Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Alexei Panchishkin

Sur une condition suffisante pour l'existence de mesures p-adiques admissibles

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 15, nº 3 (2003), p. 805-829

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2003__15_3_805_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 805–829

Sur une condition suffisante pour l'existence de mesures p-adiques admissibles

par Alexei PANCHISHKIN

RÉSUMÉ. On donne une nouvelle condition suffisante pour l'existence des mesures p-adiques admissibles μ obtenues à partir de suites de distributions Φ_j $(j \geq 0)$ à valeurs dans les espaces de formes modulaires. On utilise la projection caractéristique sur le sous-espace primaire associé à une valeur propre non nulle α de l'opérateur U d'Atkin. Notre condition est exprimée en termes des congruences entre les coefficients de Fourier des formes modulaires Φ_j. On montre comment vérifier ces congruences, et on traite plusieurs applications. On obtient donc une ***explication conceptuelle*** des formules de Yu.Manin pour les distributions attachées à la fonction $L_f(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) a_n n^{-s}$ d'une forme parabolique primitive $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi)$ de poids $k \geq 2$.

ABSTRACT. We give a new sufficient condition for the existence of admissible p-adic measures μ obtained from sequences of distributions Φ_j $(j \geq 0)$ with values in spaces of modular forms. We use the characteristic projection on the primary subspace associated to a non zero eigenvalue α of the Atkin operator U. Our condition is expressed in terms of congruences between the Fourier coefficients of the modular forms Φ_j. We show how to verify these congruences and we give several applications. So we get a ***conceptual explanation*** for the Yu.Manin's formulas for the distributions attached to the L-function, $L_f(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) a_n n^{-s}$, of a primitive cuspform $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi)$ of weight $k \geq 2$.

1. Introduction.

Soit p un nombre premier, et soit $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ la complétion d'une clôture algébrique du corps des nombres p-adiques. On fixe un plongement

$$i_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}_p, \tag{1.1}$$

Manuscrit reçu le 11 mars 2002.

et on identifie $\overline{\mathbb{Q}}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}_p$. Pour un nombre naturel M fixé on considère le groupe *profini*

$$Y = Y_{M,p} = \varprojlim_v Y_{Mp^v}, \quad Y_{Mp^v} = (\mathbb{Z}/Mp^v\mathbb{Z})^\times,$$

muni de la projection canonique $y_p : Y \to \mathbb{Z}_p^\times$.

UNE FONCTION L p-ADIQUE $L : X \to \mathbb{C}_p$ est en général une fonction *méromorphe* sur le groupe $X = \mathrm{Hom}_{cont}(Y, \mathbb{C}_p^\times)$ des caractères p-adiques continus définie à partir de la transformation de Mellin p-adique (voir section 2) L_μ d'une mesure μ sur Y :

$$L_\mu : X \to \mathbb{C}_p, \quad \mu(x) = \int_Y x(y)\, d\mu(y).$$

Soit, par exemple

$$f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi), \quad \text{où } q = e(z) = \exp(2\pi i z), \quad \mathrm{Im}(z) > 0,$$

une forme parabolique primitive (de poids $k \geq 2$, et de caractère ψ (mod N)). On étudie les valeurs spéciales en $s = 1, \cdots, k-1$ des fonctions L suivantes :

$$L_f(s, \chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) a_n n^{-s},$$

où $\chi : (\mathbb{Z}/Mp^v)^\times \to \mathbb{C}^\times$ parcourt les caractères de Dirichlet.

Selon un théorème connu de Manin [Ma73], il existe deux constantes complexes non-nulles $c^+(f), c^-(f) \in \mathbb{C}^\times$ (*périodes* de f) telles que pour tout $s = 1, \cdots, k-1$ et pour tout caractère de Dirichlet χ avec la parité fixée, $(-1)^{k-s}\chi(-1) = \pm 1$, les valeurs spéciales L normalisées suivantes sont des *nombres algébriques* :

$$L_f^*(s, \chi) = \frac{(-2i\pi)^{-s}\Gamma(s) L_f(s, \chi)}{c^\pm(f)} \in \overline{\mathbb{Q}}. \tag{1.2}$$

Pour décrire les *congruences de type de Kummer* pour ces nombres algébriques on utilise une racine *non-nulle* α du p-polynôme de Hecke

$$1 - a_p X + \psi(p) p^{k-1} X^2 = (1 - \alpha X)(1 - \alpha' X).$$

Soit χ mod p^v ($v \geq 1$) un caractère de Dirichlet *primitif*, et $j = 0, \cdots, k-2$. Alors, il existe une méthode, basée sur les symboles modulaires et les fractions continues (voir [AV], [Ma73], [Vi76], [MTT])), pour décrire les valeurs normalisées ci-dessus comme les intégrales d'une mesure p-adique h-admissible $\mu_{f,\alpha}$, (avec $h = [\mathrm{ord}_p(\alpha)] + 1$) :

$$\mathcal{L}_{j,\chi} = \frac{G(\chi) p^{jv} L_f^*(1 + j, \overline{\chi})}{\alpha^v} = \int_Y \chi y_p^j\, d\mu := \mu(\chi y_p^j), \tag{1.3}$$

où $G(\chi)$ est la somme de Gauss de $\chi \bmod p^v$ avec $(v \geq 1)$. La condition de h-admissibilité signifie que pour tout $j = 0, \cdots, h-1$,

$$\left| \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a)^j \, d\mu \right|_p = o(p^{(h-j)v}) \text{ lorsque } v \to \infty. \tag{1.4}$$

Une mesure admissible n'est pas une mesure : la donnée de $\tilde{\Phi}$ est équivalent à la donnée d'une *suite finie* convenable des distributions p-adiques,

$$\mu_j(a + (Mp^v)) := \int_{a+(Mp^v)} y_p^j \, d\mu \quad (j = 0, \cdots, h-1)).$$

Le présent travail donne, en particulier, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, une décomposition des distributions p-adiques (de Manin, Amice-Vélu, Mazur-Tate-Teitelbaum, Vishik, ...), sous la forme :

$$\mu_{f,\alpha,j} = \ell^\alpha(\pi_\alpha(\Phi_j)), \quad (j = 0, 1, \cdots, k-2)$$

où

– Φ_j est une suite finie des distributions p-adiques sur Y à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (de *dimension infinie*) de formes modulaires,

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi, \overline{\mathbb{Q}}),$$

– π_α est un $\overline{\mathbb{Q}}$-projecteur canonique sur un sous-espace $\mathcal{M}^\alpha = \mathcal{M}^\alpha(\overline{\mathbb{Q}})$ de *dimension finie* (le sous-espace *primaire* de l'opérateur d'Atkin :

$$U\left(\sum_{n \geq 0} b_n q^n\right) = \sum_{n \geq 0} b_{pn} q^n,$$

– $\ell^\alpha \in (\mathcal{M}^\alpha)^*$ est une $\overline{\mathbb{Q}}$-forme linéaire (provenant de la *méthode de Rankin-Selberg*, et du produit scalaire de Petersson). Cette forme linéaire joue le rôle du *terme constante* dans la méthode de Klingen-Siegel [Kl] (pour $\alpha = 1$). En particulier, on obtient les distributions $\mu_{f,\alpha,j}$ aux valeurs *algébriques* (dans $\overline{\mathbb{Q}}$, identifié via (1.1) avec un sous-corps de $\mathbb{C}_p$).

TABLE DES MATIÈRES

Je remercie chaleureusement Gilles Robert pour son aide dans la préparation de cet article.

2. Méthode traditionnelle

La méthode traditionnelle de construction de fonctions L p-adiques est à partir des valeurs spéciales de fonctions L complexes (qui sont souvent des nombres algébriques (à une normalisation convenable près)), et on utilise mesures p-adiques, construites à partir de *l'interpolation p-adique* de leurs valeurs.
Dans cette section on note par A le corps de Tate $\mathbb{C}_p$, et on note par V un A-espace vectoriel normé (mais plus tard on utilise la notation A pour $\overline{\mathbb{Q}}$, pour $\mathbb{C}$, et pour d'autres anneaux de scalaires).

Définition 2.1.
a) Soit h un entier positif et soit $\mathcal{C}^h(Y,A)$ le sous-espace vectoriel sur A des fonctions localement polynomiales de degré $< h$ sur Y en la variable $y_p : Y \to \mathbb{Z}_p^*$ (la projection canonique) ; en particulier $\mathcal{C}^1(Y,A)$ est le sous-espace vectoriel sur A des fonctions localement constantes sur Y à valeurs dans A, et pour $h \geq 1$ on a les inclusions

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}^1(Y,A) \subset \mathcal{C}^h(Y,A) \subset \mathcal{C}^{\mathrm{loc-an}}(Y,A) \subset \mathcal{C}(Y,A), \text{ où}\\
&\mathcal{C}^1(Y,A) = \{\varphi : Y \to A \mid \varphi \text{ localement constante}\},\\
&\mathcal{C}^{\mathrm{loc-an}}(Y,A) = \{\varphi : Y \to A \mid \varphi \text{ localement analytique}\},\\
&\mathcal{C}(Y,A) = \{\varphi : Y \to A \mid \varphi \text{ continue}\}.
\end{aligned}$$

b) Une distribution Φ sur Y à valeurs dans un A-module normé V est une application linéaire $\Phi : \mathcal{C}^1(Y,A) \to V$, notée par $\varphi \mapsto \int_Y \varphi \, d\Phi$.

c) Une mesure $\Phi : \mathcal{C}^1(Y,A) \to V$ est une distribution bornée : $|\Phi(\varphi)|_p < C|\varphi|_p$ où C ne dépend pas de φ.

d) Soit $h \in \mathbb{N}^*$. Une mesure h-admissible $\tilde{\Phi}$ sur Y à valeurs dans V est une application A-linéaire $\tilde{\Phi} : \mathcal{C}^h(Y,A) \to V$ avec la condition de croissance suivante (voir [AV, Vi76]) *: pour $t = 0, 1, \cdots, h-1$,*

$$\left| \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v(h-t)}\right) \text{ lorsque } v \to \infty. \tag{2.1}$$

REMARQUE : Une mesure h-admissible $\tilde{\Phi}$ n'est ni une mesure, ni une distribution; la donnée de $\tilde{\Phi}$ est équivalent à la donnée d'une *suite finie* convenable Φ_j des distributions p-adiques, notées par

$$\Phi_j(a + (Mp^v)) := \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d\tilde{\Phi} \quad (j = 0, \cdots, h-1).$$

Cependant, ci le A-espace vectoriel normé V est *complet*, une telle $\tilde{\Phi}$ se prolonge de façon unique sur le A-espace vectoriel $\mathcal{C}^{\mathrm{loc-an}}(Y, A)$, voir [AV], [Vi76] (donc on peut considérer $\tilde{\Phi}$ comme une intégrale d'une fonction localement analytique) :

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{C}^{\mathrm{loc-an}}(Y, A) \to V, \quad \varphi \mapsto \int_Y \varphi(y) d\tilde{\Phi}(y) \ (\varphi \in \mathcal{C}^{\mathrm{loc-an}}(Y, A)).$$

En fait, une mesure h-admissible $\tilde{\Phi}$ n'est une mesure que si $h = 1$ (dans ce cas l'intégrale existe pour toute fonction continue $\varphi \in \mathcal{C}(Y, A)$).

LA NOUVELLE CONSTRUCTION des fonctions L p-adiques associées aux différentes classes des formes modulaires (de poids entier où demi-entier, ...), proposée ici, permet d'associer à certaines suites de distributions Φ_j sur Y à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel convenable

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) = \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(Np^v)$$

de *formes modulaires*, une famille μ de mesures p-adiques à valeurs *scalaires* dans $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}_p$.

On fixe une forme parabolique primitive

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}), \quad \text{avec } e(nz) = \exp(2\pi i n z),$$

de poids $k \geq 2$ et de caractère de Dirichlet ψ mod N, et on considère le p-polynôme de Hecke :

$$1 - a_p X + \psi(p) p^{k-1} X^2 = (1 - \alpha X)(1 - \alpha' X).$$

avec une racine (non nulle) α.

3. Distributions à valeurs dans les formes modulaires

Dans cette section on note par A soit $\overline{\mathbb{Q}}$, soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{C}_p$, et on considère un caractère de Dirichlet ψ mod N comme une fonction sur Y à valeurs dans $A^\times$ (on identifie $\overline{\mathbb{Q}}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}$, et de $\mathbb{C}_p$, via un plongement fixé (1.1), $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}_p$).

Soient

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N); A), \quad \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \psi; A)$$

les sous-espaces vectoriels sur A de $A[[q]]$, engendrés par les q-dévelopements

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n(f)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^v), \overline{\mathbb{Q}})$$

de formes modulaires classiques à coefficients de Fourier algébriques $a_n(f) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

On fixe un entier N' divisible par N, et on définit l'espace vectoriel des formes modulaires

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A) := \bigcup_{v\geq 0} \mathcal{M}(N'p^v)$$

où

$$\mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi; A) \text{ ou } \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N'); A), \text{ et } \mathcal{S} := \bigcup_{v\geq 0} \mathcal{S}(N'p^v)$$

est le sous-espace vectoriel sur A des formes paraboliques, et on note par

$$\mathcal{M}^\infty = \mathcal{M}^\infty(\mathbb{C}) := \bigcup_{v\geq 0} \mathcal{M}^\infty(N'p^v, \mathbb{C}))$$

les formes modulaires de type C^∞.

a) *Distributions d'Eisenstein analytiques réelles* de poids $\ell > 0$ (voir [Ka76]). Pour $s \in \mathbb{C}$ et $a, b \bmod N$ on pose (par prolongement analytique, si nécessaire) : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $y > 0$,

$$E_{\ell,N}(z, s; a, b) = \sum (cz+d)^{-\ell}|cz+d|^{-2s} \quad (0 \neq (c,d) \equiv (a,b) \bmod N) .$$

A partir de cette série, on obtient les *distributions d'Eisenstein* : on pose $s = -r$, $0 \leq r \leq \ell - 1$,

$$E_{r,\ell,N}(a,b) := \frac{N^{\ell-2r-1}\Gamma(\ell-r)}{(-2\pi i)^{\ell-2r}(-4\pi y)^r} \sum_{a \bmod N} e(-ax/N) E_{\ell,N}(Nz, -r; x, b)$$

$$\begin{aligned} (3.1) \qquad &= \varepsilon_{r,\ell,N}(a,b) + (4\pi y)^{-r} \times \\ &\sum_{\substack{0<dd' \\ d\equiv a,\, d'\equiv b \bmod N}} \operatorname{sgn} d \cdot d^{\ell-2r-1} W(4\pi dd'y, \ell-r, -r) q^{dd'} \in \mathcal{M}_\ell^\infty(N^2), \end{aligned}$$

où $W(y, \ell-r, -r) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\Gamma(\ell-r)}{\Gamma(\ell-r-j)} y^{r-j}$ est la fonction de Whittaker,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,\ell,N}(a,b) = &\frac{(-4\pi y)^s\Gamma(\ell+s)}{\Gamma(\ell+2s)} \delta\Big(\frac{b}{N}\Big) \zeta(1-\ell-2s; a, N)\Big|_{s=-r} \\ &+ \frac{\Gamma(\ell+2s-1)}{(4\pi y)^{\ell+s-1}\Gamma(s)} \delta\Big(\frac{a}{N}\Big) \\ &\times \Big[\zeta(\ell+2s-1; b, N) + (-1)^{\ell+2s}\zeta(\ell+2s-1; -b, N)\Big]\Big|_{s=-r} \end{aligned}$$

est le *terme constant*, et

$$\zeta(s;a,N) = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n\equiv a(\bmod N)}} n^{-s}$$

désigne la *fonction zêta partielle.*

Ces séries sont des formes modulaires de type $\mathcal{C}^\infty$ de poids $\ell > 0$ (voir [Ka76]) dans $\mathcal{M}_\ell^\infty(\Gamma_1(N^2))$, mais dans certains cas on obtient des formes modulaires *holomorphes* (si, par exemple, $\ell \geq 3$, $r = 0$ ou $r = l-1$) qui donnent des distributions sur $Y \times Y$ à valeurs dans $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$:

$$E_{r,\ell}\big((a + (Mp^v)) \times (b + (Mp^v))\big) := E_{r,\ell,Mp^v}(a,b) \in \mathcal{M}_l(\Gamma_1(M^2p^{2v}))$$

puisque, si $r = 0$ ou $r = l-1$,

$$y^{-r}W(y,\ell-r,-r) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{\Gamma(\ell-r)}{\Gamma(\ell-r-j)}y^{-j} = 1,$$

à cause du facteur $\dfrac{\Gamma(l-r)}{\Gamma(l-r-j)} = 0$ pour $j \geq l-r$.

b) *Formes modulaires partielles.*

Pour tout $f = \sum_{n\geq 0} a_n(f)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ on pose

$$\Phi_f(a + (Mp^v)) := \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\equiv a(\bmod p^v)}} a_n(f)q^n \in \mathcal{M}_k(N'p^{2v}), \quad N' = NM^2,$$

de telle façon que pour tout caractère de Dirichlet $\chi \bmod Mp^v$ vu comme une fonction sur Y à valeurs dans $A \subset \mathbb{C}_p$, l'intégrale

$$\int_Y \chi(y)\,d\Phi_f = \Phi_f(\chi) = \sum_{n\geq 0}\chi(n)a_n(f)q^n \in$$

$$\mathcal{M}_k(NM^2p^{2v}) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_1(NM^2p^{2v}))$$

coïncide donc avec la forme modulaire *tordue* f_χ.

c) *Séries thêta partielles* (aussi avec un polynôme sphérique).

Elles déterminent des distributions décrites dans [Hi85], §1.

REMARQUES.

i) Les distributions b), c) sont *bornées* par rapport à la norme p-adique sur

$$\mathcal{M} = \bigcup_v \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N'p^v), A) \subset A[[q]]$$

définie pour toute série $g = \sum_{n\geq 0} a(n,g)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N),A)$ par $|g|_p = \sup_n |a(n,g)|_p$. Les distributions (a) sont bornées (dans le cas *holomorphe*) seulement après une *régularisation* du terme constant.

ii) A partir des distributions a), b), c) on peut en construire beaucoup d'autres en utilisant les opérations de convolution sur Y (comme dans [Hi85], où la convolution d'une distribution thêta avec une distribution d'Eisenstein a été considérée).

iii) *Formes modulaires presque holomorphes de type* $r \geq 0$. Soient r un entier non-négatif et q, R deux variables indépendantes (pour les nombres complexes cette notation corresponde à $q = e(z) = e^{2\pi iz}$, $R = 4\pi y = \frac{1}{4\pi \mathrm{Im}(z)}$, $z \in \mathbb{C}$). Dans l'anneau $A[[q]][R]$ considérons les sous-$A[[q]]$-modules

$$P_r(A) = \left\{ g = \sum_{j=0}^{r} R^j g_j \text{ avec } g_j = \sum_{n \geq 0} a(j,n,g) q^n \in A[[q]] \right\}.$$

On considère aussi pour tout entier positif a les espaces complexes des fonctions presque-holomorphes (voir [Hi85])

$$Q_{r,a} = \left\{ \sum_{j=0}^{r} \mathrm{Im}(4\pi z)^{-j} g_j(z) \text{ avec } g_j = \sum_{n \geq 0} a(j,n,g) e(nz/a) \right\},$$

et on pose $Q_r = \cup_{a \geq 1} Q_{r,a}$.

Alors on définit le sous-A-module $\mathcal{M}_{r,k}(\Gamma_1(N), A) \subset A[[q]][R]$ des formes modulaires de type $r \geq 0$ et de poids $k \geq 1$ pour $\Gamma_1(N)$, comme le sous-A-module engendré par toutes les séries $g \in \mathcal{M}_{r,k}$ à coefficients algébriques $a(j,n,g) \in \overline{\mathbb{Q}} \subset A$ telles que les fonctions complexes correspondantes (notées aussi par g) ,

$$g = \sum_{j=0}^{r} \mathrm{Im}(4\pi z)^{-j} \sum_{n \geq 0} a(j,n,g) e(nz) \in Q_{r,1}$$

satisfont les deux conditions suivantes :

$$\forall \gamma \in \Gamma_1(N), g|_k \gamma = g \text{ et } \forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ g|_k \gamma \in Q_r.$$

Alors, une construction des distributions analogue reste valable pour les valeurs dans le A-module

$$\mathcal{M}_{r,k} = \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_{r,k}(Np^v),\ \text{ où } \mathcal{M}_{r,k}(Np^v) = \mathcal{M}_{r,k}(\Gamma_1(Np^v), A).$$

Cependant, notre but est d'obtenir des distributions μ à valeurs *scalaires* (dans $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}_p$) à partir d'une suite des distributions Φ_j *modulaires* (à valeurs dans $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$). Cela se fait en deux temps :

LA PREMIÈRE ÉTAPE est le passage de $\mathcal{M}$ à une partie $\mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{M}$ de dimension finie fixe; on utilise un projecteur convenable $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^\circ$ de telle façon qu'on puisse contrôler les dénominateurs.

LA DEUXIÈME ÉTAPE est l'application d'une forme linéaire ℓ convenable à la suite des distributions $\pi(\Phi_j)$.

4. Première étape : projecteurs sur des sous-espaces de dimension finie

TRACE NORMALISÉE. La première idée est d'utiliser *l'opérateur de la trace*

$$\mathrm{Tr}_N^{Np^v} f = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(Np^v)\backslash\Gamma_0(N)} f\,|_k\,\gamma.$$

On obtient après une normalisation le projecteur suivant

$$\pi(f) = [\Gamma_0(N) : \Gamma_0(Np^v)]^{-1}\,\mathrm{Tr}_N^{Np^v} f$$

(il est bien défini mais il introduit des dénominateurs inacceptables).

PROJECTEUR DE HIDA. La deuxième idée est d'utiliser l'opérateur $U = U_p$ d'Atkin qui agit sur $\mathcal{M}$ et sur $\mathcal{S}$ par $U(g) = \sum_{n\geq 0} a(pn, g)q^n$, où $g = \sum_{n\geq 0} a(n,g)q^n \in \mathcal{M} \subset A[[q]]$, $a(n,g) \in A$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ une valeur propre non nulle de l'opérateur $U = U_p$ d'Atkin sur $\mathcal{M}$ (associée à une forme parabolique primitive $f = \sum_{n\geq 1} a(n,f)e(nz) \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi) \subset \mathcal{M}$).

Dans le *cas ordinaire*, où $|\alpha|_p = 1$, une construction du projecteur π provient de l'*opérateur idempotent* $e = \lim_{r\to\infty} U_p^{r!}$ de Hida [Hi93] qui agit sur les formes modulaires p-adiques et dont l'image se trouve dans un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}} \subset \mathcal{M}$ de rang finie ("la partie ordinaire de $\mathcal{M}$"). Puis on obtient une distribution p-adique $\mu_{\alpha,\Phi} = \ell_f(e\Phi)$ à l'aide d'une forme linéaire convenable $\ell_f \in \mathcal{M}^{\mathrm{ord}\,*}$.

5. Une nouvelle construction : projecteur canonique α-primaire

On propose maintenant une méthode pour associer à une distribution Φ sur Y à valeurs dans un espace vectoriel convenable

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_k(\psi, \overline{\mathbb{Q}}) = \bigcup_{v\geq 0} \mathcal{M}_k(Np^v, \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p) = \bigcup_{v\geq 0} \mathcal{M}_k(Np^v, \psi, \mathbb{C}_p)$$

de formes modulaires, une famille $\mu_{\alpha,\Phi}$ de mesures p-adiques sur Y attachées à une valeur propre non nulle α de l'opérateur U_p sur $\mathcal{M}$. On montrera de plus que cette construction ne nécessite pas de *passage à la limite* p-adique. Ici on utilise la notation

$$\mathcal{M}_k(Np^v, \psi, A) = \mathcal{M}_k(Np^v, \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} A.$$

pour toute $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbre A.

Définition 5.1. *Soit $A = \mathbb{C}_p$, $A = \overline{\mathbb{Q}}$, ou $A = \mathbb{C}$, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$.*

a) Pour un $\alpha \in A$ on pose $\mathcal{M}^{(\alpha)} = \mathrm{Ker}(U - \alpha I)$ le sous-espace vectoriel sur A de $\mathcal{M}$ des fonctions propres (de valeur propre α).

b) On pose

$$\mathcal{M}^{\alpha} = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ker}(U - \alpha I)^n$$

(le sous-espace vectoriel α-primaire de $\mathcal{M}$).

c) On pose pour tout $v \geq 0$

$$\mathcal{M}^{\alpha}(Np^v) = \mathcal{M}^{\alpha} \cap \mathcal{M}(Np^v), \quad \mathcal{M}^{(\alpha)}(Np^v) = \mathcal{M}^{(\alpha)} \cap \mathcal{M}(Np^v).$$

Proposition 5.2. *Soit $\psi \bmod N$ un caractère de Dirichlet fixé. On pose $N_0 = Np$, alors $U^v(\mathcal{M}(N_0p^v, \psi)) \subset \mathcal{M}(N_0, \psi)$.*

PREUVE . Elle découle de la formule connue [Se73] :

$$U^v = p^{v(k/2-1)} W_{N_0p^v} \mathrm{Tr}_{N_0}^{N_0p^v} W_{N_0},$$

où $g|_k W_N(z) = (\sqrt{N}z)^{-k} g(-1/Nz) : \mathcal{M}(N, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}(N, \mathbb{C})$ l'involution (sur $\mathbb{C}$) de niveau N.

Proposition 5.3. *Soit $A = \mathbb{C}_p$ ou $A = \overline{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$, $\alpha \in A^*$, et soit U^{α} la restriction de U sur $\mathcal{M}^{\alpha}$, alors*

a) $(U^{\alpha})^v : \mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v)$ est un opérateur A-linéaire inversible, où $U^{\alpha} = U|_{\mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v)}$, $N_0 = Np$.

b) Le sous-espace vectoriel $\mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v) = \mathcal{M}^{\alpha}(N_0)$ ne dépend pas de v.

c) Soit $\pi_{\alpha,v} : \mathcal{M}(N_0p^v) \to \mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v)$ le projecteur sur le sous-espace α-primaire de U (de noyau

$$\mathrm{Ker}(\pi_{\alpha,v}) = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Im}(U - \alpha I)^n = \bigoplus_{\beta\neq\alpha} \mathcal{M}^{\beta}(N_0p^v)),$$

alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(N_0p^v) & \xrightarrow[\pi_{\alpha,v}]{} & \mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v) \\ {\scriptstyle U^v}\downarrow & & \downarrow\wr {\scriptstyle U^v} \\ \mathcal{M}(N_0) & \xrightarrow[\pi_{\alpha,0}]{} & \mathcal{M}^{\alpha}(N_0). \end{array}$$

On utilise la notation

$$\pi_{\alpha}(g) = (U^{\alpha})^{-v} \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \in \mathcal{M}^{\alpha}(\Gamma_0(Np), \psi, \mathbb{C})$$

pour la projection canonique α-primaire de $g \in \mathcal{M}(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \mathbb{C})$.

PREUVE de (a). L'opérateur linéaire $(U^{\alpha})^v$ agit sur un A-espace vectoriel $\mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v)$ de dimension finie, et son déterminant est dans A^*, donc $(U^{\alpha})^v$ est *inversible.*

PREUVE de (b). D'une part, $\mathcal{M}^{\alpha}(N_0) \subset \mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v)$, d'autre part les A-espaces vectoriels $\mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v)$ et $\mathcal{M}^{\alpha}(N_0)$ sont isomorphes par (a), donc il coïncident :

$$\mathcal{M}^{\alpha}(N_0) \subset \mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v) = U^v(\mathcal{M}^{\alpha}(N_0p^v)) \subset \mathcal{M}^{\alpha}(N_0).$$

PREUVE de (c). Selon la théorie de réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K, le projecteur canonique $\pi_{\alpha,v}$ sur le sous-espace α-primaire

$$\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ker}(U-\alpha I)^n$$

de noyau $\bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Im}(U-\alpha I)^n$ s'exprime, d'une part, comme un polynôme de U à coefficients dans K, donc $\pi_{\alpha,v}$ commute avec U. D'autre part, la restriction de $\pi_{\alpha,v}$ sur $\mathcal{M}(N_0)$ coïncide avec $\pi_{\alpha,0} : \mathcal{M}(N_0) \to \mathcal{M}^\alpha(N_0)$, car son image est

$$\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ker}(U-\alpha I)^n \cap \mathcal{M}(N_0) = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ker}(U\mid_{\mathcal{M}(N_0)} -\alpha I)^n,$$

et son noyau est

$$\bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Im}(U-\alpha I)^n \cap \mathcal{M}(N_0) = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{Im}(U\mid_{\mathcal{M}(N_0)} -\alpha I)^n.$$

6. Distributions à valeurs dans les formes modulaires p-adiques

Soit $g = \sum_{n\geq 0} a(n,g)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N), A)$, alors $|g|_p = \sup_n |a(n,g)|_p$ est bien défini et donne une norme p-adique sur $\mathcal{M} = \cup_{v\geq 0}\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N'p^v), A) \subset A[[q]]$. Soit V un A-module normé.

Définition 6.1. *Soit $\alpha \neq 0$ une valeur propre non nulle de l'opérateur U sur l'espace $\mathcal{M}$. La partie α-primaire $\Phi^\alpha = \pi_\alpha(\Phi)$ d'une distribution Φ sur Y à valeurs dans $\mathcal{M}$ est donnée par l'égalité*

$$\int_Y \varphi d\Phi^\alpha = \pi_\alpha(\Phi(\varphi)) = (U^\alpha)^{-v}\pi_{\alpha,0}\Big(\big(\int_Y \varphi\, d\Phi\big) \mid U^v\Big) \in \mathcal{M}^\alpha$$

pour toute fonction localement constante $\varphi \in C^1(Y, A)$ et tout p^v assez grand (tel que $\int_Y \varphi\, d\Phi$ est une combinaison linéaire finie dans $\mathcal{M}(N_0p^v)$).

On pose $\Phi(a+(Mp^v)) = \int_Y \delta_{a+(Mp^v)}d\Phi$ où $\delta_{a+(Mp^v)}$ désigne la fonction caractéristique d'un ouvert $a+(Mp^v) \subset Y$; alors il existe $v' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Phi(a+(Mp^v)) = \Phi(\delta_{(a+(Mp^v))}) \in \mathcal{M}(N'p^{v'+1}),$$

et pour tout tel v', la projection α-primaire $\Phi^\alpha = \pi_\alpha(\Phi)$ de Φ est donnée par

$$\Phi^\alpha(a+(Mp^v)) = (U^\alpha)^{-v'}\left[\pi_{\alpha,0}\big(\Phi(a+(Mp^v)) \mid U^{v'}\big)\right]. \tag{6.1}$$

7. Théorème principal

Dans cette section on note par A un sous-corps de $\mathbb{C}_p$ contenant $\overline{\mathbb{Q}}$, ($\overline{\mathbb{Q}} \subset A \subset \mathbb{C}_p$), on fixe un caractère de Dirichlet ψ mod N, on utilise toujours le plongement (1.1), et on fixe un entier N' divisible par N. On utilise l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(N'p^v) \text{ où } \mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi; A).$$

Pour un nombre entier convenable $r^* \geq 0$, on considère une suite finie de distributions (non nécessairement bornées)

$$\Phi_j : \mathcal{C}^1(Y, \overline{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p),$$

$(j = 0, 1, \cdots, r^*)$ sur le groupe profini

$$Y = Y_{M,p} = \varprojlim_v Y_{Mp^v}, \quad Y_{Mp^v} = (\mathbb{Z}/Mp^v\mathbb{Z})^\times$$

à valeurs dans l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(N'p^v) \text{ où } \mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi; \overline{\mathbb{Q}}).$$

On note par $\delta_{a+(Mp^v)}$ la *fonction indicatrice* de la partie $a + (Mp^v) \subset Y$. On considère $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ comme un $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel normé avec la norme

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \right|_p = \max_n |b_n|_p.$$

Théorème 1. *Soit $0 < |\alpha|_p < 1$ et $h = [\mathrm{ord}_p \alpha] + 1$. On fixe on nombre entier positif N', et on pose $N'_0 = N'p$. Supposons qu'il existe $\varkappa \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varkappa h \leq r^*$.*

(a) Si les deux conditions suivantes sont satisfaites : pour tous les $j = 0, 1, \cdots, \varkappa h - 1$ et pour tout $v \geq 1$,

$$\Phi_j(a + (Mp^v)) \in \mathcal{M}(N'_0 p^{\varkappa v}) \tag{7.1}$$

(la condition de niveau). Pour $t = 0, 1, \cdots, \varkappa h - 1$ l'estimation suivante soit satisfaite :

$$\left| U^{\varkappa v} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v)) \right|_p \leq C p^{-vt} \tag{7.2}$$

(la condition de divisibilité) pour une constante $C > 0$. Alors l'application linéaire

$$\tilde{\Phi}^\alpha : \mathcal{C}^{h\varkappa}(Y, \overline{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M} \tag{7.3}$$

définie par

$$\tilde{\Phi}^\alpha(\delta_{a+(Mp^v)}y_p^j) = \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d\tilde{\Phi}^\alpha := \pi_\alpha(\Phi_j(a+(Mp^v)) \tag{7.4}$$

(pour tout $j = 0, 1, \cdots, h\varkappa - 1$*), est une mesure* $h\varkappa$*-admissible.*

(b) Supposons qu'il existe $v_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $v \geq v_0$ *et pour* $j = 0, 1, \cdots, \varkappa h - 1$ *les distributions* $U^{\varkappa v}(\Phi_j)$ *sont bornées et que l'estimation soit satisfaite :*

$$\left|(U^{\varkappa v}\Phi_j)(a+(Mp^v)) - \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\varkappa v}(\Phi_0(y)))\right|_p < Cp^{-vh\varkappa} \tag{7.5}$$

où on pose $C = \max_{a,v}|U^{\varkappa v_0}(\Phi_0)(a+(Mp^v))|_p$*. Alors l'application linéaire*

$$\tilde{\Phi}^\alpha : \mathcal{C}^{h\varkappa}(Y, A) \to \mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}$$

définie par

$$\int_{a+(Mp^v)} y_p^j d\tilde{\Phi}^\alpha = \Phi_j^\alpha(a+(Mp^v)) := \pi_\alpha(\Phi_j(a+(Mp^v))$$

(pour tout $j = 0, 1, \cdots, h\varkappa - 1$*), est une mesure* $h\varkappa$*-admissible.*

PREUVE de (a). Il suffit de vérifier pour $\tilde{\Phi}^\alpha$ la condition de croissance de la définition 2.1 d) : pour tous les $t = 0, 1, \cdots, \varkappa h - 1$,

$$\left|\int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha\right|_p = o(p^{v(h\varkappa - t)}) \text{ lorsque } v \to \infty \tag{7.6}$$

D'une part, sur le sous-espace $\mathcal{M}^\alpha(N_0')$, on a $U = \alpha I + Z$ pour un opérateur nilpotent Z, où $Z^n = 0$ pour $n = rk_A\mathcal{M}^\alpha(N_0'p^v) = rk_A\mathcal{M}^\alpha(N_0')$. D'autre part, par les conditions du théorème 1,

$$\begin{aligned} \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha &= \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \pi_\alpha(\Phi_j(a+(Mp^v))) \\ &= \alpha^{-v\varkappa}\alpha^{v\varkappa}U^{-v\varkappa}\left[\pi_{\alpha,0}U^{v\varkappa}\left(\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-a_p)^{t-j}\Phi_j(a+(Mp^v))\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Les opérateurs

$$\alpha^{v\varkappa}U^{-v\varkappa} = (\alpha^{-1}U)^{-v\varkappa} = (Id + \alpha^{-1}Z)^{-v\varkappa} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{-v\varkappa}{i}(\alpha^{-1}Z)^i$$

sont *uniformément* bornés par une constante $C_1 > 0$ donc la condition (7.2), appliquée à l'égalité (7.7), donne

$$\left|\int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha\right|_p \le C\cdot C_1 |\alpha|_p^{-m\varkappa} |p^v|_p^t = o(p^{v(h\varkappa - t)})$$

lorsque $v \to \infty$ car $|\alpha|_p = |p|^{\mathrm{ord}_p \alpha}$, $\mathrm{ord}_p \alpha < h$,

$$|p^v|_p^{-\varkappa \, \mathrm{ord}_p \alpha} = o(p^{v\varkappa h}) \text{ (lorsque } v \to \infty).$$

PREUVE de (b). On vérifie d'abord l'estimation suivante : pour tous les $t = 0, 1, \cdots, \varkappa h - 1$ et pour tous les ouverts $a + (Mp^v)$ on a

$$\left| U^{\varkappa v} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v))\right|_p \le C |p^v|_p^t = C p^{-vt} \tag{7.8}$$

pour une constante $C > 0$. En effet, on peut supposer $v \ge v_0$ donc par l'hypothèse (7.5)

$$\left| (U^{\varkappa v}\Phi_j)(a + (Mp^v)) - \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\varkappa v}(\Phi_0(y)))\right|_p < C p^{-vh\varkappa}.$$

On pose

$$\Psi_j(a + (Mp^v) = (U^{\varkappa v}\Phi_j)(a + (Mp^v)) - \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\varkappa v}(\Phi_0(y))),$$

donc

$$\int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\varkappa v}(\Phi_0(y))) = (U^{\varkappa v}\Phi_j)(a + (Mp^v)) - \Psi_j(a + (Mp^v))$$

et $|\ \Psi_j(a + (Mp^v))\ |_p < C p^{-vh\varkappa}$. La substitution dans la partie gauche de l'inégalité (7.8) donne

$$U^{\varkappa v} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v)) \tag{7.9}$$

$$= \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \left(\int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{v\varkappa}(\Phi_0(y))) - \Psi_j(a + (Mp^v)\right)$$

$$= \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d(U^{v\varkappa}(\Phi_0(y))) - \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Psi_j(a + (Mp^v))$$

et $|\ (y_p - a_p)^t\ |_p \le p^{-vt}$ sur $a + (Mp^v)$ donne l'estimation cherchée de la partie droite de (7.8).

Puis, on vérifie de même façon la condition de croissance de la définition 2.1 d) pour la forme linéaire

$$\tilde{\Phi}^{\alpha} : \mathcal{C}^{h\varkappa}(Y,A) \to \mathcal{M}^{\alpha} \subset \mathcal{M}$$

définie dans le Théorème principal (théorème 1). Par l'estimation (7.8) on a

$$(7.10)\quad \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^{\alpha} = \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j^{\alpha}(a + (Mp^v))$$

$$= \alpha^{-v\varkappa}\alpha^{v\varkappa}U^{-v\varkappa}\left[\pi_{\alpha,0}U^{v\varkappa}\left(\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-a_p)^{t-j}\Phi_j(a+(Mp^v))\right)\right].$$

Les opérateurs

$$\alpha^{v\varkappa}U^{-v\varkappa} = (\alpha^{-1}U)^{-v\varkappa} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{-v\varkappa}{i}(\alpha^{-1}Z)^i$$

sont uniformément bornés par une constante $C_1 > 0$ donc la condition 7.8 appliquée à 7.10 donne de nouveau

$$\left|\int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^{\alpha}\right|_p \le C\cdot C_1 |\alpha|_p^{-m\varkappa} |p^v|_p^t = o(p^{v(h\varkappa - t)})$$

lorsque $v \to \infty$ car $|\alpha|_p = |p|^{\mathrm{ord}_p \alpha}$, $\mathrm{ord}_p \alpha < h$,

$$|p^v|_p^{-\varkappa \,\mathrm{ord}_p \alpha} = o(p^{v\varkappa h}) \text{ (lorsque } v \to \infty)$$

et on peut préciser la constante :

$$C = \max_{a,v} |U^{\varkappa v_0}(\Phi_0)(a + (Mp^v))|_p .$$

8. Deuxième étape : application d'une forme linéaire convenable

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ une valeur propre non nulle de U sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ attachée à une forme parabolique primitive $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi)$ et soit

$$(8.1)\qquad f_0 = f_{0,\alpha} = f - \alpha' V(f),\quad V\left(\sum_{n\ge 0} b_n q^n\right) = \sum_{n \ge 0} b_n q^{pn}$$

une fonction propre de U, telle que $f_0|U = \alpha f_0$. On pose

$$(8.2)\quad f^0 = f_0^{\rho}|W_{N_0},\quad f_0^{\rho} = \sum_{n\ge 1}\overline{a_n(f_0)}q^n,\quad W_{N_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N_0 & 0\end{pmatrix},\quad N_0 = Np.$$

Proposition 8.1.

a) L'opérateur $U^* = W_{N_0}^{-1} U W_{N_0}$ *dans* $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ *est l'opérateur de* U *par rapport au produit scalaire de Petersson.*

b) $f^0|U^* = \bar{\alpha} f^0$, *et pour tous les "bons" nombres premiers* $l \nmid Np$, *on a*

$$T_l f^0 = a_l(f) f^0.$$

c) Pour tout $g \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ *on a*

$$\langle f^0, g \rangle = \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) \rangle,$$

c'est à dire, la forme linéaire $g \mapsto \langle f^0, g \rangle$ *sur* $\mathcal{M}(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ *s'annule sur* $\mathrm{Ker}(\pi_{\alpha,0})$, *où*

$$\pi_{\alpha,0} : \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}^{\alpha}(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$$

est le projecteur sur le sous-espace α*-primaire, de noyau*

$$\mathrm{Ker}(\pi_{\alpha,0}) = \mathrm{Im}((U - \alpha I)^n) = \bigoplus_{\beta \neq \alpha} \mathcal{M}^{\beta}(N_0)),$$

(comme dans Proposition 5.3, mais sur $\mathbb{C}$*), où* $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$.

d) On pose $N_0 = Np$. *Si* $g \in \mathcal{M}(Np^{v+1}, \overline{\mathbb{Q}}) = \mathcal{M}((\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{Q})$, *et si* $\alpha \neq 0$, *on a*

$$\langle f^0, \pi_\alpha(g) \rangle = \alpha^{-v} \langle f^0, U^v(g) \rangle$$

où

$$\pi_\alpha(g) = (U^\alpha)^{-v} \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \in \mathcal{M}^\alpha(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \mathbb{C}) = \mathcal{M}^\alpha(\Gamma_0(Np), \psi, \mathbb{C})$$

est la projection canonique α*-primaire de* $g \in \mathcal{M}(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \mathbb{C})$.

e) On pose

$$\mathcal{L}_{f,\alpha}(g) = \frac{\langle f^0, \alpha^{-v} U^v(g) \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle f^0, \pi_\alpha(g) \rangle}{\langle f, f \rangle},$$

alors on obtient une forme linéaire

$$\mathcal{L}_{f,\alpha} : \mathcal{M}(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \to \overline{\mathbb{Q}},$$

définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, *et il existe une unique forme* $\mathbb{C}_p$*-linéaire* $\ell_{f,\alpha} \in \mathcal{M}^\alpha(N_0, \psi, \mathbb{C}_p)^*$ *donnée sur les* $\mathbb{C}_p$*-générateurs de l'espace vectoriel*

$$\mathcal{M}^\alpha(N_0 p^v, \psi, \mathbb{C}_p) = \mathcal{M}^\alpha(Np^{v+1}, \overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}_p$$

par l'égalité

$$\ell_{f,\alpha}(g^\alpha)) = i_p(\mathcal{L}_{f,\alpha}(g)) = i_p\left(\frac{\langle f^0, \alpha^{-v} U^v(g) \rangle}{\langle f, f \rangle}\right).$$

PREUVE DE PROPOSITION 8.1

a) Voir [Miy], Th. 4.5.5.

b) On a :

$$f^0|U^* = f_0^\rho \mid W_{Np} W_{Np}^{-1} U W_{Np} = \bar{\alpha} f_0^\rho \mid W_{Np} = \bar{\alpha} f^0.$$

c) Pour toute fonction

$$g_1 = (U - \alpha I)^n g \in \mathrm{Ker}(\pi_{\alpha,0}) = \mathrm{Im}(U - \alpha I)^n$$

on a

$$\langle f^0, g_1 \rangle = \langle f^0, (U - \alpha I)^n g \rangle = \langle (U^* - \bar{\alpha} I) f^0, (U - \alpha I)^{n-1} g \rangle = 0$$

donc pour $g_1 = g - \pi_{\alpha,0}(g)$ nous avons

$$\begin{aligned} \langle f^0, g \rangle &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) + (g - \pi_{\alpha,0}(g)) \rangle \\ &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) \rangle + \langle f^0, g_1 \rangle \\ &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) \rangle. \end{aligned}$$

d) Utilisons directement l'égalité $(U^*)^v f^0 = \bar{\alpha}^v f^0$ de b) :

$$\begin{aligned} \alpha^v \cdot \langle f^0, \pi_\alpha(g) \rangle &= \langle (U^*)^v f^0, U^{-v} \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \rangle \\ &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \rangle \\ &= \langle f^0, U^v(g) \rangle \end{aligned}$$

par c), puisque $U^v(g) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$.

e) On remarque que $f^0 \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ donc

$$\mathcal{L}_{f,\alpha}(f_0) = \frac{\langle f^0, \pi_\alpha(f^0) \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle f^0, f^0 \rangle}{\langle f, f \rangle} \in \overline{\mathbb{Q}};$$

considérons l'espace vectoriel complexe

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{f,\alpha}) \cap \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C}) \\ &\quad = \pi_\alpha^{-1}(\langle f^0 \rangle^\perp) \\ &\quad = \{ g \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C}) \mid \langle f^0, g \rangle = 0 \} \\ &\quad \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{8.3}$$

qui admet une base $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnelle car il est stable par tous les “bons” opérateurs de Hecke T_l $(l \nmid Np)$:

$$\langle f^0, g \rangle = 0 \Longrightarrow \langle f^0, T_l g \rangle = \langle T_l^* f^0, g \rangle = 0$$

et on obtient une telle base par la diagonalisation de l'action de tous les T_l (une famille commutative d'opérateurs normaux) ce qui entraîne e). On a utilsé le fait apparent que le projecteur π_α est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sur tout espace vectoriel $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C})$, puisque $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$.

9. Lien avec les fonctions L : convolutions des séries d'Eisenstein

On fixe dans cette section un caractère de Dirichlet auxiliaire $\xi \bmod p$, $\xi : Y \to \overline{\mathbb{Q}}^*$, (soit paire soit impaire), et on utilise la méthode de Rankin-Selberg pour la convolution

$$D(s,f,g) = L_N(2s+2-k-l, \psi\overline{\xi\chi}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s},$$

où les nombres

$$b_n = \sigma_{l-1,\bar\chi,\bar\xi}(n) = \sum_{d|n,d>0} \bar\chi(d)\bar\xi(n/d)d^{l-1}, \quad n \geq 1$$

sont les coefficients de Fourier d'une certaine série d'Eisenstein $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(2\pi i n z)$ de poids l (et de caractère de Dirichlet $\bar\chi\bar\xi$) dès que $\chi\xi(-1) = (-1)^l$. On a donc

$$L_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = L(s-l+1, \bar\chi)L(s, \bar\xi),$$

et on sait par le lemme de Rankin ([Ra52], voir aussi [Hi85], [Man-Pa]) que $D(s,f,g)$ s'exprime par la fonction

$$L_f(s-l+1, \bar\chi)L_f(s, \bar\xi). \tag{9.1}$$

Considérons deux *distributions d'Eisenstein* définies par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} E_{0,\ell,Mp^v}(\xi, b) &:= \sum_{a \in Y_{Mp^v}} \xi(a) E_{0,\ell}(a, b; Mp^v) \in \mathcal{M}_\ell^\infty(\Gamma_1(Mp^v)), \\ E_{r,\ell,Mp^v}(a) &:= \sum_{b \in Y_{Mp^v}} E_{r,\ell,Mp^v}(a,b) \in \mathcal{M}_\ell^\infty(\Gamma_1(Mp^v)), \end{aligned} \tag{9.2}$$

à partir des séries (3.1)

$$\begin{aligned} E_{r,\ell,N}(a,b) :&= \frac{N^{\ell-2r-1}\Gamma(\ell-r)}{(-2\pi i)^{\ell-2r}(-4\pi y)^r} \sum_{a \bmod N} e(-ax/N) E_{\ell,N}(Nz, -r; x, b) \\ &= \varepsilon_{r,\ell,N}(a,b) + (4\pi y)^{-r} \times \\ \sum_{\substack{0<dd' \\ d\equiv a, d'\equiv b \bmod N}} &\operatorname{sgn} d \cdot d^{\ell-2r-1} W(4\pi dd' y, \ell-r, -r) q^{dd'} \in \mathcal{M}_\ell^\infty(N^2), \end{aligned}$$

où $W(y,\ell-r,-r) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{\Gamma(\ell-r)}{\Gamma(\ell-r-j)}y^{r-j}$. De plus, on utilise la notation suivante pour les sommes :

$$E_{0,k-1-j}(\xi,\chi) =\frac{1}{2}\sum_{a\in Y_{Mp^v}} \chi(a)E_{0,k-1-j,Mp^v}(\xi,a) \in \mathcal{M}_{k-1-j}(\Gamma_0(Mp^v),\xi\chi),$$

$$E_{j,1+j}(\psi\overline{\chi\xi}) =\frac{1}{2}\sum_{b\in Y_{Mp^v}} (\psi\overline{\chi\xi})(b)E_{j,1+j,Mp^v}(b) \in \mathcal{M}_{1+j}(\Gamma_0(Mp^v),\psi\overline{\xi\chi}),$$

La fonction

$$\Phi_j(\chi) = (-1)^j E_{0,k-1-j}(\xi,\chi)E_{j,1+j}(\psi\overline{\chi\xi}) \tag{9.3}$$

est alors une forme modulaire *holomorphe* dans

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_0(Mp^v),\psi;\mathbb{Q}^{ab}) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^v);\mathbb{Q}^{ab})$$

puisque si $r = 0$ ou $r = l-1$,

$$y^{-r}W(y,\ell-r,-r) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{\Gamma(\ell-r)}{\Gamma(\ell-r-j)}y^{-j} = 1,$$

à cause du facteur $\dfrac{\Gamma(l-r)}{\Gamma(l-r-j)} = 0$ pour $j \geq l-r$.

FORME LINÉAIRE $\mathcal{L}_{f,\alpha}$ ET LA CONVOLUTION DE RANKIN-SELBERG.

Ensuite, on calcule la valeur $\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi))$ de la $\overline{\mathbb{Q}}$-forme linéaire $\mathcal{L}_{f,\alpha}$.

Proposition 9.1. *Soient $\chi,\psi : Y \to \mathbb{Q}^{ab\times}$ deux caractères de Dirichlet* $\mathrm{mod}\, Mp^v$*,*

a) Soit $f \in \mathcal{S}_k(N,\psi)$, $k \geq 2$, alors l'égalité suivante

$$\Phi_j(a+(Mp^v)) = (-1)^j \sum_{y\in Y_{Mp^v}} \psi\bar{\xi}(y)E_{0,k-1-j}(\xi,ya)E_{j,1+j}(y) \tag{9.4}$$

définie une distribution (dite la convolution tordue par le caractère $\psi\bar{\xi}$), pour tout $j = 0,\cdots,k-2$ à valeurs dans l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) := \bigcup_{v\geq 0}\mathcal{M}(N'p^v) \text{ où } \mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v),\psi;A).$$

(la définition dépend de choix du caractère auxiliaire ξ). Alors la valeur sur χ de cette distribution est égale à

$$\Phi_j(\chi) = (-1)^j E_{0,k-1-j}(\xi,\chi)E_{j,1+j}(\psi\overline{\xi\chi}).$$

b) Pour tout caractère χ primitif $\mathrm{mod}\, p^v (v \geq 1)$*, les valeurs spéciales de la fonction $L_f(s,\chi) = \sum_{n\geq 1}\chi(n)a_n(f)n^{-s}$ sont liées avec les nombres* *algébriques* $\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi))$ *pour* $0 \le j \le k-2$ *par la formule*

$$\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi)) = \frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot L_f^*(j+1, \overline{\chi}) \cdot t, \tag{9.5}$$

(où $G(\chi)$ *est la somme de Gauss)*

$$\begin{aligned} L_f^*(1+j, \overline{\chi}) &:= \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1, \overline{\chi})}{(-2i\pi)^{j+1}c^{\pm}(f)} \\ &= \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1, \overline{\chi})L_f(k-1, \overline{\xi})}{(-2\pi i)^{j+k}\langle f, f\rangle} \in \overline{\mathbb{Q}}, \end{aligned}$$

pour un choix des deux constantes complexes non-nulles

$$c^+(f) = c^+(f, \xi), \quad c^-(f) = c^-(f, \xi) \in \mathbb{C}^\times$$

("périodes" de f*) avec* $(-1)^{k-j-1}\chi(-1) = \pm 1$*, et pour une constante élémentaire* $t \in \overline{\mathbb{Q}}^*$*, comparer avec l'égalité (1.2)).*

c) La suite Φ_j *définie (via Théorème 1 ci-dessus) une mesure* h*-admissible* $\mu_{f,\alpha}$ *qui interpole les valeurs critiques*

$$\frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1, \overline{\chi})L_f(k-1, \overline{\xi})}{(-2\pi i)^{j+k}\langle f, f\rangle}$$

pour les caractères de Dirichlet χ *primitifs* $\bmod p^v$ (comparer avec [Vi76]).

PREUVE DE PROPOSITION 9.1. a) C'est une propriété générale des convolutions multiplicatives (voir [Hi85]). Plus explicitement, l'égalité (9.4) montre que le développement de Fourier des distributions Φ_j (pour $j = 0, \ldots, k-2$) est donnée par

$$\begin{aligned} &\Phi_j(a + Mp^v) = \\ &(-1)^j \sum_{b \in Y_{Mp^v}} \psi\overline{\xi}(b) \sum_{n \ge 0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} A_j(n_1, ab)_v B_j(n_2, b)_v q^n, \end{aligned} \tag{9.6}$$

où

$$\begin{aligned} A_j(n_1, ab)_v &= \sum_{\substack{d_1 | n_1 \\ (n_1/d_1) \equiv ab \bmod Mp^v}} \xi(d_1)\operatorname{sgn}(d_1) d_1^{k-2-j} \\ B_j(n_2, b)_v &= \sum_{\substack{d_2 | n_2 \\ d_2 \equiv b \bmod Mp^v}} \operatorname{sgn}(d_2)(n_2/d_2)^j \quad \text{pour} \quad n_2 > 0. \end{aligned} \tag{9.7}$$

b) Impliquée par la méthode de Rankin-Selberg pour la convolution

$$D(s, f, g) = L_N(2s + 2 - k - l, \psi\overline{\xi\chi}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s},$$

où ξ est un caractère de Dirichlet ξ non trivial auxiliaire et les nombres

$$b_n = \sigma_{l-1,\bar{\chi},\bar{\xi}}(n) = \sum_{d|n,d>0} \bar{\chi}(d)\bar{\xi}(n/d)d^{l-1}, \quad n \geq 1$$

sont les coefficients de Fourier d'une certaine série d'Eisenstein $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(2\pi i n z)$ de poids l (et de caractère de Dirichlet $\bar{\chi}\bar{\xi}$) dès que $\chi\xi(-1) = (-1)^l$. On a donc

$$L_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = L(s-l+1,\bar{\chi})L(s,\bar{\xi}),$$

et un calcul de l'intégrale de Rankin-Selberg (voir par exemple proposition 7.7 dans [PaTV]) montre que

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle_{Np}\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi)) &= R\cdot\alpha^{-v}p^{vj}A(f,\xi)G(\chi)\Gamma(1+j)\Gamma(k-1)\\ &\quad\times\frac{L_f(1+j,\bar{\chi})L_f(k-1,\bar{\xi})}{(-2i\pi)^{k+j}}\\ &= \frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v}\cdot L_f^*(j+1,\overline{\chi})\cdot t,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}L_f^*(1+j,\overline{\chi}) &= \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1,\overline{\chi})}{(-2i\pi)^{j+1}c^{\pm}(f)}\\ &= \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1,\overline{\chi})L_f(k-1,\overline{\xi})}{(-2i\pi)^{j+k}\langle f,f\rangle} \in \overline{\mathbb{Q}},\end{aligned}$$

pour le choix suivant des deux constantes complexes non-nulles :

$$c^{\pm}(f) = \frac{(-2i\pi)^{k-1}\langle f,f\rangle}{\Gamma(k-1)L_f(k-1,\overline{\xi})}, \quad c^{\mp}(f) = \frac{\Gamma(k-1)L_f(k-1,\overline{\xi})}{(-2i\pi)^{k-1}},$$

déterminé par la règle $\xi(-1) = \pm 1$, $-\xi(-1) = \mp 1$ (on remarque ici que pour tout $k \geq 4$, $L_f^*(k-1,\overline{\xi}) \neq 0$, à cause de la convergeance absolue du produit d'Euler correspondant, mais même pour $k = 2,3$ on peut choisir ξ avec cette propriété, voir [Shi77]).

Ceci démontre (b) et on retrouve le résultat de Yu.I.Manin sur l'algébraïcité de (1.2).

c) On vérifie coefficient-par-coefficient que les distributions Φ_j satisfont les conditions de niveau et de divisibilité (7.1), (7.2).

Puis on applique directement le théorème 1 et la proposition 8.1 c), d) pour obtenir les mesures h-admissibles cherchées $\mu_{f,\alpha}$ sous la forme $\mu_{f,\alpha} = \ell_{f,\alpha}(\tilde{\Phi}^{\alpha})$.

En effet, on vérifie tout d'abord que les condition de niveau et de divisibilité du théorème 1 sont satisfaites pour les distributions (9.6) :

$$\begin{aligned}\Phi_j(a+(Mp^v)) &= (-1)^j \sum_{y\in Y_{Mp^v}} \psi\bar{\xi}(y)E_{0,k-1-j}(\xi, ya)E_{j,1+j}(y)\\ &= \sum_{b\in Y_{Mp^v}} \psi\bar{\xi}(b)\sum_{n\geq 0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=n}(-1)^j A_j(n_1,ab)_v B_j(n_2,b)_v q^n,\end{aligned}$$

La condition de niveau des distributions Φ_j est satisfaite avec $\varkappa = 1$ par la définition des séries d'Eisenstein (9.3) (on pose $N' = NM^2$).

Il reste donc à montrer la divisibilité par p^{tv} de tous les coefficients de Fourier de la forme modulaire suivante :

$$\begin{aligned}(9.8)\quad & U^{\varkappa v}\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-a_p)^{t-j}\Phi_j(a+(Mp^v))\\ &= \sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-a_p)^{t-j}\sum_{n\geq 0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=p^{\varkappa v}n}(-1)^j A_j(n_1,ab)_v B_j(n_2,b)_v q^n,\end{aligned}$$

(où $A_j(n_1,ab)_v$ et $B_j(n_2,b)$ sont donnés par les égalités (9.7) :

$$A_j(n_1,ab)_v = \sum_{\substack{d_1|n_1\\ (n_1/d_1)\equiv ab \bmod Mp^v}} \xi(d_1)\mathrm{sgn}\,(d_1)d_1^{k-2-j}$$

$$B_j(n_2,b)_v = \sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2\equiv b \bmod Mp^v}} \mathrm{sgn}\,(d_2)(n_2/d_2)^j \quad \text{pour} \quad n_2>0).$$

On fixe n_1 et n_2 avec $n_1+n_2 = p^{\varkappa v}n$, $d_1|n_1$ et $d_2|n_2$ avec $(n_1/d_1)\equiv ab \bmod Mp^v$ et $d_2 \equiv b \bmod Mp^v$, et on écrit que les termes dépendant de j (on mis les autrres termes en facteur) :

$$\begin{aligned}(9.9)\quad \sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-a)^{t-j}(-1)^j d_1^{k-2-j}\left(\frac{n_2}{d_2}\right)^j &= d_1^{k-2}\left(-a-\left(\frac{n_2}{d_1d_2}\right)\right)^t\\ &\equiv d_1^{k-2}d_2^{-t}\left(-ad_2+\left(\frac{n_1}{d_1}\right)\right)^t\\ &\equiv 0 \bmod p^{vt}\end{aligned}$$

La congruence (9.9) est donc satisfaite puisque $n_2 \equiv -n_1 \bmod p^v$, $p \nmid d_2$ et

$$ad_2 \equiv ab \equiv \frac{n_1}{d_1} \bmod p^v.$$

La suite Φ_j définie donc (via Théorème 1 ci-dessus) une mesure h-admissible $\mu_{f,\alpha}$ donnée par la suite des distributions $\mu_{f,\alpha,j}(a+(Mp^v)) =$

$\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(a + (Mp^v))$. L'identité (9.5) montre que cette suite interpole les valeurs critiques :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi)) &= \frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot L_f^*(j+1,\overline{\chi}) \cdot t \\ &= \frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1,\overline{\chi})L_f(k-1,\overline{\xi})}{(-2\pi i)^{j+k}\langle f,f\rangle}\end{aligned}$$

pour les caractères de Dirichlet χ primitifs $\bmod p^v$ (comparer avec [Vi76]).

10. Application aux produits triples : cas admissible

Considérons l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^v))^{\otimes 3}$$

et soit $L(f \otimes g \otimes h, s)$ la fonction L triple associée à $f \otimes g \otimes h \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{\otimes 3}$ avec une valeur propre *non nulle* $\alpha\beta\gamma$, alors

$$f_0 \otimes g_0 \otimes h_0 \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(Np))^{\otimes 3}$$

est une fonction propre de $U^{\otimes 3}$ sur $\mathcal{M}$, et $f^0 \otimes g^0 \otimes h^0$ est une fonction propre de $(U^*)^{\otimes 3}$. Utilisons la restriction sur la diagonale $\Phi = E_k^3(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{M}$ de la distribution de Siegel-Eisenstein (voir [PIsr]) vue comme une série formelle de Fourier. On obtient une suite des distributions Φ_j sur Y^3 à valeurs dans $\mathcal{M}$ en utilisant l'action de certains opérateurs différentiels sur Φ (voir [PTr]).

On considère la forme linéaire suivante :

$$l_{f\otimes g\otimes h,\alpha\beta\gamma}(\Phi_j) := i_p\left(\frac{\langle f^0 \otimes g^0 \otimes h^0, \Phi_j^{\alpha\beta\gamma}\rangle}{\langle f,f\rangle\langle g,g\rangle\langle h,h\rangle}\right)$$

Théorème 2. *On pose* $h = [2\mathrm{ord}_p(\alpha\beta\gamma)] + 1$. *Il existe une suite* μ_j *de distributions* $\mu_j = l_{f\otimes g\otimes h,\alpha\beta\gamma}(\Phi_j)$ *sur* Y^3 *à valeurs dans* $\mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}$ *qui détermine (via le théorème 1 ci-dessus) une mesure h-admissible*

$$\tilde{\mu} = l_{f\otimes g\otimes h,\alpha\beta\gamma}(\tilde{\Phi}^{\alpha\beta\gamma})$$

telle que les intégrales

$$\tilde{\mu}(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3) = l_{f\otimes g\otimes h,\alpha\beta\gamma}(\Phi)(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3)$$

(des produits des caractères de Dirichlet $\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3$*) coïncident avec les valeurs spéciales*

$$L^*(f_{\chi_1} \otimes g_{\chi_2} \otimes h_{\chi_3}, k+j), \quad (j = 0, \cdots, k-2),$$

pourvue que la normalisation de L^* *inclut à la fois sommes de Gauss, produits scalaires de Petersson, puissances de* π *et de* $\alpha\beta\gamma$.

PREUVE (abrégée). L'existence de la mesure h-admissible $l_{f\otimes g\otimes h,\alpha\beta\gamma}(\tilde{\Phi}^{\alpha\beta\gamma})$ découle de la suite Φ_j ci-dessus à l'aide du Théorème 1 avec $\varkappa = 2$, $j = 0, \cdots, k-2$, et l'égalité pour les valeurs spéciales est impliquée par une version explicite de la formule intégrale de Garrett-Harris [GaHa], voir aussi [LBP], [PTr], [B-SchP]. Les détails apparaitront dans un autre article (un travail en cours conjoint avec S.Böcherer).

Bibliographie

[AV] YVETTE AMICE, JACQUES VÉLU, *Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke.* Astérisque **24–25** (1975), 119–131.

[B-SchP] S.BOECHERER, R.SCHULZE-PILLOT, *On the central critical value of the triple product L-function.* Seminaire de theorie des nombres, Paris (1993-94), Birkhäuser, 1996, 3–46.

[Co] JOHN COATES, *On p-adic L-functions.* Séminaire Bourbaki, 40ème année, 1987–88, no. **701** (1989), 177–178.

[Co-PeRi] JOHN COATES, BERNADETTE PERRIN-RIOU, *On p-adic L-functions attached to motives over* $\mathbb{Q}$. Advanced Studies in Pure Math. **17** (1989), 23–54.

[Colm98] PIERRE COLMEZ, *Fonctions L p-adiques.* Séminaire Bourbaki, 51 ème année, 1998–99, no. **851**.

[De-Ri] P.DELIGNE, K.A.RIBET., *Values of Abelian L-functions at negative integers over totally real fields.* Invent. Math. **59** (1980) 227–286.

[Jo] FABIENNE JORY, *Familles de symboles modulaires et fonctions L p-adiques.* Thèse de Doctorat, Institut Fourier (Grenoble), 18 décembre 1998. `http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/ps/t92.ps.gz`

[Hi85] HARUZO HIDA, *A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic cusp forms I.* Invent. Math. **79** (1985), 159–195.

[Hi93] HARUZO HIDA, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series.* Cambridge Univ. Press, 1993.

[GaHa] PAUL B. GARRETT, MICHAEL HARRIS, *Special values of triple product L-functions.* Am. J. Math. **115** (1993), 161–240.

[Ka76] N. M. KATZ, *p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series.* Ann. of Math. **104** (1976), 459–571

[Ka78] KATZ, N.M., *p-adic L-functions for CM-fields.* Invent. Math. **48** (1978), 199–297.

[Kl] KLINGEN H., *Über die Werte Dedekindscher Zetafunktionen.* Math. Ann. **145** (1962), 265–272

[LBP] YANN-HENRI LE BRAS, A.A.PANCHISHKIN, *Sur les produits triples Λ-adiques.* Communications in Algebra **29** no. **9** (2001), 3727-3740.

[Ma73] YU.I. MANIN, *Periods of cusp forms and p-adic Hecke series.* Mat. Sbornik **92** (1973), 378–401.

[Man-Pa] YU.I.MANIN, A.A. PANCHISHKIN, *Convolutions of Hecke series and their values at integral points.* Mat. Sbornik **104** (1977), 617–651.

[Miy] TOSHITSUNE MIYAKE, *Modular forms. Transl. from the Japanese by Yoshitaka Maeda.* Berlin etc. Springer-Verlag. viii, 1989.

[MTT] B.MAZUR, J.TATE, J. TEITELBAUM, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer.* Invent. Math. **84** (1986), 1–48.

[PLNM] A.A. PANCHISHKIN, *Non-Archimedean L-functions of Siegel and Hilbert modular forms.* Lecture Notes in Math. **1471**, Springer-Verlag, 2nd augmented edition 2003.

[PTr] A.A. PANCHISHKIN, *Produits triples des formes modulaires et leur interpolation p-adique par la méthode d'Amice-Vélu.* Manuscript de l'exposé au Colloque à la mémoire d'Yvette Amice, (mars 1994), 1–27.

[PIsr] A.A. PANCHISHKIN, *On the Siegel–Eisenstein measure.* Israel Journal of Mathematics **120** (2000), 467–509.

[PaTV] A.A.PANCHISHKIN, *Two variable p-adic L functions attached to eigenfamilies of positive slope.* Inventiones Math. **154** no. **3** (2003), 551 - 615.

[PaB1] A.A.PANCHISHKIN, *Arithmetical differential operators on nearly holomorphic Siegel modular forms.* Preprint MPI **41** (2002), 1–52.

[PaB1] A.A.PANCHISHKIN, *Admissible measures for standard L-functions and nearly holomorphic Siegel modular forms.* Preprint MPI **42** (2002), 1–65.

[PIAS] A.A. PANCHISHKIN, *On p-adic integration in spaces of modular forms and its applications.* J. Math. Sci. New York **115** no. **3** (2003), 2357-2377.

[PNM] A.A. PANCHISHKIN, *A new method of constructing p-adic L-functions associated with modular forms.* Moscow Mathematical Journal **2** (2002), 1–16.

[Ra52] R.A. RANKIN, *The scalar product of modular forms*, Proc. London math. Soc. **3** (1952), 198–217.

[Se73] JEAN-PIERRE SERRE, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques.* Lecture Notes in Math. **350** (1973), 191–286.

[Shi71] GORO SHIMURA , *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions.* Princeton Univ. Press, 1971.

[Shi77] GORO SHIMURA, *On the periods of modular forms.* Math. Annalen **229** (1977), 211–221.

[Vi76] M. M. VIŠIK, *Non-archimedean measures connected with Dirichlet series.* Math. USSR Sb. **28** (1976), 216–228.

Alexei PANCHISHKIN
Institut Fourier
B.P.74
38402 St.–Martin d'Hères, France
E-mail : `panchish@mozart.ujf-grenoble.fr`