Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Geoffroy Derome

Corps de définition et points rationnels

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 15, n° 1 (2003), p. 45-55

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2003__15_1_45_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 45–55

Corps de définition et points rationnels

par GEOFFROY DEROME

RÉSUMÉ. Soit $\mathcal{D}$ un objet algébrique (par exemple une courbe ou un revêtement) défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et de corps des modules un corps de nombres K. Il est bien connu que $\mathcal{D}$ n'admet pas nécessairement de K-modèle. En utilisant deux résultats récents dus à P. Dèbes, J.-C. Douai et M. Emsalem nous donnerons un majorant pour le degré d'un corps de définition de $\mathcal{D}$ sur K. Dans une deuxième partie, nous donnerons des conditions suffisantes sur l'ordre de $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ pour que $\mathcal{D}$ admette un K-modèle.

ABSTRACT. Let $\mathcal{D}$ be an algebraic object (e.g. a curve or a cover) defined over $\overline{\mathbb{Q}}$ and of field of moduli an algebraic number field K. It is well known that $\mathcal{D}$ does not necessarily admit a K-model. Using two recent results due to P. Dèbes, J.-C. Douai and M. Emsalem we shall give a bound from above for the degree of a field of definition of $\mathcal{D}$ over K. In the second part, we shall give a sufficient condition on the order of $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ for $\mathcal{D}$ to have a K-model.

1. Introduction

Soient K un corps de caractéristique 0 et X une $\overline{K}$-courbe projective irréductible lisse de genre $g(X)$. On dit que K est le corps des modules de X relativement à l'extension $\overline{K}/K$ si

$$X \simeq_{\overline{K}} X^{\sigma}$$

pour tout élément σ appartenant à Gal_K le groupe de Galois absolu de K. Par définition X admet un K-modèle s'il existe X_0 une K-courbe projective lisse géométriquement irréductible telle que $X \simeq_{\overline{K}} X_0 \times_K \overline{K}$. Il est clair que si X admet un K-modèle alors X a pour corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. De plus si $g(X) = 0$ ou 1 alors la réciproque est vraie (voir [9, Ch.III, Prop.1.4] pour le cas $g(X) = 1$).

En revanche, dès que $g(X) \geq 2$ la situation n'est plus aussi simple. Considérons par exemple le cas particulier où $K = \mathbb{R}$ et choisissons pour X, comme dans [8] (voir en particulier la fin du paragraphe 3 et le théorème 3),

Manuscrit reçu le 19 novembre 2001.

une $\mathbb{C}$-courbe projective irréductible lisse hyperelliptique de genre $g(X) = m-1$ avec m impair dont un modèle affine est donné par l'équation

$$y^2 = a_0x^m + \sum_{r=1}^{m} \left(a_r x^{m+r} + (-1)^r a_r^c x^{m-r}\right)$$

où c désigne la conjugaison complexe et où $a_m = 1$ et $a_0 \in \mathbb{R}$. On vérifie ([8, page 177]) que $X \simeq_{\mathbb{C}} X^c$ (ce qui signifie que K est le corps des modules de X relativement à l'extension $\overline{K}/K$). Si $\mathrm{Aut}(X) = \{\mathrm{Id}, i\}$ où i désigne l'involution hyperelliptique i.e. $i(x,y) = (x,-y)$ alors $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(X, X^\tau) = \{\mu, \mu i\}$ où μ est défini sur le modèle affine par $\mu(x,y) = (-x^{-1}, \sqrt{-1}x^{-m}y)$, et par suite $\chi_\tau^\tau \chi_\tau = i$ pour tout $\chi_\tau \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(X, X^\tau)$, ce qui signifie que la condition des cocycles de Weil (voir [10]) ne peut jamais être satisfaite, et prouve que X n'admet pas de $\mathbb{R}$-modèle (on utilise ici uniquement le sens trivial du résultat de [10]). De plus P. Dèbes et M. Emsalem (voir [5, paragraphe 5] pour les détails) ont montré que l'on pouvait choisir pour les coefficients a_i des nombres algébriques tels que $\mathrm{Aut}(X) = \{\mathrm{Id}, i\}$. Cela fournit un exemple de $\overline{\mathbb{Q}}$-courbe qui n'admet pas de modèle sur son corps des modules.

Le but de cet article est double. D'une part nous recherchons des conditions suffisantes portant sur $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(X))$ pour que X admette un modèle sur son corps des modules et d'autre part nous donnerons un majorant pour le degré d'un corps de définition sur son corps des modules.

Il est également possible de s'intéresser à d'autres catégories d'objets algébriques. Par exemple les revêtements algébriques. Nous donnerons des résultats analogues pour des (G-)revêtements algébriques de courbes sans frais supplémentaires.

Enfin l'auteur souhaite remercier P. Dèbes pour ses remarques et commentaires.

2. Position du problème et rappels

Soient B_K une K-courbe algébrique projective lisse géométriquement irréductible, X une $\overline{K}$-courbe projective irréductible lisse, et $f : X \to B$ un $\overline{K}$-revêtement algébrique de K-base B_K, où on a noté $B = B_K \times_K \overline{K}$ (voir [4, paragraphe 2, page 307] pour la définition précise d'un revêtement). On dit que f est de corps de modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$ si et seulement si $f^\sigma \simeq_{\overline{K}} f$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_K$. On s'intéresse à l'existence d'un K-modèle ou d'un L-modèle avec L/K extension algébrique. Le groupe $\mathrm{Aut}(f)$ des $\overline{K}$-automorphismes du revêtement f est fini. Notons Y la $\overline{K}$-courbe quotient $X/\mathrm{Aut}(f)$.

Le théorème qui va suivre (dû à P. Dèbes et à M. Emsalem) est la clef de voûte de cet article (voir [5, théorème 3.3]).

Théorème 2.1. *Les notations et les hypothèses étant celles du préambule, il existe un K-modèle $h_K : Y_K \to B_K$ du $\overline{K}$-revêtement $h : X/\mathrm{Aut}(f) \to B$ de K-base B_K possédant les propriétés suivantes. Le corps des modules (relativement à l'extension $\overline{K}/K$) du $\overline{K}$-revêtement $g : X \to X/\mathrm{Aut}(f)$ de K-base Y_K est égal à K. De plus une extension algébrique E/K est un corps de définition pour g si et seulement si elle est un corps de définition pour f.*

Remarque. Walter L. Baily JR., un pionnier du domaine, établit dans son article [1] un certain nombre de résultats précurseurs. En particulier, il avait remarqué que le $\overline{K}$-revêtement h possède un K-modèle. P. Dèbes et M. Emsalem montrent en plus qu'il existe un K-modèle remarquable de h (que l'on appelle K-modèle canonique) et qui vérifie la seconde partie du théorème.

De la même manière, au lieu de partir d'un revêtement algébrique, on peut partir d'une courbe algébrique projective irréductible lisse X de genre supérieur ou égal à 2 et se poser le même type de question. Le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ des $\overline{K}$-automorphismes de X est fini. Notons Y la $\overline{K}$-courbe quotient $X/\mathrm{Aut}(X)$, alors on dispose d'un résultat analogue à celui du théorème 2.1 (voir [5, théorème 3.1]).

Théorème 2.2. *Il existe un K-modèle Y_K de Y dit K-modèle canonique tel que le corps des modules (relativement à l'extension $\overline{K}/K$) du $\overline{K}$-revêtement $X \to Y$ de K-base Y_K soit K. De plus une extension algébrique E/K est un corps de définition pour la courbe X si et seulement si elle est corps de définition pour le revêtement $g : X \to Y$ de K-base Y_K.*

Nous sommes donc ramenés au problème suivant: étant donné $g : X \to Y$ un $\overline{K}$-revêtement *galoisien* de K-base Y_K et de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$, à quelles conditions g admet-il un K-modèle ? Une condition suffisante (qui n'est pas en général nécessaire) est fournie par le théorème de Coombes-Harbater revisité par P. Dèbes et J.-C. Douai à savoir, il suffit que Y_K possède au moins un point K-rationnel (voir [4, corollaire 3.4, page 320]).

Dans cet article, nous allons contrôler, en fonction de f ou de X, le degré d'une extension L/K pour laquelle $Y_K(L)$ soit non vide et d'autre part rechercher des conditions suffisantes portant sur f ou X pour que $Y_K(K)$ soit non vide.

3. Borne pour le degré d'un corps de définition sur le corps des modules

Théorème 3.1. *Soit $f : X \to B$ un $\overline{K}$-revêtement de K-base B_K et de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. Supposons que le genre $g(X)$ de X soit supérieur ou égal à 2. Alors il existe une extension*

L/K de degré inférieur ou égal à $2g(X)-2$ tel que le revêtement f admette un L-modèle.

Remarques. 1. Si K est un corps local (extension finie de $\mathbb{Q}_p$) ou un corps fini, alors on sait qu'il existe qu'un nombre fini d'extension de K incluse dans $\overline{K}$ et de degré majoré par une constante préalablement fixée. Par suite, il est possible de choisir l'extension L/K du théorème précédent indépendamment de f.

2. Le théorème 3.1 fournit un majorant *explicite* du degré d'un corps de définition sur K. Dans un article, dû à P. Dèbes et à l'auteur (voir [3]), on montre, dans le cas particulier où K est un corps de nombres, qu'il est également possible de contrôler à fois la ramification et le degré (mais cette fois ci par une constante non explicite) d'un corps de définition sur K.

Avant de donner la preuve du théorème 3.1, énonçons le lemme évident suivant qui nous sera fort utile et dont la preuve est immédiate.

Lemme 3.2. *Soit Y_K une K-courbe algébrique. Supposons qu'il existe un diviseur effectif non trivial D de Y_K défini sur K et de degré inférieur ou égal à d. Alors pour tout $P \in \mathrm{Supp}(D) \subset Y_K(\overline{K})$, on a $[K(P):K] \leq d$.*

Preuve du théorème 3.1. Soit Y_K le K-modèle canonique de $Y = X/\mathrm{Aut}(f)$. Il est facile de vérifier grâce à la formule de Riemann-Hurwitz que $g(Y) \leq g(X)$. D'après le théorème 2.1, il suffit de contrôler le degré d'une extension L/K telle que $Y_K(L)$ soit non vide. Distinguons deux cas:

1) $g(Y) = 0$ ou $g(Y) \geq 2$.

Soit K_{Y_K} un diviseur canonique de Y_K défini sur K. Si $g(Y) = 0$ alors le diviseur $D = -K_{Y_K}$ est effectif de degré 2 et défini sur K. Si maintenant $g(Y) \geq 2$, alors comme $\dim_K H^0(Y_K, \Omega_{Y_K}) = g(Y)$, on sait qu'il existe D un diviseur effectif linéairement équivalent à K_{Y_K} et défini sur K. En particulier $\deg(D) = 2g(Y) - 2 \leq 2g(X) - 2$. Dans tous les cas, le lemme 3.2 permet de conclure.

2) $g(Y) = 1$.

La formule de Riemann-Hurwitz appliquée au $\overline{K}$-revêtement $g : X \to Y$ fournit

$$\deg R_X = 2g(X) - 2$$

où R_X est le diviseur de ramification du revêtement g sur X, i.e.:

$$R_X = \sum_{P \in X} (e_P(g) - 1)[P].$$

Soit D le diviseur de branchement du $\overline{K}$-revêtement g i.e. le diviseur réduit dont le support coïncide avec celui de $g_*(R_X)$ ou, si l'on préfère $D = \sum_{Q \in Y_K(\overline{K})} \epsilon_Q[Q]$ où $\epsilon_Q = 1$ (resp. $\epsilon_Q = 0$) s'il existe $P \in X$ tel que $g(P) = Q$ avec $e_P(g) > 1$ (resp. sinon). Il est alors clair que D est un diviseur effectif non trivial de Y_K défini sur K (puisque g a pour corps des modules K). De plus $\deg(D) \leq \deg(R_X) = 2g(X) - 2$. Le lemme 3.2 permet une nouvelle fois de conclure. □

En utilisant un argument un peu différent, on peut donner une autre borne valable même si le genre de X n'est pas supérieur où égal à 2. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soit $f : X \to B$ un $\overline{K}$-revêtement de K-base B_K et de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. Alors, si $B_K(K)$ est non vide, le $\overline{K}$-revêtement f admet un L-modèle, où L est une extension de K incluse dans $\overline{K}$ vérifiant:*

$$[L : K] \leq \frac{\deg(f)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(f))}.$$

Remarque. Ce résultat peut se voir comme une généralisation du théorème de Coombes-Harbater puisque par définition, le revêtement f est galoisien si et seulement si $\deg(f) = \mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(f))$.

Preuve de la proposition 3.3. Soit $h_K : Y_K \to B_K$ le K-modèle canonique du $\overline{K}$-revêtement quotient $h : X/\mathrm{Aut}(f) \to B$.

Par hypothèse, $B_K(K)$ est non vide. Soit $P \in B_K(K)$. Le groupe de Galois Gal_K opère sur la fibre $h_K^{-1}(P)$ qui comporte au plus $\deg(h)$ éléments. Si $Q \in h_K^{-1}(P) \subset Y_K(\overline{K})$, on déduit que $[K(Q) : K] \leq \deg(h)$. Comme $\deg(h) = \frac{\deg(f)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(f))}$, on obtient bien le résultat souhaité. □

Dans le cas particulier où le genre de la $\overline{K}$-courbe $Y = X/\mathrm{Aut}(f)$ est nul, on dispose de la proposition suivante:

Proposition 3.4. *Soit $f : X \to B$ un $\overline{K}$-revêtement de K-base B_K et de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. Supposons que l'entier $\frac{\deg(f)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(f))}$ soit impair et que $g(X/\mathrm{Aut}(f)) = 0$. Alors, s'il existe un point $P \in B_K(K)$ non ramifié de f, le $\overline{K}$-revêtement f admet un K-modèle.*

Preuve de la proposition 3.4. Par hypothèse Y_K est K-isomorphe à une K-conique de $\mathbb{P}^2$. Par suite, il existe $Q \in Y_K(\overline{K})$ tel que $[K(Q) : K] = 2$. Notons $D_1 = [Q] + [Q^\sigma]$ où σ est l'unique élément non trivial de $\mathrm{Gal}(K(Q)/K)$. Il est alors clair que D_1 est un diviseur K-rationnel de Y_K effectif.

D'autre part la fibre $h_K^{-1}(P)$ est le support d'un diviseur effectif K-rationnel D_2 de Y_K de degré $\frac{\deg(f)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(f))}$. D'après le théorème de Bézout, il existe m_1 et m_2 deux entiers relatifs tel que $D = m_1 D_1 + m_2 D_2$ soit un diviseur (K-rationnel) de Y_K de degré 1.

Comme $\deg(D) \geq 2g(Y_K) - 1$, on sait d'après le théorème de Riemann-Roch que $l(D) = \deg(D) - g(Y_K) + 1 = 2$. Par suite, il existe un diviseur effectif K-rationnel de Y_K de degré 1. Le support d'un tel diviseur est donc réduit à un point K-rationnel de Y_K. $\square$

Remarques. 1. Supposons que l'on sache que $P \in B_K(\overline{K})$ soit un point totalement ramifié de f, alors f admet un modèle sur $K(P)$, même si $B_K(K)$ est vide. En effet, le point P est également un point totalement ramifié pour le revêtement h_K. Par suite, il n'existe qu'un seul point $Q \in Y_K(\overline{K})$ dans la fibre du revêtement h_K au dessus du point P. D'où $K(Q) = K(P)$ et le $\overline{K}$-revêtement f admet un $K(P)$-modèle.

2. Dans le cas particulier où $B_K = \mathbb{P}^1_K$ on peut faire la remarque suivante. Soit $f : X \to \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ un $\overline{K}$-revêtement de K-base $\mathbb{P}^1_K$ et de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. Notons D le diviseur de branchement de f. Si $\deg(f) = 2\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(f))$, alors il existe $P \in \mathrm{Supp}(D)$ tel que le $\overline{K}$-revêtement f soit défini sur $K(P)$. Ainsi le $\overline{K}$-revêtement f admet un modèle sur une extension de K de degré inférieur ou égal au degré du diviseur D.

En effet, on sait d'une part qu'il n'existe pas de revêtement étale de $\mathbb{P}^1_K$ et que d'autre part h_K est de degré 2. Par suite, si P appartient au support du diviseur de branchement de h_K, la fibre de h_K au dessus de P est constituée d'un unique point Q, et on a $K(P) = K(Q)$.

4. Conditions suffisantes trivialisant l'obstruction

Les idées développées dans ce paragraphe sont essentiellement celles habituellement utilisées pour montrer qu'une $\overline{K}$-courbe projective irréductible lisse X de genre $g(X) \geq 2$ possède un groupe d'automorphisme de cardinal inférieur ou égal à la borne d'Hurwitz à savoir $84(g(X) - 1)$. Le lecteur est prié de se référer à [6, page 128] pour les détails.

Soit $g : X \to Y$ un $\overline{K}$-revêtement de degré $\deg(g)$. La formule de Riemann-Hurwitz appliquée à g fournit

$$2g(X) - 2 = \deg(g)(2g(Y) - 2) + \sum_{P \in X} (e_P(g) - 1),$$

où $e_P(g)$ désigne l'indice de ramification du revêtement g au point $P \in X$. Supposons que le revêtement g soit galoisien. On a alors $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(g)) = \deg(g)$ et

$$e_P(g) = \mathrm{Card}(G_P),$$

où G_P est le stabilisateur du point $P \in X$ sous l'action de $\mathrm{Aut}(g)$, i.e.

$$G_P = \{\phi \in \mathrm{Aut}(g); \phi(P) = P\}.$$

Comme le revêtement g est galoisien, la classe de conjugaison du groupe G_P dans $\mathrm{Aut}(g)$ ne dépend que de $g(P) \in Y$. Par suite, pour tout $Q \in Y$, on pose $e_Q(g) = e_P(g)$, où $P \in X$ est tel que $g(P) = Q$. La formule de Riemann-Hurwitz se réécrit de la façon suivante

$$2g(X) - 2 = \mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(g))\Big(2g(Y) - 2 + \sum_{Q \in Y}\Big(1 - \frac{1}{e_Q(g)}\Big)\Big).$$

[Bien entendu $e_Q(g) = 1$ pour tout $Q \in Y$, sauf éventuellement pour un nombre fini de point $Q \in Y$.]

Théorème 4.1. *Soit $f : X \to B$ un $\overline{K}$-revêtement de K-base B_K et de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. Supposons que le genre $g(X)$ de X soit supérieur ou égal à 2. Alors, si* $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(f)) > 8(g(X) - 1)$, *le $\overline{K}$-revêtement f admet un K-modèle.*

Preuve du théorème 4.1. Désignons par g et h_K les revêtements construits à partir de f comme dans le théorème 2.1.

On sait que $\mathrm{Aut}(f) \simeq \mathrm{Aut}(g)$. Par suite on dispose de l'inégalité $0 < t < \frac{1}{4}$ où

$$t = (2g(Y_K) - 2) + \sum_{Q \in Y_K(\overline{K})}\Big(1 - \frac{1}{e_Q(g)}\Big),$$

en appliquant la formule de Riemann-Hurwitz au revêtement galoisien g. Tout d'abord il est clair que $g(Y_K) = 0$ (en effet, si $g(Y_K) \geq 1$, alors ou bien $t = 0$, ou bien $t \geq \frac{1}{2}$). D'autre part, puisque $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{e_Q(g)} \leq 1$ pour tout $Q \in Y_K(\overline{K})$ tel que $e_Q(g) \geq 2$, on a $\mathrm{Card}(E) = 3$ ou 4, où $E = \{Q \in Y_K(\overline{K}); e_Q(g) \geq 2\}$. Ensuite, on vérifie qu'il existe $Q \in Y_K(\overline{K})$ tel que $e_Q(g)$ soit différent de $e_{Q'}(g)$ pour tout $Q' \in Y_K(\overline{K})$ différent de Q. En effet, supposons dans un premier temps que $\mathrm{Card}(E) = 4$ et que $E = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ avec $e_{Q_1}(g) = e_{Q_2}(g) = x$ et $e_{Q_3}(g) = e_{Q_4}(g) = y$. On dispose alors de l'inégalité $\frac{7}{8} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 1$ qui n'admet pas de solutions en nombres entiers $x, y \geq 2$. Le cas où $\mathrm{Card}(E) = 3$, $E = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ et $e_{Q_1}(g) = e_{Q_2}(g) = e_{Q_3}(g) = x$ est lui aussi à exclure à l'aide d'un argument similaire. Il ne reste plus qu'à remarquer que nécessairement $Q \in Y_K(K)$ puisque pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}_K$ on a d'une part $\sigma(Q) \in E$ et d'autre part $e_{\sigma(Q)}(g) = e_Q(g)$. □

On dispose également du corollaire suivant:

Corollaire 4.2. *Soit X une $\overline{K}$-courbe algébrique projective irréductible lisse de genre $g(X)$ supérieur ou égal à 2 et de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. Alors, si* $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(X)) > 8(g(X) - 1)$, *la $\overline{K}$-courbe X admet un K-modèle.*

Faisons maintenant le lien entre la notion "admettre beaucoup d'automorphismes" telle qu'elle est rappelée dans [11] et posséder un groupe d'automorphisme "grand". On commence tout d'abord par rappeler la première notion.

Définition 4.3. On dit qu'une $\mathbb{C}$-courbe projective irréductible lisse X de genre $g = g(X) \geq 2$ possède *beaucoup d'automorphismes* si le point $x(X) \in \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ correspondant à X dans l'espace de module $\mathcal{M}_g$ possède (au sens de la topologie complexe) un voisinage $U \subset \mathcal{M}_g$ vérifiant la propriété suivante: pour tout $y \in U \setminus \{x(X)\}$ le groupe d'automorphisme de la $\mathbb{C}$-courbe projective irréductible lisse associée à y est d'ordre strictement inférieur à $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(X))$.

On rappelle également la définition suivante:

Définition 4.4. Soient X une $\mathbb{C}$-courbe projective irréductible lisse et $\beta : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ un $\mathbb{C}$-revêtement. On dit alors que β est une *fonction de Belyi* si le support de son diviseur de branchement est de cardinal inférieur ou égal à 3. Un résultat remarquable, dû à G. Belyi (voir [2]), affirme que X admet une fonction de Belyi si et seulement si X admet un $\overline{\mathbb{Q}}$-modèle.

Remarque. Quitte à composer β avec une homographie de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, on peut même supposer que le support du diviseur de branchement d'une fonction de Belyi est incluse dans $\{0, 1, \infty\}$.

J. Wolfart (voir [11, théorème 6, page 107]) démontre le résultat suivant:

Théorème 4.5. *Une $\mathbb{C}$-courbe projective irréductible lisse X de genre $g(X) \geq 2$ possède beaucoup d'automorphismes si et seulement si il existe une fonction de Belyi β définissant un $\mathbb{C}$-revêtement galoisien*

$$\beta : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

Il était déjà connu (voir [11, remarque 4, page 108]) qu'une $\mathbb{C}$-courbe projective irréductible lisse X de genre $g(X) \geq 2$ qui admet beaucoup d'automorphismes possède un modèle sur son corps des modules (qui est un corps de nombres). D'autre part, il n'existe qu'un nombre fini de classes de $\mathbb{C}$-isomorphisme de $\mathbb{C}$-courbes projectives irréductibles lisses de genre $g \geq 2$ possédant beaucoup d'automorphismes. On peut donc se demander si le cardinal de l'ensemble des classes de $\mathbb{C}$-isomorphismes de $\mathbb{C}$-courbes projectives irréductibles lisses X de genre $g \geq 2$, vérifiant $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(X) > 8(g-1)$ est fini ou non. Déjà, lorsque $g = 3$, un élément de réponse est donné par le faisceau de quartique de $\mathbb{P}^2$ engendré par la quartique de Fermat (d'équation $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$) et la courbe de Klein (d'équation $S(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$). Plus précisément (voir [7, paragraphe 4]), si on note

$$KFT = \{C_t = F + tS; t \in \mathbb{P}^1\},$$

alors, pour une infinité de $t \in \overline{\mathbb{Q}}$, la $\overline{\mathbb{Q}}$-courbe C_t est projective irréductible lisse, et il existe un morphisme de groupe injectif

$$i_t : S_4 \hookrightarrow \mathrm{Aut}(C_t).$$

Inversement, on dispose du résultat suivant.

Théorème 4.6. *Soit X une $\mathbb{C}$-courbe projective irréductible lisse de genre $g(X) \geq 2$. Si $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(X)) > 12(g(X)-1)$, alors X admet beaucoup d'automorphismes.*

Esquisse de la preuve du théorème 4.6. On sait déjà que $g(X/\mathrm{Aut}(X)) = 0$ et que $0 < t < \frac{1}{6}$ où

$$t = -2 + \sum_{Q \in Y_K(\overline{K})} \left(1 - \frac{1}{e_Q(g)}\right).$$

Posons $E = \{Q \in Y_K(\overline{K}); e_Q(g) \geq 2\}$. D'après ce qui précède on sait également que nécessairement $\mathrm{Card}(E)$ vaut 3 ou 4. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathrm{Card}(E) = 4$. Il est clair que le cas où $e_Q(g) = 2$ pour tout $Q \in E$ est à exclure: il fournit en effet $t = 0$. Ainsi, il existe au moins un point $Q \in E$ tel que $e_Q(g) \geq 3$, d'où

$$t \geq -2 + 2\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

ce qui est absurde. Ainsi $\mathrm{Card}(E) = 3$ et le $\mathbb{C}$-revêtement galoisien $X \to X/\mathrm{Aut}(X)$ définit une fonction de Belyi. □

5. Cas des G-revêtements

On peut facilement adapter le théorème 2.1 i.e. le théorème 3.3 figurant dans [5] au cas des G-revêtements de la manière suivante. Soit donc $f : X \to B$ un $\overline{K}$-G-revêtement de K-base B_K. On sait que le groupe des automorphismes de f en tant que G-revêtement est isomorphe à $Z(G)$, le centre du groupe G. Supposons que f soit de corps des modules K relativement à l'extension $\overline{K}/K$. Alors il existe un K-modèle $h_K : Y_K \to B_K$ du $\overline{K}$-revêtement $h : X/Z(G) \to B$ de K-base B_K possédant les propriétés suivantes. Le corps de modules du $\overline{K}$-$Z(G)$-revêtement $g : X \to X/Z(G)$ de K-base Y_K est égal à K. De plus une extension algébrique E/K est un corps de définition du $\overline{K}$-$Z(G)$-revêtement $X \to X/Z(G)$ de K-base Y_K si et seulement s'il est corps de définition du $\overline{K}$-G-revêtement $X \to B$ de K-base B_K.

Grâce à [4, corollaire 3.4], on déduit que les enoncés établis précédemment pour les revêtements purs se reécrivent *mutatis-mutandis* de la façon suivante:

Théorème 5.1. *Supposons que $g(X) \geq 2$. Alors, le $\overline{K}$-G-revêtement f admet un modèle sur une extension L de K vérifiant*

$$[L : K] \leq 2g(X) - 2.$$

Théorème 5.2. *Supposons que le genre $g(X)$ de X soit supérieur ou égal à 2. Alors si $\mathrm{Card}(Z(G)) > 8(g(X) - 1)$, le $\overline{K}$-G-revêtement f admet un K-modèle.*

Preuve du théorème 5.2. En effet, on sait dans ce cas que la K-courbe Y_K admet un point K-rationnel. □

On suppose maintenant jusqu'à la fin de cet article que $B_K = \mathbb{P}^1_K$. Si le groupe G est abélien, on sait (voir [4, corollaire 3.4]) que le $\overline{K}$-G-revêtement f admet un K-modèle. Supposons donc que le groupe G ne soit pas abélien et désignons par p le plus petit nombre premier intervenant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier $\mathrm{Card}\left(\frac{G}{Z(G)}\right)$.

On dispose du résultat suivant:

Proposition 5.3. *Notons D le diviseur de branchement de f. Le $\overline{K}$-G-revêtement f est défini sur une extension L de K vérifiant*

$$[L : K] \leq \frac{1}{p}\mathrm{Card}\left(\frac{G}{Z(G)}\right)\mathrm{Card}(\mathrm{Supp}(D)).$$

Preuve de la proposition 5.3. Tout d'abord il convient de noter que le $\overline{K}$-revêtement $h : Y \to \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ est galoisien de groupe de Galois $\frac{G}{Z(G)}$. Comme d'autre part, il n'existe pas de revêtements étales de $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$, on déduit que $\mathrm{Supp}(D(h_K))$ le support du diviseur de branchement de h_K est non vide. Soit donc $P \in \mathrm{Supp}(D(h_K))$ et $Q \in h_K^{-1}(P)$. On a d'une part $[K(P)(Q) : K(P)] \leq \frac{\mathrm{Card}(G)}{p\mathrm{Card}(Z(G))}$ et d'autre part $[K(P) : K] \leq \mathrm{Card}(\mathrm{Supp}(D(h_K))) \leq \mathrm{Card}(\mathrm{Supp}(D))$. D'où la proposition. □

Remarque. Le résultat de cette proposition n'a d'intérêt que dans le cas où $p > \mathrm{Card}(\mathrm{Supp}(D))$ puisque P. Dèbes et J.-C. Douai (voir [4, corollaire 3.5]) ont démontré que l'on dispose de la borne

$$[L : K] \leq \mathrm{Card}\left(\frac{G}{Z(G)}\right).$$

Bibliographie

[1] W. L. BAILY JR., *On the theory of theta functions, the moduli of abelian varieties, and the moduli of curves.* Ann. of Math. **75** (1962), 342–381.

[2] G. BELYI, *On the Galois extensions of the maximal cyclotomic field.* Math. USSR Izv. **14** (1980), 247–256.

[3] P. DÈBES, G. DEROME, *Finiteness results in descent theory.* J. London Math. Soc., à paraître.

[4] P. Dèbes, J.-C. Douai, *Algebraic covers, field of moduli versus field of definition.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **30** (1997), 303–338.
[5] P. Dèbes, M. Emsalem, *On fields of moduli of curves.* J. Algebra **211** (1999), 42–56.
[6] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann.* Progress in Mathematics, 77. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989.
[7] R. E. Rodriguez, V. Gonzalez-Aguilera, *Fermat's quartic curve and the tetrahedron.* Extremal Riemann surfaces (San Francisco, CA, 1995), 43–62, Contemp. Math., 201, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
[8] G. Shimura, *On the field of rationality for an abelian variety.* Nagoya Math. J. **45** (1971), 167–178.
[9] J. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves.* Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer-Verlag, New York, 1986.
[10] A. Weil, *The field of definition of a variety.* Amer. J. Math. **78** (1956), 509–524.
[11] J. Wolfart, *The "obvious" part of Belyi's theorem and Riemann surfaces with many automorphisms.* Geometric Galois actions, 1, 97–112, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

Geoffroy Derome
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq
France
E-mail : `derome@gat.univ-lille1.fr`