts de même sens d'ouverture et de longueurs $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ et $\{1-(\alpha+\beta)\}$.

Ces suites sont étudiées dans [4, 23] comme une généralisation des suites sturmiennes : elles codent sur un alphabet à trois lettres une approximation discrète d'un plan. Notons qu'il existe des suites de complexité $mn+m+n$

non uniformément récurrentes :

$$
\begin{array}{c}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\ldots 11111111111111111 \ldots\\
\ldots 11111111111111111 \ldots\\
\ldots 11111111132222222 \ldots\\
\ldots 22222222211111111 \ldots\\
\ldots 11111111111111111 \ldots\\
\ldots 11111111111111111 \ldots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Enfin nous conjecturons que la complexité $mn + n$ est la complexité minimale d'une suite uniformément récurrente non périodique : *si U est une suite double uniformément récurrente non périodique, alors il existe m_0, n_0 tels que*

$$\forall m \geq m_0,\ \forall n \geq n_0,\quad P(m,n) \geq mn + n$$

$$\textit{ou}\quad \forall m \geq m_0,\ \forall n \geq n_0,\ P(m,n) \geq mn + m.$$

Le théorème 3 traite le cas où : $\forall m,\ P(m,1) = m+1$ et $P(m,2) \leq 2m+2$, pour m assez grand. Notons que dans le cas où il existe m tel que $P(m,1) \leq m$, alors chaque suite en ligne est périodique (de période inférieure ou égale à m), et la suite double est elle-même périodique, une période étant $(m!, 1)$.

Remerciements. Nous remercions J.-P. Allouche et D. Vidal pour une relecture attentive de ce texte.

Bibliographie

[1] P. Alessandri, *Codages de rotations et basses complexités.* Université Aix-Marseille II, Thèse, 1996.

[2] P. Alessandri, V. Berthé, *Three distance theorems and combinatorics on words.* Enseig. Math. **44** (1998), 103–132.

[3] J.-P. Allouche, *Sur la complexité des suites infinies.* Bull. Belg. Math. Soc. **1** (1994), 133–143.

[4] V. berthé, L. Vuillon, *A two-dimensional generalization of Sturmian sequences: tilings and rotations.* Prétirage 97–19, IML (Marseille).

[5] J. Berstel, *Recent results in Sturmian words.* Developments in Language Theory II (Dassow, Rozenberg, Salomaa eds) World Scientific 1996, pages 13–24.

[6] J. Cassaigne, *Double sequences with complexity mn+1.* J. Auto. Lang. Comb. **4** (1999), 153–170.

[7] E. M. Coven, G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth.* Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

[8] C. Epifanio, P. Mignosi, M. Koskas, *On a conjecture on bidimensional words*, prépublication, 1999.

[9] S. Ferenczi *Complexity of sequences and dynamical systems.* Discrete Math. **206** (1999), 145–154.

[10] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words.* Chapitre 2: Sturmian words, par J. Berstel et P. Séébold.

[11] F. Mignosi, *On the number of factors of Sturmian words.* Theoret. Comput. Sci. **82** (1991), 71–84.

[12] M. Morse, G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics.* Amer. J. Math. **60** (1938), 815–866.

[13] M. Morse, G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories.* Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.

[14] D. Razafy Andriamampianina, *Nombre de facteurs d'une suite infinie.* Prépublication, 1994.

[15] J. W. Sander, R. Tijdeman, *Low complexity functions and convex sets in* $\mathbb{Z}^k$. Mathem. Zeitschrift, à paraître.

[16] J. W. Sander, R. Tijdeman, *The complexity of functions on lattices.* Theoret. Comput Sci., à paraître.

[17] J. W. Sander, R. Tijdeman, *The rectangle complexity of functions on two-dimensional lattices.* Theoret. Comput Sci., à paraître.

[18] N. B. Slater, *Gaps and steps for the sequence* $n\theta$ *mod 1.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 1115–1123.

[19] V. T. Sós, *On the distribution mod 1 of the sequence* $n\alpha$. Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **1** (1958), 127–134.

[20] J. Surányi, *Über die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1.* Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **1** (1958), 107–111.

[21] S. Świerczkowski, *On successive settings of an arc on the circumference of a circle.* Fundamenta Math. **46** (1958), 187–189.

[22] R. Tijdeman, *Communication privée.*

[23] L. Vuillon, *Combinatoire des motifs d'une suite sturmienne bidimensionnelle.* Theoret. Comput. Sci. **209** (1998), 261–285.

Valérie Berthé
Institut de mathématiques de Luminy
CNRS-UPR 9016, case 907
F-13288 Marseille Cedex, FRANCE
E-mail : `berthe@iml.univ-mrs.fr`

Laurent Vuillon
LIAFA, Université Paris 7
2, place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05, FRANCE
E-mail : `vuillon@liafa.jussieu.fr`