JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

SOPHIE DION

Un théorème de transcendance en caractéristique finie

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 15, nº 1 (2003), p. 57-82

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2003__15_1_57_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 57–82

Un théorème de transcendance en caractéristique finie

par Sophie DION

RÉSUMÉ. Soit p un nombre premier et $q = p^r$, où $r \in \mathbb{N}$ est non nul. On considère le corps $k = \mathbb{F}_q(T)$, dont on note $\overline{k}$ une clôture algébrique. On peut associer à tout module de Drinfeld de rang 2, défini sur $\overline{k}$, un invariant modulaire j, ainsi que des fonctions modulaires. On s'intéresse à l'une d'entre elles, notée $\overline{\Delta}$. On montre en particulier, que si $|t| < q^{-\frac{1}{q-1}}$ alors l'un au moins des deux nombres $j(t)$ et $\overline{\Delta}(t)$ est transcendant sur k.

ABSTRACT. Let p be a prime number, and $q = p^r$, with $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Let $k = \mathbb{F}_q(T)$, and $\overline{k}$ be its algebraic closure. We can associate to any Drinfeld module of rank 2, a modular invariant j, and also modular functions. We are interesting in one of them, denoted $\overline{\Delta}$. In particular, we show that if $|t| < q^{-\frac{1}{q-1}}$ then at least one of the two numbers $j(t)$ and $\overline{\Delta}(t)$ is transcendental over k.

1. Objectifs et notations

1.1. Présentation du problème

Dans les cas complexes et p−adiques, les Stéphanois [BS] ont obtenu un résultat de transcendance concernant l'invariant modulaire J attaché aux courbes elliptiques, et ont ainsi répondu à la conjecture de Mahler-Manin.

Proposition 1 ([BS]). *Si $q \in \mathbb{C}$ (resp. $q \in \mathbb{C}_p$) est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et vérifie $0 < |q| < 1$ (resp. $0 < |q|_p < 1$), alors $J(q)$ est transcendant.*

On se donne p un nombre premier et $q = p^r$, où $r \in \mathbb{N}$ est non nul. On désigne par $A = \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$, par $k = \mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions et par $k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ son complété pour la valuation $1/T$-adique $v = -\deg$. Cette valuation se prolonge de manière unique à k_∞ et à une clôture algébrique $\overline{k}_\infty$. On note enfin $\mathcal{C}$ le complété de $\overline{k}_\infty$, sur lequel se prolonge encore la valuation précédente, et $\overline{k}$ la clôture algébrique de k dans $\mathcal{C}$.

Manuscrit reçu le 29 octobre 2001.

Dans ce contexte, les courbes elliptiques ont un analogue : les modules de Drinfeld de rang 2, auxquels on associe également un invariant modulaire j. C'est dans ce cadre que M. Ably, L. Denis et F. Recher ont montré l'analogue suivant de la proposition 1 (voir [ADR]).

Proposition 2 ([ADR]). *Soit $t \in \mathcal{C}$ tel que $0 < |t| < q^{-1/(q-1)}$, alors l'un au moins des deux nombres t et $j(t)$ est transcendant sur k.*

Pour chaque q dans $\mathbb{C}$, tel que $0 < |q| < 1$, Y. Nesterenko ([N1] ou [N2]) a obtenu l'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$, de trois au moins des nombres $q, E(q), E_4(q), E_6(q)$, où E_4 et E_6 sont les séries d'Eisenstein de poids 4 et 6, et où E est la fausse série d'Eisenstein de poids 2. Un corollaire remarquable est l'indépendance algébrique des deux nombres π et e^{π}. Dans le cadre de la caractéristique finie, on peut espérer le résultat similaire suivant.

Conjecture 1. *Soit $t \in \mathcal{C}$ tel que $0 < |t| < q^{-1/(q-1)}$, alors trois au moins des quatre nombres $t, E(t), \overline{g}(t)$ et $\overline{\Delta}(t)$ sont algébriquement indépendants sur k,*

où E est l'analogue de la fausse série d'Eisenstein, et $\overline{g}$ et $\overline{\Delta}$ sont des formes modulaires définies par E.U. Gekeler dans [Ge5], et dont on redonnera les définitions dans la suite. Ici, on obtient la réponse partielle suivante.

Théorème. *Soit $t \in \mathcal{C}$ tel que $0 < |t| < q^{-1/(q-1)}$, alors l'un au moins des deux nombres $\overline{\Delta}(t)$ et $j(t)$ est transcendant sur k.*

Le lemme de zéros de Y. Nesterenko ne s'adapte pas ici. Les formes modulaires classiques vérifient certaines équations différentielles ; Y. Nesterenko les utilise pour créer un opérateur de dérivation par lequel il cherche les idéaux stables de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Ici, il existe aussi des équations différentielles vérifiées par les formes modulaires (voir [Ge5]), qui fournissent un opérateur sur $\mathcal{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Cependant, il semble inespéré d'obtenir des informations suffisamment restrictives sur les idéaux stables par cet opérateur, ceci à cause de la caractéristique p. Une alternative serait éventuellement de construire un opérateur sur $\mathcal{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, en utilisant par exemple les dérivées divisées, ou encore l'action de l'application $z \longmapsto az$ sur les formes modulaires. La difficulté est alors non seulement de trouver un opérateur D cohérent - c'est-à-dire tel que pour tout polynôme P de $\mathcal{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, $D\Big(P(t, E(t), \overline{g}(t), \overline{\Delta}(t))\Big)$ soit encore un polynôme $\mathcal{D}P$ calculé en les fonctions $t, E(t), \overline{g}(t), \overline{\Delta}(t)$ - mais aussi d'obtenir suffisamment d'informations concernant les idéaux stables par cet opérateur. Une autre approche serait de ne pas faire appel au lemme de zéros et, comme le fait P. Philippon (voir [P]), d'utiliser une mesure d'indépendance algébrique. Cependant la méthode employée utilisant cette mesure ne s'adapte pas ici;

en effet, le polynôme construit à l'aide des équations différentielles vérifiées par les séries d'Eisenstein, peut dans ce cas être identiquement nul.

On commence par donner quelques définitions, et par faire le lien entre ce résultat et les travaux d'Alain Thiery [T]. Soit L un sous-corps de $\mathcal{C}$. Par module de Drinfeld de rang d défini sur L, on entend la donnée d'un homomorphisme injectif d'anneaux Υ vérifiant

$$\Upsilon: \begin{array}{ccl} A & \longrightarrow & L\{\mathcal{F}\} \\ T & \longmapsto & \Upsilon_T = T\mathcal{F}^0 + a_1\mathcal{F}^1 + \cdots + a_d\mathcal{F}^d \end{array} \tag{1}$$

où $\mathcal{F}$ désigne l'endomorphisme Frobenius relatif à q sur le groupe additif $\mathbb{G}_a$, $L\{\mathcal{F}\}$ l'algèbre de Ore sur L, et où les a_i sont dans L avec $a_d \neq 0$. Pour un tel objet, on sait qu'il existe une unique fonction e_Υ, dite exponentielle associée à Υ, vérifiant

$$\begin{cases} e'_\Upsilon(0) = 1, \\ \forall a \in A,\ \forall z \in \mathcal{C}, \quad e_\Upsilon(az) = \Upsilon_a(e_\Upsilon(z)). \end{cases} \tag{2}$$

Le noyau de cette exponentielle est un A-module libre de rang d, c'est le réseau des périodes noté Λ. Réciproquement, pour un $A-$module libre Λ de rang d donné, il existe un unique module de Drinfeld de rang d, dont le réseau des périodes est exactement Λ. On a de plus le développement suivant donné par la dérivée logarithmique de e_Υ.

$$e_\Upsilon(z)^{-1} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{z+\lambda}. \tag{3}$$

On appelle isogénie entre deux modules de Drinfeld Υ et Υ', tout homomorphisme algébrique f non nul de $\mathbb{G}_a$ vérifiant

$$\forall a \in A, \quad \Upsilon(a) \circ f = f \circ \Upsilon'(a).$$

Si f est inversible, c'est-à-dire si c'est une homothétie, on dira que Υ et Υ' sont isomorphes. Par exemple, les modules de Drinfeld de rang 1 sont tous isomorphes au module de Carlitz défini par l'égalité

$$C_T = T\mathcal{F}^0 + \mathcal{F}. \tag{4}$$

Sa fonction exponentielle associée est donnée par

$$e(z) = \sum_{h\geq 0} \frac{z^{q^h}}{D_h}$$

où les D_h sont définis ainsi :

$$D_0 = 1,\ D_i = [i][i-1]^q \dots [1]^{q^{i-1}} \text{ où } [i] = T^{q^i} - T \text{ pour } i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}. \tag{5}$$

On rappelle qu'il existe un élément $\pi \in k_\infty$ transcendant, tel que si l'on note $\widetilde{\pi} = (T-T^q)^{1/(q-1)}\pi$, alors $\ker(e) = \widetilde{\pi}A$. Pour tout z de $\mathcal{C} \smallsetminus k_\infty$, on note

$$t = t(z) = \frac{1}{e(\widetilde{\pi} z)}. \tag{6}$$

On peut maintenant énoncer brièvement les résultats de A. Thiery.

1.2. Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes

Pour faciliter la lecture de ce paragraphe, on rappelle le célèbre théorème de G. V. Chudnovsky (voir [Ch]).

Proposition 3 ([Ch]). *Soit $\wp$ la fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques et ζ la fonction de Weierstrass associée à $\wp$. On se donne une période λ de $\wp$ et w un point de $\wp$ qui ne soit pas un pôle, tels que λ et w soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors, les deux nombres*

$$\frac{2\zeta(\lambda/2)}{\lambda} \quad et \quad \zeta(w) - \frac{2\zeta(\lambda/2)}{\lambda} w$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Une conséquence directe est que le nombre w/π est transcendant sur $\mathbb{Q}$. On verra, dans une dernière partie, l'analogue de ce résultat pour les modules de Drinfeld.

On considère ici un module de Drinfeld Υ de rang 2, défini sur une extension finie L de k. On note Λ_Υ son réseau des périodes. Une bidérivation associée à Υ, est une application $\mathbb{F}_q$-linéaire $\eta : A \longrightarrow L\{\mathcal{F}\} \circ \mathcal{F}$ qui vérifie les égalités

$$\forall a, b \in A, \quad \eta_{ab} = a\eta_b + \eta_a \circ \Upsilon_b.$$

D'après [Ge6], il existe une unique fonction entière $F_\eta \in L\{\{\mathcal{F}\}\} \circ \mathcal{F}$ telle que l'on ait

$$\forall a \in A, \forall z \in \mathcal{C}, \quad F_\eta(az) - aF_\eta(z) = \eta_a \circ e_\Upsilon(z).$$

Avec ces notations, en prenant $L = k$, le résultat obtenu par A. Thiery [T] est le suivant.

Proposition 4 ([T]). *Soient λ et w des éléments non nuls de Λ_Υ pour lesquels $F_\eta(w) - \dfrac{F_\eta(\lambda)}{\lambda} w$ est non nul. Alors les deux nombres*

$$F_\eta(w) - \frac{F_\eta(\lambda)}{\lambda} w \quad et \quad \frac{F_\eta(\lambda)}{\lambda}$$

sont algébriquement indépendants sur k.

On rappelle encore que, si Υ est de la forme $\Upsilon_T(X) = TX + gX^q - X^{q^2}$, alors on a la relation de Legendre suivante démontrée par G. W. Anderson (voir [Ge7])

$$\Big(F_\eta(w_1)w_2 - F_\eta(w_2)w_1\Big)^{q-1} = \widetilde{\pi}^{q-1},$$

où (w_1, w_2) désigne une base du réseau Λ_Υ, et où $\eta : T \longmapsto \eta_T = \mathcal{F}$. Ainsi, on a

$$\left(\frac{\widetilde{\pi}}{w_2}\right)^{q-1} = \left(F_\eta(w_1) - \frac{F_\eta(w_2)}{w_2}w_1\right)^{q-1} \notin \overline{k}.$$

On fixe maintenant $t \in C$, tel que $|t| < q^{-\frac{1}{q-1}}$. Soit $z \in C \setminus k_\infty$ tel que $t = t(z)$. On considère le module de Drinfeld $\Upsilon^{(z)}$ de réseau des périodes $A \oplus zA$:

$$\Upsilon^{(z)}_T(X) = TX + g(z)X^q + \Delta(z)X^{q^2}.$$

On note $j(z) = g(z)^{q+1}/\Delta(z)$ son invariant modulaire, et on suppose que $j(z)^{1/(q+1)}$ est dans k. Soit $\mu \in C$ pour lequel on a $\mu^{q^2-1} = -\dfrac{1}{\Delta(z)}$, alors le module de Drinfeld Υ associé au réseau $\dfrac{1}{\mu}A \oplus \dfrac{z}{\mu}A$ vérifie

$$\Upsilon_T(X) = TX + \mu^{q-1}g(z)X^q - X^{q^2}.$$

Puisque $\big(\mu^{q-1}g(z)\big)^{q+1} = -j(z)$, alors Υ est défini sur k, et donc la période $\dfrac{\widetilde{\pi}}{\mu}$ n'est pas algébrique sur k, ainsi on a

$$\frac{\Delta(z)}{\widetilde{\pi}^{q^2-1}} = \overline{\Delta}(t) \notin \overline{k}.$$

Finalement, le résultat de A. Thiery a la conséquence suivante.

$$\text{Si } j(t)^{1/(q+1)} \in k, \text{ alors } \overline{\Delta}(t) \notin \overline{k}.$$

Cependant, il semble que l'on puisse reprendre sa démonstration en substituant à l'extension L de k, le corps L' engendré sur L par les coefficients du module de Drinfeld Υ et de la bidérivation η. On obtiendrait alors le même résultat pour les modules de Drinfeld définis sur $\overline{k}$. Cela entrainerait clairement le théorème prouvé ici. La démonstration est malgré tout différente; ici on a recours aux corps de fonctions modulaires, tandis que A. Thiery fait essentiellement appel aux fonctions exponentielles et à leurs équations fonctionnelles.

On commence par donner quelques définitions et remarques sur les formes modulaires, puis sur les fonctions modulaires de niveau supérieur. Pour une étude plus approfondie, le lecteur pourra se référer à [Ge1] ou à [Ge3]. Le but du paragraphe 2 est essentiellement de placer les deux fonctions $z \mapsto j(az)$ et $z \mapsto \overline{\Delta}(az)$ dans une même extension finie de $k(j, \overline{\Delta})$, dont on maîtrise le degré sur $k(j, \overline{\Delta})$ quand a parcourt A. Au paragraphe suivant, on construit un nouveau polynôme modulaire $\overline{\Phi}_a(X, Y)$ dont on majore la hauteur. Pour cela, on suit en partie la démarche de L. C. Hsia qui donne dans [H] une estimation exacte de la hauteur du polynôme modulaire classique. La hauteur des nombres $j(az)$ est obtenue à l'aide de hauteurs différentielles dans [ADR], mais la méthode utilisée ne donne aucun résultat pour les nombres $\overline{\Delta}(az)$. C'est donc ce polynôme modulaire $\overline{\Phi}_a(X,Y)$ qui fournira la majoration de la hauteur des nombres $\overline{\Delta}(az)$. Enfin, la dernière partie est consacrée à la preuve du théorème annoncé. On y applique un lemme de Liouville aux nombres $j(az)$ et $\overline{\Delta}(az)$ pour des éléments a de A, convenablement choisis.

2. Fonctions modulaires

On définit le demi-plan supérieur Ω par

$$\Omega \;=\; \mathcal{C} \setminus k_\infty. \tag{7}$$

Pour $z \in \mathcal{C}$, on note $|z|_i = \inf\limits_{x\in k_\infty} |z-x|$ sa partie imaginaire et $|z|_A = \inf\limits_{a\in A} |z-a|$. Alors, un élément de $\mathcal{C}$ est dans Ω, si et seulement si sa partie imaginaire est non nulle. Soit $c > 0$, on définit l'ensemble suivant

$$\Omega_c \;=\; \{z \in \Omega,\ |z|_i > c\}. \tag{8}$$

Dans la suite, on considère des modules de Drinfeld de rang 2 définis sur $\overline{k}$:

$$\Upsilon_T = T\mathcal{F}^0 + g\mathcal{F} + \Delta\mathcal{F}^2. \tag{9}$$

On remarque que la quantité $j(\Upsilon) = g^{q+1}/\Delta$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de Υ. On l'appelle invariant modulaire de Υ.

Le groupe $GL_2(k_\infty)$ agit sur le demi-plan supérieur Ω par:

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k_\infty), \quad \forall z \in \Omega, \quad \gamma z = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{10}$$

On associe à Υ son réseau des périodes $\Lambda = Aw_1 \oplus Aw_2$, que l'on normalise en $A \oplus Az$. Alors deux éléments z et z' définissent des modules de Drinfeld isomorphes si et seulement si ils sont conjugués par l'action de $\Gamma = GL_2(A)$. On obtient ainsi une bijection entre $\mathcal{C}$ et le quotient $GL_2(A)\backslash\Omega$ fournie par l'invariant modulaire j.

2.1. Formes modulaires

Soit l un entier et $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$ une fonction holomorphe vérifiant

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(A), \quad f(\gamma z) = (cz+d)^l f(z). \tag{11}$$

En particulier, on a

$$\forall z \in \Omega, \quad \forall a \in A, \quad f(z+a) = f(z).$$

Ainsi, f peut être considérée comme une fonction définie sur ${}_A\backslash^{\Omega}$. Or, d'après E. U. Gekeler (voir [Ge5]), pour tout $c > 1$, $\quad z \longmapsto t(z)$ définit un isomorphisme de ${}_A\backslash^{\Omega_c}$ sur une boule épointée

$$B_r \setminus \{0\} = \{z \in C \setminus \{0\}, \ |z| < r\}.$$

Par conséquent, il existe une fonction f^* telle que l'on ait

$$\forall z \in \Omega_1, \quad f^*(t(z)) = f(z).$$

On dira que f est une *forme modulaire de poids l* si f^* admet un développement en série entière autour de 0.

Exemple. A chaque $z \in \Omega$, on associe le module de Drinfeld $\Upsilon^{(z)}$ associé au réseau $A \oplus Az$, et donc des nombres $g(z)$ et $\Delta(z)$. On définit ainsi des formes modulaires de poids respectifs $q-1$ et q^2-1, qui sont donc aussi des fonctions en la variable t.

Dans la suite, on omettra les astérisques, ainsi g et Δ désigneront aussi bien des fonctions en z que des fonctions en la variable t. On notera encore $\overline{\Delta} = \widetilde{\pi}^{1-q^2}\Delta$ et $\overline{g} = \widetilde{\pi}^{1-q}g$, de sorte que les fonctions $\overline{g}$ et $\overline{\Delta}$ ont des développements en t à coefficients dans A. En effet, comme E. U. Gekeler dans [Ge5], on note B_0 l'ensemble des séries

$$f = \sum_{j \geq 0} m_j s^j \quad \text{où } s = t^{q-1}, \ m_j \in A \ \text{ et } \ \deg m_j \leq j.$$

Il est clair que B_0 est stable pour l'addition, la multiplication et que si $f = 1 + \cdots$ est dans B_0, alors il en est de même pour $1/f$. Il est vu dans [Ge5] que la fonction $\overline{\Delta}/s = \widetilde{\pi}^{1-q^2}\Delta/s$ appartient à B_0. On détermine facilement le premier terme du développement de $\overline{\Delta} = -s + \cdots$ et on en déduit que $s/\overline{\Delta}$ est un élément de B_0. De plus, la fonction $\overline{g} = \widetilde{\pi}^{1-q}g = 1 + \cdots$ est elle aussi dans B_0 et donc $s.j \in B_0$. Ainsi, on a les deux développements suivants

$$\overline{\Delta} = \sum_{i \geq 1} \delta_i s^i = \sum_{i \geq 1} \delta_i t^{i(q-1)} \quad \text{avec } \deg \delta_i \leq i-1, \tag{12}$$

$$j = \sum_{i \geq -1} \gamma_i s^i = \sum_{i \geq -1} \gamma_i t^{i(q-1)} \quad \text{avec } \deg \gamma_i \leq i+1. \tag{13}$$

Enfin, comme dans toute démonstration de transcendance, on doit s'assurer de l'indépendance algébrique de ces fonctions. On la montre facilement en utilisant leurs propriétés modulaires. On peut donc énoncer le lemme suivant.

Lemme 1. *Les fonctions Δ et j sont algébriquement indépendantes sur C.*

2.2. Fonctions modulaires de niveau a

Pour a dans $A \setminus \{0\}$, on introduit maintenant une famille de fonctions, dites *fonctions modulaires de niveau a*, contenant les formes modulaires que l'on vient de définir. Il s'agit de fonctions qui sont modulaires pour un certain sous-groupe Γ_a de Γ. Dans le cas classique, elles sont par exemples étudiées dans [L] (Chapitre 6). Dans notre cadre, E. U. Gekeler les introduit dans [Ge1] ou dans [Ge3] (Chapitre VII). On note

$$t_a = t(az) = \frac{1}{C_a(1/t)}. \tag{14}$$

Soit $a \in A$ unitaire et Γ_a le sous-groupe de $\Gamma = GL_2(A)$ suivant

$$\Gamma_a = \left\{\gamma \in \Gamma, \quad \gamma \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bmod a\right\}. \tag{15}$$

Ce groupe est appelé sous-groupe de congruence de niveau a de Γ.
Soit $f : \Omega \longrightarrow C$ une fonction méromorphe et stable par Γ_a. En particulier, pour tout élément z de C, elle vérifie $f(z+a) = f(z)$. Puisque pour tout $c > 1$, $\quad z \longmapsto t(z)$ définit un isomorphisme de ${}_{A}\backslash^{\Omega_c}$ sur une boule épointée $B_r \setminus \{0\}$, alors pour tout $c > 1$, l'application

$$z \longmapsto t_{1/a} = t_{1/a}(z) = \frac{1}{e(\widetilde{\pi} z/a)} \tag{16}$$

définit un isomorphisme du quotient ${}_{a.A}\backslash^{\Omega_c}$ sur $B_r \setminus \{0\}$. Comme précédemment, on peut trouver une fonction f^* telle que $f^*(t_{1/a}) = f(z)$. Si f^* possède un développement en série de Laurent en 0, et s'il en est de même pour les $(f \circ \gamma)^*$ où γ parcourt Γ, on dira que f est une fonction modulaire de niveau a sur Ω.

On donne quelques exemples intervenant ultérieurement. Le suivant est classique, sa preuve se déroule très naturellement à l'image de celle donnée dans [L] dans le cadre de la caractéristique nulle.

Lemme 2. *Soit $\alpha \in M_2(A)$ de déterminant a. Alors, $j \circ \alpha$ est une fonction modulaire de niveau a.*

Soit $a \in A$. Comme dans le cas classique, le groupe $\Gamma = GL_2(A)$ agit par multiplication à droite, et par multiplication à gauche sur l'ensemble

$$\Delta_a^* = \left\{\alpha = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \in M_2(A),\ (a_0, b_0, c_0, d_0) = 1, \right. \\ \left. \exists \mu \in \mathbb{F}_q^*,\ \det(\alpha) = \mu a\right\}. \tag{17}$$

On a le système de représentants pour l'action à gauche suivant, que l'on note $\Delta_a^*(\Gamma)$,

$$(18)\quad \Delta_a^*(\Gamma) = \left\{ \alpha = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{bmatrix} \in \Delta_a^*, \right.$$

$$\left. a_0 \text{ unitaire}, \ a_0 d_0 = a, \ \deg b_0 < \deg d_0 \right\}.$$

On notera $\psi(a)$ son cardinal. S. Bae, en appendice de [Ba], démontre l'égalité suivante

$$(19)\qquad \psi(a) = |a| \prod_{b|a} \left(1 + \frac{1}{|b|}\right),$$

où le produit est pris sur tous les $b \in A$ irréductibles, unitaires et divisant a. On a alors la majoration suivante (voir lemme 7 de [ADR])

$$(20)\qquad \exists C > 0, \qquad \psi(a) \leq C|a| \log\log|a| + C,$$

où C est une constante ne dépendant que de q.

On définit maintenant la fonction h_α pour $\alpha = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{bmatrix} \in \Delta_a^*(\Gamma)$ par

$$(21)\qquad h_\alpha(z) = a_0^{q^2-1} \frac{\Delta \circ \alpha(z)}{\Delta(z)}.$$

Avec ces notations, on a le lemme suivant.

Lemme 3. *Soit $\alpha \in \Delta_a^*(\Gamma)$. Alors, h_α est une fonction modulaire de niveau a.*

Preuve. Soit $\beta = I + a.M \in \Gamma_a$ et $\beta' = \alpha\beta\alpha^{-1}$. On écrit

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} l & m \\ n & p \end{bmatrix} \qquad \beta' = \begin{bmatrix} l' & m' \\ n' & p' \end{bmatrix}.$$

De l'égalité $\alpha\gamma = \gamma'\alpha$, on tire les relations $nd_0 = n'a_0$ et $d_0 p = n'b_0 + p'd_0$. Comme Δ est une forme modulaire de poids $(q^2 - 1)$, on obtient sans difficulté l'égalité $h_\alpha \circ \beta = h_\alpha$. Les autres propriétés concernant les développements en $t_{1/a}$ de h_α et des fonctions $h_\alpha \circ \gamma$ pour γ dans Γ, découlent facilement du développement en t de la fonction Δ. On a donc bien que h_α est une fonction modulaire pour Γ_a. □

On définit maintenant une famille de fonctions modulaires de niveau a, qui sont les analogues des fonctions de Weber classiques . On a vu précédemment, qu'à chaque z de Ω, on peut associer un module de Drinfeld $\Upsilon^{(z)}$ de rang 2 ; on note e_z son exponentielle. On considère alors les fonctions f_u définies sur Ω, par

$$\forall z \in \Omega, \quad f_u(z) = g(z) e_z^{q-1}(u). \tag{22}$$

Pour r et s dans A non divisibles par a, on note $u(z,r,s) = \dfrac{rz+s}{a}$, et on définit les fonctions suivantes.

$$\forall z \in \Omega, \quad f_{(r,s)}(z) = g(z) e_z^{q-1}(u(z,r,s)). \tag{23}$$

On a alors les propriétés élémentaires suivantes (c.f. [Ge3] chapitre VII).

Lemme 4 ([Ge3]).
1- $\forall \gamma \in \Gamma, \quad f_{(r,s)\gamma}(z) = f_{(r,s)}(\gamma z)$,
2- Les fonctions $f_{(r,s)}$ *sont modulaires de niveau* a,
3- $f_{(r,s)} = f_{(r',s')} \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{F}_q^*, \quad (r,s) \equiv c(r',s')$ *mod* a.

2.3. Corps de fonctions modulaires de niveau a

L'objectif de ce paragraphe est de placer les deux fonctions

$$\overline{\Delta} \circ a : z \longmapsto \overline{\Delta}(az) = \overline{\Delta}(t_a) \quad \text{et} \quad j \circ a : z \longmapsto j(az) = j(t_a)$$

dans une extension finie de $k(\overline{\Delta}, j)$ dont on maîtrise le degré en fonction de a. On sait déjà que la fonction $j \circ a$ est racine du polynôme modulaire classique (voir par exemple [Ba]) défini par

$$\prod_{\alpha \in \Delta_a^*(\Gamma)} (X - j \circ \alpha) \in k(j)[X]. \tag{24}$$

Ainsi, la fonction $j \circ a$ est algébrique de degré inférieur à $\psi(a)$ sur $k(j)$. On pose

$$\alpha_a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Delta_a^*(\Gamma). \tag{25}$$

Dans la suite, on montre que la fonction $h_{\alpha_a} = a^{q^2-1} \dfrac{\overline{\Delta} \circ a}{\overline{\Delta}}$ est un élément de $k(j, j \circ a)$. Pour cela, on utilise les résultats de E. U. Gekeler sur les corps de fonctions modulaires.

On note $F_a(\mathcal{C})$ le corps des fonctions modulaires de niveau a définies sur $\mathcal{C}$. On sait classiquement que $F_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(j)$. Le groupe $\Gamma = GL_2(A)$ agit sur $F_a(\mathcal{C})$ par composition $f \longrightarrow f \circ \gamma$. Ainsi, d'après le lemme 4, il agit sur les fonctions de Weber par $f_{(r,s)} \longrightarrow f_{(r,s)\gamma}$. On définit

$$Z = \mathbb{F}_q^*.I = \left\{ \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{F}_q^* \right\}. \tag{26}$$

Puisque Γ_a et Z agissent trivialement sur $F_a(\mathcal{C})$, on peut définir une action du groupe fini $\Gamma / Z.\Gamma_a$ sur $F_a(\mathcal{C})$. Plus précisemment, E. U. Gekeler montre comme dans le cas classique la proposition suivante (proposition 3.4.1 de [Ge1]).

Proposition 5 [Ge1]. *Le corps $F_a(\mathcal{C})$ est le corps engendré sur $\mathcal{C}$ par les fonctions j et $f_{(r,s)}$ où $r, s \in A \setminus a.A$. De plus, l'extension*

$$F_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(j) \hookrightarrow F_a(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(j, f_{(r,s)})_{r,s}$$

est galoisienne et son groupe de Galois est

$$\Gamma/_{Z.\Gamma_a} \quad \simeq \quad \{\gamma \in GL_2(A/a.A), \det(\gamma) \in \mathbb{F}_q^*\}/_Z.$$

On considère le groupe de congruence suivant

$$\Gamma_0(a) = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \in \Gamma, \quad c_0 \equiv 0 \bmod a \right\}. \tag{27}$$

D'après les travaux de E. U. Gekeler (voir [Ge2]), le corps des fonctions modulaires pour $\Gamma_0(a)$ et définies sur $\mathcal{C}$ est le sous-corps $\mathcal{C}(j, j \circ a)$ de $F_a(\mathcal{C})$. Avec ces résultats, on peut démontrer la proposition suivante, qui répond à la question posée en début de paragraphe.

Proposition 6. *Le corps de fonctions $\mathcal{L}_a = k(\overline{\Delta}, j, j \circ a)$ est une extension finie de $k(\overline{\Delta}, j)$ de degré inférieur à $\psi(a)$, et l'on a $j \circ a \in \mathcal{L}_a$.*

Preuve. Tout d'abord, il est facile de voir que la fonction h_{α_a} est modulaire pour le groupe $\Gamma_0(a)$. Par suite, elle se trouve dans le corps $\mathcal{C}(j, j \circ a)$. Ainsi, il existe des polynômes $P(X, Y)$ et $Q(X, Y)$ de $\mathcal{C}[X, Y]$, pour lesquels on a

$$h_{\alpha_a} \; = \; \frac{P(j, j \circ a)}{Q(j, j \circ a)}.$$

Ensuite, puisque l'on a l'égalité (14), la fonction $h_{\alpha_a} = a^{q^2-1}\dfrac{\overline{\Delta} \circ a}{\overline{\Delta}}$ a un développement de Laurent en t à coefficients dans k. Or, il en est de même pour les fonctions j et $j \circ a$. Par conséquent, l'égalité

$$h_{\alpha_a}(t) \times Q(j(t), j \circ a(t)) \; - \; P(j(t), j \circ a(t)) \; = \; 0$$

est équivalente à un système linéaire (de rang fini) à coefficients dans k et dont les inconnues sont les coefficients des polynômes $P(X, Y)$ et $Q(X, Y)$. On sait que ce système a une solution non nulle à coordonnées dans $\mathcal{C}$, nécessairement il a en au moins une non nulle à coordonnées dans k. Par suite, on peut choisir les deux polynômes $P(X, Y)$ et $Q(X, Y)$ dans $k[X, Y]$. Ainsi, la fonction h_{α_a} est bien un élément du corps $k(j, j \circ a)$, ce qui achève la preuve de la proposition. □

3. Étude d'un polynôme modulaire

Soit $k \hookrightarrow E$ une extension finie de degré $\mathcal{D}$. On rappelle la notion de hauteur projective d'un élément $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$ de $\mathbb{P}^m(E)$:

$$h(\beta) = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{\omega \in M_E} d_\omega \max_{0 \leq i \leq m} (-\omega(\beta_i)),$$

où M_E désigne l'ensemble de toutes les places de E et d_ω le degré résiduel sur $\mathbb{F}_q$ en la place ω normalisée par $\omega(E) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Si $f(X_1, \ldots, X_l) = \sum a_\lambda X^\lambda \in \overline{k}[X_1, \ldots, X_l]$, alors on appelle hauteur du polynôme f

$$H(f) = h(1, a_\lambda).$$

On définit encore la mesure de Mahler de $P(X) = a_0 \prod_{j=1}^{D} (X - \xi_j) \in \mathcal{C}[X]$ par

$$m(P) = \deg a_0 + \sum_{j=1}^{D} \max\{0, \deg \xi_j\}.$$

La hauteur d'un polynôme à coefficients dans A est aussi sa mesure de Mahler et le maximum des degrés de ses coefficients. Ainsi, si

$$P(X) = a_0 X^D + \cdots + a_{D-1} X + a_D = a_0 \prod_{j=1}^{D} (X - \xi_j) \in A[X],$$

alors on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} H(P) &= m(P), \\ &= \deg a_0 + \sum_{j=1}^{D} \max\{0, \deg \xi_j\}, \\ &= \max_{i=0,\ldots,D} \deg a_i. \end{aligned}$$

Dans cette partie, on construit un polynôme $\overline{\Phi}_a(X, Y)$ pour tout a de A, dont on majore la hauteur. L'intérêt de ce polynôme est qu'il est annulé par le couple

$$\left(a^{q^2-1} \frac{\overline{\Delta} \circ a}{\overline{\Delta}}, \, j \right).$$

Ceci permettra dans le paragraphe 4, d'obtenir une majoration de la hauteur du nombre $\overline{\Delta}(t_a)$ supposé algébrique sur le corps k.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\psi(a)}$ les éléments de l'ensemble $\Delta_a^*(\Gamma)$ défini en (18). On considère le polynôme suivant

$$\Phi_a(X) = \prod_{i=1}^{\psi(a)} (X - h_{\alpha_i}), \tag{28}$$

où les fonctions h_{α_i} sont définies en (21). On va montrer que c'est un polynôme modulaire, c'est-à-dire que ses coefficients sont des polynômes en la fonction j. Dans la suite les U_i désigneront les coefficients de ce polynôme :

$$\Phi_a(X) = \sum_{i=0}^{\psi(a)} U_i X^i. \tag{29}$$

3.1. Développement en $t_{1/a}$ de U_i

Dans ce paragraphe, on démontre la proposition suivante.

Proposition 7. *Il existe des éléments $u_{i,j}$ de $A\,[e(\widetilde{\pi}/a)]$, tels que l'on ait*

$$U_i = \sum_{j \geq -(q-1)|a|\psi(a)} u_{i,j} t_{1/a}^j.$$

Preuve. Les fonctions h_α n'ont pas nécessairement de développement en t mais elles en ont un en $t_{1/a}$. On étudie ces développements. On a vu d'une part, que la fonction $\frac{s}{\Delta}$ appartient à B_0. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} t(z) &= t(az/a) = \frac{1}{C_a(1/t_{1/a}(z))}, \\ &= \sum_{j \geq |a|} u_j t_{1/a}(z)^j \qquad \text{où les } u_j \text{ sont dans } A. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{s}{\Delta}$ a un développement en série entière en $t_{1/a}$ à coefficients dans A. Soit $\alpha = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{bmatrix}$ un élément de $\Delta_a^*(\Gamma)$, alors on a le développement qui suit.

$$t(\alpha(z)) = \Big(e\Big(\frac{a_0\widetilde{\pi}z + \widetilde{\pi}b_0}{d_0}\Big)\Big)^{-1} = t\Big(\frac{a_0 z}{d_0}\Big)\Big(1 + e\Big(\frac{\widetilde{\pi}b_0}{d_0}\Big)t\Big(\frac{a_0 z}{d_0}\Big)\Big)^{-1},$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n e\Big(\frac{\widetilde{\pi}b_0}{d_0}\Big)^n t\Big(\frac{a_0 z}{d_0}\Big)^{n+1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n e\Big(\frac{\widetilde{\pi}b_0}{d_0}\Big)^n \Big(\frac{1}{C_{a_0^2}(1/t_{1/a})}\Big)^{n+1},$$

$$= \sum_{j \geq |a_0|^2} P_{j,a_0}\Big(e\Big(\frac{\widetilde{\pi}b_0}{d_0}\Big)\Big) t_{1/a}^j,$$

où $P_{j,a_0} \in A[X]$. Ainsi, il est clair que $\overline{\Delta}(\alpha(z))$ a un développement en série entière en $t_{1/a}$, à coefficients dans $A\,[e(\widetilde{\pi}/a)]$. Enfin, on aura besoin du développement suivant.

$$1/s(z) = e(\widetilde{\pi} az/a)^{q-1} = C_a(1/t_{1/a})^{q-1} = \left(\sum_{i=0}^{\deg a} l_i(a)/t_{1/a}^{q^i}\right)^{q-1}$$
$$= \sum_{j=q-1}^{(q-1)|a|} r_j(a)/t_{1/a}^j \qquad \text{où les } r_j(a) \text{ sont dans } A.$$

Finalement, vu sa définition (21), la fonction h_α a un développement en série de Laurent du type

$$h_\alpha = \sum_{i \geq -(q-1)|a|} Q_i(\alpha) t_{1/a}^i \qquad \text{où les } Q_i(\alpha) \text{ sont dans } A\left[e(\widetilde{\pi}/a)\right].$$

Comme card$\Delta_a^*(\Gamma) = \psi(a)$, la proposition 7 en découle facilement. □

3.2. Propriétés modulaires du polynôme Φ_a

Dans ce paragraphe, on démontre que les coefficients U_i de $\Phi_a(X)$ (voir (29)) sont des polynômes en j dont on majore le degré. Plus précisément, on obtient la proposition suivante.

Proposition 8. *Soit $a \in A$ unitaire, alors il existe $\overline{\Phi}_a(X,Y) \in A[X,Y]$ de degré en Y inférieur à $\psi(a)$ tel que l'on ait*

$$\overline{\Phi}_a(X,j) = \prod_{i=1}^{\psi(a)} (X - h_{\alpha_i}).$$

Preuve. Avant de commencer la preuve, on donne quelques remarques concernant l'action de Γ sur les fonctions h_{α_i}. Le théorème 1.1 de S. Bae [Ba], dit que $GL_2(A)$ agit transitivement à droite sur les classes à gauches, ainsi on a

$\forall \alpha \in \Delta_a^*(\Gamma), \forall \gamma \in GL_2(A), \exists \alpha' \in \Delta_a^*(\Gamma), \exists \gamma' \in GL_2(A)$ tels que $\alpha\gamma = \gamma'\alpha'$.

Une conséquence directe, en est le lemme suivant.

Lemme 5. *Le groupe Γ permute transitivement les fonctions h_{α_i}.*

On poursuit la preuve de la proposition 8. D'une part, puisque les coefficients de Φ_a sont des fonctions symétriques en les h_{α_i}, il en résulte qu'ils sont stables par l'action de $GL_2(A)$. D'autre part, d'après la proposition 7, les coefficients U_i de Φ_a ont un développement de Laurent en $t_{1/a}$; comme ils sont modulaires, ces développements sont en fait en la variable t. Enfin, d'après ce qui précède, pour tout μ dans $\mathbb{F}_q^*$, les U_i sont stables par

$z \longmapsto \mu z$, donc aussi par $t \longmapsto \mu t$. Ainsi, les U_i ont un développement en série de Laurent en la variable $s = t^{q-1}$. En outre, ils sont de la forme :

$$U_i = \sum_{j \geq -\psi(a)} v_{i,j} s^j,$$

où les $v_{i,j}$ sont a priori dans $A\left[e\left(\widetilde{\pi}/a\right)\right]$. D'après [Ca], $\mathrm{Aut}(k\left(e\left(\widetilde{\pi}/a\right),k\right))$ est composé d'automorphismes σ_r définis par $\sigma_r\left(e\left(\widetilde{\pi}/a\right)\right) = e\left(r\widetilde{\pi}/a\right)$, où $r \in A$ est premier avec a. Or, les fonctions h_{α_i} sont permutées par ces automorphismes, donc les coefficients de $\Phi_a(X)$ sont stables par l'action de $\mathrm{Aut}(k\left(e\left(\widetilde{\pi}/a\right),k\right))$. Ainsi, ils sont dans $A((s))$. De plus, puisque les seules fonctions modulaires qui sont holomorphes sur Ω et à l'infini sont les constantes, comme dans [L] (chapitre 5) on a le lemme suivant.

Lemme 6. *Soit f une fonction modulaire qui est holomorphe sur Ω. On suppose que f a un développement de la forme*

$$f = \sum_{i \geq -M} c_j s^j \qquad c_{-M} \neq 0, \quad M \geq 0,$$

alors f est un polynôme en j de degré M et dont les coefficients sont dans le $A-$module engendré par les c_i.

On en conclut que chaque U_i est un polynôme en j de degré inférieur ou égal à $\psi(a)$, et à coefficients dans A, d'où la proposition annoncée. □

3.3. Majoration de la hauteur du polynôme modulaire

Dans ce paragraphe, on donne une majoration de la hauteur du polynôme $\overline{\Phi}_a(X,Y)$. L. C. Hsia dans [H] obtient une estimation exacte de celle du polynôme modulaire classique. Ici, on suit un parcours similaire, et on obtient une majoration du même ordre. On notera pour $z \in \Omega$ tel que $|z|_i > 1$:

(30) $$y = j(z) \quad \text{et} \quad \overline{\Phi}_{a,y}(X) = \overline{\Phi}_a(X,y).$$

On commence par majorer la hauteur des polynômes $\overline{\Phi}_{a,y}(X)$ pour certains y. On aura besoin, pour cela, d'exprimer $\deg \overline{\Delta}(z)$ en fonction de $|z|_i$.

Proposition 9. *Soit $z \in \Omega$ tel que $|z|_i = q^{n-\varepsilon} > 1$, où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \varepsilon < 1$, alors on a l'égalité*

$$\deg \overline{\Delta}(z) = -C_\varepsilon |z|_i,$$

où $C_\varepsilon = q^\varepsilon(q(1-\varepsilon)+\varepsilon)$.

Preuve. On rappelle tout d'abord le lemme suivant démontré par M. L. Brown ([B, lemme 2.6.1]) et qui estime la valeur absolue de $t(z)$ en fonction de celle de z.

Lemme 7 ([B]). *Soit $z \in \Omega$ satisfaisant $|z| = |z|_A = q^{m-\varepsilon}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \varepsilon < 1$. Si on pose $n = \max\{0, m\}$, alors*

$$|t(z)| = \left|\frac{\widetilde{\pi} z}{T^n}\right|^{-q^n}.$$

En particulier, si $n = m \geq 0$ alors $\quad |t(z)| = q^{q^n(\varepsilon - \frac{q}{q-1})}$.

On rappelle que C est le module de Carlitz (voir (4)), ainsi pour $a \in A$ on a :

$$(31) \qquad C_a = \sum_{i=0}^{\deg a} l_i(a)\mathcal{F}^i \quad \text{avec} \quad \deg l_i(a) = (\deg a - i)q^i \leq \frac{|a| - q^i}{q-1}.$$

On définit par $f_a(t) = t^{|a|} C_a\left(\frac{1}{t}\right)$ le polynôme réciproque de C_a. Ainsi, si a est unitaire, on a

$$f_a(t) = \sum_{i=0}^{\deg a} l_i(a) t^{|a|-q^i} = 1 + \sum_{i=0}^{\deg a - 1} l_i(a) t^{|a|-q^i} = 1 + \epsilon_a(t).$$

Soient $\varepsilon < 1$ et $t \in \mathcal{C}$ tel que $|t| \leq q^{\varepsilon - \frac{q}{q-1}}$, alors on a les majorations

$$\begin{aligned} \deg(l_i(a)t^{|a|-q^i}) &\leq (|a| - q^i)\left(\frac{1}{q-1} + \deg(t)\right), \\ &\leq (q-1)\left(\frac{1}{q-1} + \deg(t)\right) \leq -(q-1)(1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Ainsi, si $|t| \leq q^{\varepsilon - \frac{q}{q-1}}$ alors

$$(32) \qquad f_a(t) = 1 + \epsilon_a(t) \qquad \text{avec} \qquad |\epsilon_a(t)| \leq q^{-(q-1)(1-\varepsilon)}.$$

On rappelle la formule du produit obtenue par E. U. Gekeler dans [Ge4] :

$$\overline{\Delta}(z) = -t(z)^{q-1} \prod_{a \in A^+} f_a(t(z))^{(q^2-1)(q-1)},$$

où A^+ désigne le sous-ensemble de A formé des éléments unitaires. Soit $z \in \mathcal{C}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel on a $|z| = |z|_A = q^{n-\varepsilon} > q^{-1}$. Le lemme 7 donne les majorations

$$|t(z)| \leq q^{q^n(\varepsilon - \frac{q}{q-1})} \leq q^{\varepsilon - \frac{q}{q-1}}$$

et d'après (32), on a la majoration $|\epsilon_a(t)| \leq q^{-(q-1)(1-\varepsilon)}$. En reportant dans la formule du produit, on obtient l'égalité suivante

$$(33) \quad \overline{\Delta}(z) = -t(z)^{q-1} \prod_{a \in A^+} (1 + \epsilon_a(t(z)))^{(q^2-1)(q-1)} = -t(z)^{q-1}(1 + \zeta(t(z))),$$

avec $|\zeta(t(z))| \leq q^{-(q-1)(1-\varepsilon)}$.

On termine alors la preuve de la proposition 9. Puisque $|z|_i > 1$, on peut trouver $u \in A$, vérifiant les égalités $|z|_i = |z|_A = |z-u|$. On pose $z' = z-u$, ainsi $|z'| = |z'|_A = q^{n-\varepsilon}$ donc on a

$$|\zeta(t(z'))| \leq q^{-(q-1)(1-\varepsilon)}.$$

Or, puisque $\overline{\Delta}$ est une forme modulaire, $\overline{\Delta}(z) = \overline{\Delta}(z')$ et on a les égalités

$$\begin{aligned} \deg \overline{\Delta}(z) &= -(q-1)q^n\left(\frac{q}{q-1} - \varepsilon\right), \\ &= -q^{n-\varepsilon}(q^\varepsilon(q - \varepsilon(q-1))) \quad = \quad -|z|_i C_\varepsilon, \end{aligned}$$

d'où la proposition. □

On peut maintenant donner une majoration de la hauteur des polynômes $\overline{\Phi}_{a,y}$ pour certains y.

Proposition 10. *Soit $z \in \Omega$ tel que $|z| = |z|_i = q^{1-\varepsilon}$ où $0 < \varepsilon < 1$, et $y = j(z)$. Alors on a*

$$m(\overline{\Phi}_{a,y}) \leq (2(q^2-1)\deg a + q(q+1))\psi(a).$$

Preuve. Avec ces notations, on a $\overline{\Phi}_{a,y}(X) = \prod_{\alpha \in \Delta_a^*(\Gamma)} (X - h_\alpha(z))$, et donc on a l'égalité

$$m(\overline{\Phi}_{a,y}) = \sum_{\alpha \in \Delta_a^*(\Gamma)} \max\{0, \deg(h_\alpha(z))\}. \tag{34}$$

On est ainsi amené à majorer $\deg(h_\alpha(z))$, et donc aussi $\deg(\Delta \circ \alpha(z))$, pour α parcourant $\Delta_a^*(\Gamma)$. On se donne $\alpha = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{bmatrix} \in \Delta_a^*(\Gamma)$. On a :

$$|\alpha(z)|_i = \left|\frac{a_0 z + b_0}{d_0}\right|_i = \left|\frac{a_0 z}{d_0}\right| = \left|\frac{az}{d_0^2}\right|. \tag{35}$$

On distinguera deux cas.

Premier cas : Si $|\alpha(z)|_i > 1$, c'est-à-dire $|d_0| < \sqrt{|az|}$, alors d'après la proposition 9 on a $\deg \overline{\Delta}(\alpha(z)) = -C_\varepsilon |\alpha(z)|_i < 0$. On obtient les majorations suivantes

$$\begin{aligned} \deg(h_\alpha(z)) &= (q^2-1)\deg a_0 + C_\varepsilon |z|(1 - |\alpha(z)|_i), \\ &\leq (q^2-1)\deg a + C_\varepsilon |z|, \\ &\leq (q^2-1)\deg a + q(q(1-\varepsilon) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Finalement on a montré l'inégalité

$$\deg(h_\alpha(z)) \leq (q^2-1)\deg a + q(q+1).$$

Second cas : Si $|\alpha(z)|_i \leq 1$, c'est-à-dire $|d_0| \geq \sqrt{|az|}$, on reprend la construction par L. C. Hsia [H] d'un élément γ de $SL_2(A)$ tel que $|\gamma\alpha(z)|_i > 1$. Cette construction utilise les suites de Farey, que l'on ne détaillera pas ici. On pose $N = [\deg d_0 - 1/2\deg(az)]$. D'après la proposition 3.4 de [H], il existe u et v dans A tels que $(u,v)=1$ et $\deg u < \deg v \leq N$, avec :

$$\left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right| \leq \frac{1}{|u|q^{N+1}}.$$

Le théorème de Bezout donne l'existence de deux éléments r et s de A, pour lesquels la matrice $\gamma = \begin{bmatrix} s & -r \\ u & -v \end{bmatrix}$ est dans $SL_2(A)$. Alors :

$$|\gamma\alpha(z)|_i = \frac{|\alpha(z)|_i}{|u\alpha(z)-v|^2} = \frac{|\alpha(z)|_i}{|u|^2 \max\left\{|\alpha(z)|_i, \left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right|\right\}^2}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} |u\alpha(z) - v| &= |u|\left|\frac{a_0 z}{d_0} + \left(\frac{b_0}{d_0} - \frac{v}{u}\right)\right|, \\ &= |u|\max\left\{|\alpha(z)|_i, \left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right|\right\} \qquad \text{car} \qquad |z| = |z|_i > 1. \end{aligned}$$

En distinguant deux cas, L. C. Hsia obtient dans [H] les relations suivantes.

Lemme 8 ([H]). On a

Si $|\alpha(z)|_i \leq \left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right|$ *alors* $|\gamma\alpha(z)|_i = \dfrac{|\alpha(z)|_i}{|u|^2\left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right|^2} \geq q^{2N+2}|\alpha(z)|_i > 1.$

Si $|\alpha(z)|_i > \left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right|$ *alors* $|\gamma\alpha(z)|_i = \dfrac{1}{|u|^2|\alpha(z)|_i} \geq \dfrac{1}{q^{2N}|\alpha(z)|_i} > 1.$

La fonction $\overline{\Delta}$ est une forme modulaire de poids q^2-1, ainsi on a l'égalité

$$\overline{\Delta}(\gamma\alpha(z)) = (u\alpha(z) - v)^{q^2-1}\overline{\Delta}(\alpha(z)).$$

a) Si $|\alpha(z)|_i \leq \left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right|$ alors :

$$\begin{aligned}
\deg \overline{\Delta}(\alpha(z)) &= \deg \overline{\Delta}(\gamma\alpha(z)) - (q^2-1)\deg(u\alpha(z)-v), \\
&= -C_\varepsilon|\gamma\alpha(z)|_i - (q^2-1)\left(\deg(u) + \deg\left(\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right)\right), \\
&\leq (q^2-1)\deg(d_0 v), \\
&\leq (q^2-1)(\deg a + \deg d_0).
\end{aligned}$$

b) Si $|\alpha(z)|_i > \left|\frac{b_0}{d_0} - \frac{u}{v}\right|$ alors :

$$\begin{aligned}
\deg \overline{\Delta}(\alpha(z)) &= \deg \overline{\Delta}(\gamma\alpha(z)) - (q^2-1)\deg(u\alpha(z)-v), \\
&= -C_{1-\varepsilon}|\gamma\alpha(z)|_i - (q^2-1)\left(\deg(u) + \deg\left(\frac{a_0 z}{d_0}\right)\right), \\
&\leq (q^2-1)\deg(d) \;\leq\; (q^2-1)\deg a.
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}
\deg(h_\alpha(z)) &\leq (q^2-1)(\deg a + \deg d_0) + (q^2-1)\deg a_0 + C_\varepsilon|z|, \\
&\leq 2(q^2-1)\deg a + q(q+1).
\end{aligned} \tag{36}$$

En reportant dans (34), on obtient facilement la proposition. □

On utilise maintenant, comme L. C. Hsia, une méthode d'interpolation pour obtenir la majoration suivante de la hauteur du polynôme $\overline{\Phi}_a$.

Proposition 11. *Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout $a \in A$ on ait*

$$H(\overline{\Phi}_a) \leq c_0(\psi(a)\deg a + 1).$$

On utilisera, pour montrer cette proposition le résultat qui suit ([H], lemme 5.1).

Lemme 9 ([H]). *Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ deux nombres positifs du groupe des valuations de $\mathcal{C}$. Soit $P(X) \in \mathcal{C}[X]$ de degré D, il existe une constante $\kappa > 0$ ne dépendant que de λ_1 et de λ_2 telle que l'on a*

$$\left| m(P) - \log_q \sup_{\lambda_1 \leq |y| \leq \lambda_2} |P(y)| \right| \leq \kappa D.$$

On applique ce lemme aux coefficients de Φ_a qui sont des polynômes en j :

$$\Phi_a(X) = \sum_{i=O}^{\psi(a)} U_i(j)X^j.$$

On sait que pour tout z dans Ω tel que $|z| = |z|_i = q^{1-\varepsilon}$ où $0 < \varepsilon < 1$ on a

$$\deg\big(U_i(j(z))\big) \leq \big(2(q^2-1)\deg a + q(q+1)\big)\psi(a). \tag{37}$$

On fixe ε_1 et ε_2 réels vérifiant les inégalités $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ et on pose $\lambda_1 = q^{q(q-(q-1)\varepsilon_2)}$ et $\lambda_2 = q^{q(q-(q-1)\varepsilon_1)}$. La fonction modulaire j fournit une bijection entre $GL_2(A)\backslash\Omega$ et $\mathcal{C}$, ainsi pour tout y dans $\mathcal{C}$ tel que $\lambda_1 \leq |y| \leq \lambda_2$, il existe $\eta \in \Omega$, vérifiant $y = j(\eta)$ et $|\eta| = |\eta|_i = q^{1-\varepsilon}$ avec $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$. Donc, on a

$$\log_q \sup_{\lambda_1 \leq |y| \leq \lambda_2} |U_i(y)| \leq (2(q^2-1)\deg a + q(q+1))\psi(a). \tag{38}$$

Comme les U_i sont des polynômes de degrés inférieurs à $\psi(a)$, le lemme 9 donne de plus la majoration

$$\left| m(U_i) - \log_q \sup_{\lambda_1 \leq |y| \leq \lambda_2} |U_i(y)| \right| \leq \kappa\psi(a). \tag{39}$$

Les majorations (38) et (39) donnent alors clairement la proposition. □

4. Démonstration du théorème

4.1. Construction d'une fonction auxiliaire

On construit, pour tout entier naturel N, une fonction $F_N(t) = P_N(\overline{\Delta}(t), j(t))$, vérifiant

$$\begin{aligned} &P_N(X_1, X_2) \in A[X_1, X_2],\\ &\deg_{X_i} P_N \leq L_i - 1, \qquad (40)\\ &\mathrm{ord}_0 F_N(t) \geq N(q-1), \end{aligned}$$

où les entiers L_i seront déterminés ultérieurement en fonction de N. Si on écrit P_N sous la forme $P_N = \sum_{\mathbf{i}} p_{\mathbf{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2}$, alors on a les développements

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \sum_{\mathbf{i}} p_{\mathbf{i}} \Big(\sum_{n_1 \geq 1} \delta_{n_1} t^{(q-1)n_1} \Big)^{i_1} \Big(\sum_{n_2 \geq -1} \gamma_{n_2} t^{(q-1)n_2} \Big)^{i_2}, \qquad (41)\\ &= \sum_{n \geq -L_2} f_n t^{n(q-1)}, \end{aligned}$$

où les coefficients δ_{n_1} et γ_{n_2} sont introduits en (12) et (13). On est donc amené à trouver des solutions dans A du système linéaire suivant.

$$f_n = 0, \quad n = -L_2, \ldots, N-1. \tag{S}$$

Pour cela, on utilise le lemme de Siegel suivant (voir par exemple [ADR]).

Lemme 10. *Soient, pour $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$, des éléments $a_{i,j}$ de A. On note M_0 un majorant de leurs degrés. Si $m < n$, alors il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans A non tous nuls tels que l'on ait*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \quad (1 \le i \le m) \qquad et \qquad \deg x_j \le \frac{m}{n-m}M_0 + 1 \quad (1 \le j \le n).$$

Il existe donc des solutions au système (S) dès que $N + L_2 < L = L_1 L_2$. De plus, les majorations données en (12) et en (13) sur les coefficients des développements des fonctions $\overline{\Delta}$ et j, impliquent que les degrés des coefficients de ce système ne sont pas plus grands que $N + L_2$. Le lemme de Siegel permet donc de choisir P_N dont la hauteur vérifie la majoration

$$H(P_N) \le \frac{N+L_2}{L-N-L_2}(N+L_2)+1. \tag{42}$$

4.2. Majoration du degré de $F_N(t)$

Soit $M(q-1)$ l'ordre d'annulation de $F_N(t)$ en zéro. Par construction de F_N, on a clairement $M \ge N$. Soit f_M le premier coefficient non nul dans le développement (41) en série entière de F_N. On pose $G_N(t) = \sum_{n\ge 0} f_{n+M} t^{n(q-1)}$, de sorte que l'on ait

$$F_N(t) = t^{M(q-1)} G_N(t). \tag{43}$$

Soit $\rho \in \mathbb{R}$, on majore le degré de $F_N(t)$ pour t de degré inférieur ou égal à ρ. Les inégalités de Cauchy dans le cadre non-archimédien donnent ici

$$\begin{aligned} \deg G_N(t) &\le \sup_{n\ge 0}\{\deg(f_{n+M}) + n(q-1)\rho\}, \\ &\le \sup_{n\ge 0}\{n + M + L_2 + n(q-1)\rho + H(P_N)\}. \end{aligned}$$

En choisissant $\rho = -\dfrac{1}{q-1}$, on obtient la majoration

$$\deg G_N(t) \le M + L_2 + H(P_N). \tag{44}$$

On a donc montré la proposition suivante.

Proposition 12. Pour tout $t \in C$ vérifiant $\deg(t) \le -\dfrac{1}{q-1}$, on a la majoration

$$\deg F_N(t) \le M(q-1)\deg(t) + M + L_2 + H(P_N).$$

4.3. Construction d'un nombre algébrique non nul

On fixe désormais τ dans $\mathcal{C}$ tel que $\deg(\tau) \leq -\dfrac{1}{q-1}$, et on suppose que les nombres $\overline{\Delta}(\tau)$ et $j(\tau)$ sont algébriques sur k. Puisque les fonctions Δ et j sont algébriquement indépendantes sur $\mathcal{C}$ (lemme 1), la fonction F_N n'est pas identiquement nulle, et donc on peut trouver a dans A unitaire, de degré minimal tel que $F_N(\tau_a) \neq 0$, où $\tau_a = \dfrac{1}{C_a(1/\tau)}$. On pose :

$$W_N(t) = t^{-M(q-1)} F_N(t) \prod_{\substack{b \in A^+ \\ 1 \leq \deg b < \deg a}} \frac{\tau}{t - \tau_b}. \tag{45}$$

Il est montré dans [ADR] (lemme 13) que $|\tau_b| = |\tau|^{|b|}$, ainsi on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} |W_N(0)| = |f_M| \prod_{\substack{b \in A^+ \\ 1 \leq \deg b < \deg a}} |\tau||\tau_b|^{-1} &= |f_M||\tau|^{\frac{q^{\deg a} - q}{q-1}} \prod_{\substack{b \in A^+ \\ 1 \leq \deg b < \deg a}} |\tau|^{-q^{\deg b}}, \\ = |f_M||\tau|^{\frac{q^{\deg a} - q}{q-1}} \prod_{1 \leq i < \deg a} |\tau|^{-q^{2i}} &= |f_M||\tau|^{\frac{-q^{2\deg a} + q^{\deg a + 1} + q^{\deg a} - q}{q^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Or, comme $f_M \in A$, alors $|f_M| \geq 1$, et donc

$$|\tau|^{\frac{-q^{2\deg a} + q^{\deg a + 1} + q^{\deg a} - q}{q^2 - 1}} \leq |W_N(0)|. \tag{46}$$

D'autre part, d'après la majoration de $\deg F_N(t)$, on a

$$|W_N(0)| \leq \sup\left\{ |W_N(z)| \, : \, z \in \mathcal{C}, |z| = |\tau| \right\} \leq q^{(M + L_2 + H(P_N))}. \tag{47}$$

Les deux inégalités (46) et (47) donnent alors la majoration

$$|\tau|^{\frac{-q^{2\deg a} + q^{\deg a + 1} + q^{\deg a} - q}{q^2 - 1}} \leq q^{(M + L_2 + H(P_N))}.$$

Et donc, il existe une constante $c_1 > 0$ ne dépendant que de q et de τ, et vérifiant

$$|a|^2 = q^{2\deg a} \leq c_1(M + H(P_N) + L_2). \tag{48}$$

4.4. Majoration de la hauteur de $\overline{\Delta}(\tau_a)$

Soit $x \in \overline{k}$, on note $P_{\min}(x)$, son polynôme minimal dans $A[X]$. On appelle mesure de Mahler de x celle de son polynôme minimal, et on a :

$$m(x) = [k(x) : k] h(x). \tag{49}$$

On reprend la démonstration du lemme 5 des Stéphanois [BS], pour obtenir le résultat analogue suivant.

Lemme 11. *Soit $P \in A[X,Y]$ et $x,y \in \overline{k}$ tels que $P(x,y) = 0$. Si le polynôme $P(X,y)$ n'est pas constant alors on a la majoration*

$$m(x) \leq [k(y):k]H(P) + m(y)\deg_Y P.$$

Preuve. On pose $d_y = [k(y):k]$, on note a_0 le coefficient dominant du polynôme minimal de y dans $A[X]$, et $y_1 = y, y_2, \ldots, y_{d_y}$ ses conjugués répétés avec multiplicité. Le degré en Y du polynôme P sera noté D. On considère le polynôme suivant.

$$Q(X) = a_0^D \prod_{j=1}^{d_y} P(X, y_j)$$

Par construction, ses coefficients sont des entiers algébriques, et sont des fonctions symétriques en les y_j. Par conséquent, ils sont dans A. Alors, puisque $Q(x) = 0$, le polynôme minimal de x divise Q dans $A[X]$. Par hypothèse, $Q(X,y)$ n'est pas constant ainsi Q n'est pas nul. On a donc les majorations suivantes

$$\begin{aligned} m(x) = H(P_{\min}(x)) \leq H(Q) &\leq D\deg a_0 + \sum_{j=1}^{d_y} H(P(X,y_j)), \\ &\leq D\deg a_0 + \sum_{j=1}^{d_y} \max_{|z|=1} \deg(P(z,y_j)), \\ &\leq D\deg a_0 + \sum_{j=1}^{d_y} (H(P) + D\max\{0, \deg y_j\}), \\ &\leq d_y H(P) + m(y)D, \end{aligned}$$

d'où le lemme. □

On utilise ce lemme avec $x = a^{q^2-1}\dfrac{\overline{\Delta}(\tau_a)}{\overline{\Delta}(\tau)}, y = j(\tau)$ et $P = \overline{\Phi}_a$. On obtient la majoration

$$m\left(a^{q^2-1}\frac{\overline{\Delta}(\tau_a)}{\overline{\Delta}(\tau)}\right) \leq [k(j(\tau)):k]H(\overline{\Phi}_a) + m(j(\tau))\deg_Y \overline{\Phi}_a. \tag{50}$$

Or, on a montré précédemment (propositions 8 et 11) les majorations

$$\deg_Y \overline{\Phi}_a \leq \psi(a) \quad \text{et} \quad H(\overline{\Phi}_a) \leq c_0(\psi(a)\deg a + 1).$$

Alors, sachant que l'on a

$$\begin{aligned} h\left(\overline{\Delta}(\tau_a)\right) &\leq h\left(a^{q^2-1}\frac{\overline{\Delta}(\tau_a)}{\overline{\Delta}(\tau)}\right) + h(\overline{\Delta}(\tau)) - (q^2-1)\deg a, \\ &\leq m\left(a^{q^2-1}\frac{\overline{\Delta}(\tau_a)}{\overline{\Delta}(\tau)}\right) + h(\overline{\Delta}(\tau)) - (q^2-1)\deg a, \end{aligned}$$

et connaissant la majoration (20) de $\psi(a)$, on obtient facilement la proposition suivante.

Proposition 13. *Il existe une constante $c_2 > 0$ ne dépendant que de q et de τ, telle que pour tout a dans A on ait*

$$h\big(\overline{\Delta}(\tau_a)\big) \leq c_2(\psi(a)\deg a + 1).$$

4.5. Inégalité de Liouville

C'est dans cette partie que l'on aboutit à une contradiction, en appliquant le lemme de Liouville suivant, corollaire du lemme 4 de [M].

Lemme 12. *Soit $P[X_1, \ldots, X_\nu] \in A[X_1, \ldots, X_\nu]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ des éléments de C contenus dans une extension de degré au plus $\mathcal{D}$ de k. Si $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$ est non nul, alors on a*

$$\deg P(\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu) \geq -\mathcal{D}\Big(\sum_{i=1}^{\nu}(\deg_{X_i} P)h(\lambda_i) + H(P)\Big).$$

On applique ce lemme aux polynômes P_N, avec $\nu = 2, \lambda_1 = \overline{\Delta}(\tau_a)$ et $\lambda_2 = j(\tau_a)$. D'une part, la majoration ci-dessous est vue dans [ADR].

$$h(j(\tau_a)) \leq c_3 h(j(\tau)) + \log_q |a| + 1, \tag{51}$$

où $c_3 > 0$, comme toutes les constantes c_i qui apparaissent dans la suite, ne dépend que de q et de τ. D'autre part, la proposition 13 donne

$$h(\overline{\Delta}(\tau_a)) \leq c_2(\psi(a)\deg a + 1). \tag{52}$$

D'après la proposition 6, on peut trouver une constante $c_4 > 0$ pour laquelle on a la majoration

$$[k(j(\tau_a), \overline{\Delta}(\tau_a)) : k] \leq c_4(|a|\log\log|a| + 1), \tag{53}$$

Enfin, d'après la proposition 12, on a

$$\begin{aligned} \deg F_N(\tau_a) &\leq H(P_N) + M((q-1)\deg(\tau_a) + 1) + L_2, \\ &\leq H(P_N) + M((q-1)|a|\deg(\tau) + 1) + L_2. \end{aligned}$$

On choisit maintenant $L_1 = [N^{3/8}]$ et $L_2 = [N^{3/4}]$. On a bien

$$N + L_2 < L_1 L_2 = [N^{3/8}][N^{3/4}],$$

du moins, pour N suffisamment grand.

De plus, il existe une constante $c_5 > 0$ telle que l'on a l'inégalité $H(P_N) \leq c_5(N^{7/8} + 1)$. D'autre part, $|a|^2 \leq c_1(M + H(P_N) + L_2)$ donc on peut trouver $c_6 > 0$ vérifiant $|a|^2 \leq c_6 M$. Enfin, étant donnés les choix de L_1 et L_2, et puisque $N \leq M$, il existe $c_7 > 0$ vérifiant la majoration

$$\deg F_N(\tau_a) \leq -c_7 M|a|.$$

En reportant dans l'inégalité de Liouville, on obtient l'existence de $c_8 > 0$ telle que

$$|a|M \leq c_8(|a| \log\log |a| + 1)\Big(N^{3/8}\psi(a) \deg a + N^{3/4} \deg a + N^{7/8} + 1\Big).$$

Alors, sachant que $N \leq M$, que $|a|^2 \leq c_6 M$, et connaissant une majoration de $\psi(a)$ (voir (20)), on obtient le résultat suivant

$$(54) \quad \exists c_9 > 0, \quad M \leq c_9(\log\log M + 1) \times \Big(M^{7/8} \log M \log\log M + M^{3/4} \log M + M^{7/8} + 1\Big).$$

On aboutit, pour N assez grand, à une contradiction. □

5. Conséquence

On considère un module de Drinfeld Υ de rang 2 défini sur $\overline{k}$:

$$\Upsilon_T(X) = TX + gX^q + \Delta X^{q^2}.$$

Son invariant modulaire $j(\Upsilon) = \dfrac{g^{q+1}}{\Delta}$ est donc algébrique sur k. On se donne une base (w_1, w_2) du réseau $\Lambda = \Lambda_\Upsilon$ associé à Υ. Le réseau $\Lambda' = A \oplus \dfrac{w_2}{w_1} A$ définit un module de Drinfeld Υ' vérifiant

$$\Upsilon'_T(X) = TX + w_1^{q-1} gX + w_1^{q^2-1} \Delta X^{q^2}.$$

Les deux modules Υ et Υ' étant isomorphes, ils ont même invariant modulaire :

$$j(\Upsilon) = j(\Upsilon') = \frac{g^{q+1}}{\Delta} \in \overline{k}.$$

Or, si l'on pose $z = \dfrac{w_2}{w_1} \in \Omega$, on a $\Delta(z) = w_1^{q^2-1}\Delta = \widetilde{\pi}^{q^2-1}\overline{\Delta}(t(z))$, où $\Delta \in \overline{k}$. Le théorème démontré ici, dit que si $|t(z)| < q^{-\frac{1}{q-1}}$, alors $\overline{\Delta}(t(z)) \notin \overline{k}$. On obtient ainsi le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit Υ un module de Drinfeld de rang 2 défini sur $\overline{k}$, et soit $\Lambda = w_1 A \oplus w_2 A$ son réseau associé. Si* $\deg\left(e\left(\tilde{\pi}\frac{w_2}{w_1}\right)\right) > \frac{1}{q-1}$, *alors* $\frac{w_1}{\tilde{\pi}}$ *est transcendant.*

Bibliographie

[ADR] M. ABLY, L. DENIS, F. RECHER, *Transcendance de l'invariant modulaire en caractéristique finie.* Math. Z. **231** (1999), 75–89.

[Ba] S. BAE, *On the modular equation for Drinfeld modules of rank* 2. J. Number Theory **42** (1992), 123–133.

[BS] K. BARRÉ-SIRIEIX, G. DIAZ, F. GRAMAIN, G. PHILIBERT, *Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin.* Invent. Math. **124** (1996), 1–9.

[B] M. L. BROWN, *Singular moduli and supersingular moduli of Drinfeld modules.* Invent. Math. **110** (1992), 419–439.

[Ca] L. CARLITZ, *The arithmetic of polynomials in Galois field.* Amer. J. Math. **54** (1932), 39–50.

[Ch] G. V. CHUDNOVSKY, *Contributions to the theory of transcendental numbers.* Math. Surveys A.M.S. **19** (1984), 355–383.

[Ge1] E. U. GEKELER, *Drinfeld-Moduln und modulare Formen über rationalen Funktionkörpern.* Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhems-Universität, Bonn, 1979. Bonner Mathematische Schriften **119**.

[Ge2] E. U. GEKELER, Über Drinfeldsche Modulkurven vom Hecke-Typ. Comp. Math. **57** (1986), 219–236.

[Ge3] E. U. GEKELER, *Drinfeld modular curves.* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1986.

[Ge4] E. U. GEKELER, *A product expansion for the discriminant function of Drinfeld modules of rank two.* J. Number Theory **21** (1985), 135–140.

[Ge5] E. U. GEKELER, *On the coefficients on Drinfeld modular forms.* Invent. Math. **93** (1988), 667–700.

[Ge6] E. U. GEKELER, *On the de Rham isomorphism for Drinfeld modules.* J. Reine Angew. Math. **401** (1989), 188–208.

[Ge7] E. U. GEKELER, *Quasi periodic functions and Drinfeld modular forms.* Comp. Math. **69** (1989), 277–293.

[H] L. C. HSIA, *On the coefficients of modular polynomials for Drinfeld modules.* J. Number Theory **72** (1998), 236–256.

[L] S. LANG, *Elliptic functions.* Addison Wesley, 1973.

[M] R. MÜLLER, *Algebraische unabhängigkeit der werte gewisser lückenreihen in nicht-archimedisch bewerteten körpern.* Results Math. **24** (1993), 288–297.

[N1] Y. NESTERENKO, *Modular functions and transcendence problems.* C.R. Acad. Sci. Paris **322** (1996), 909–914.

[N2] Y. NESTERENKO, *Modular functions and transcendence questions.* Mat. Sb. **187** (1996), no 9, 65–96 (russian); English translation in Sb. Math. **187** (1996), no 9, 1319–1348.

[P] P. PHILIPPON, *Indépendance algébrique et K-fonctions.* J. Reine Angew. **497** (1998), 1–15.

[T] A. THIERY, *Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfeld.* The arithmetic of function fields, Proc. of the workshop at the Ohio State Univ., Berlin: Walter de Gruyter, 1991.

Sophie DION
Université des sciences et technologies de Lille
UFR de mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq
France
E-mail : `Sophie.Dion@agat.univ-lille1.fr`